



UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI
Instytut Budownictwa
Zakład Mechaniki Budowli



Krzysztof Kula

NIELINIOWA ANALIZA PŁYT WŁÓKNOKOMPOZYTOWYCH

Rozprawa doktorska

Promotor: **dr hab. inż. Mieczysław Kuczma, prof. UZ**

Zielona Góra 2007

PODZIĘKOWANIA

Niniejsza rozprawa doktorska jest podsumowaniem mojej kilkuletniej pracy badawczej i powstała dzięki wsparciu i życzliwości wielu osób.

Szczególnie chciałbym podziękować mojemu promotorowi Panu Profesorowi Mieczysławowi Kucznie za nieocenioną pomoc, inspirujące dyskusje i rozległą wiedzę, którymi mi służył na wszystkich etapach mojej pracy naukowej. Specjalne podziękowania dla wszystkich współpracowników z Zakładu Mechaniki Budowli za wartościowe rady i przyjazną atmosferę, a szczególnie dla Pana Profesora Romualda Świtki za wprowadzenie do tematyki kompozytów.

Część moich badań realizowałem na Uniwersytecie Technicznym w Dreźnie w Instytucie Mechaniki i Struktur Powłokowych kierowanym przez Pana Profesora Bernda Zastrau. W miejscu tym chciałbym podziękować Panu Profesorowi Zastrau za współpracę, wartościowe dyskusje i gościnność. Podziękowania należą się wszystkim kolegom z tego instytutu za inspirujące dyskusje oraz przyjazne przyjęcie i atmosferę w czasie trwania mojego stypendium. Szczególnie chcę podziękować Panu Dr. Rainerowi Schlebusch za bliską współpracę, mającą duże odzwierciedlenie w niniejszej pracy.

Duże wsparcie otrzymałem także od instytucji wspierających naukę i tak moje stypendium w Dreźnie było finansowane przez organizację Herbert-Quandt/ALTANA, a w latach 2003-2006 byłem uczestnikiem grantu kierowanego przez prof. Mieczysława Kucznię, a finansowanego przez Komitet Badań Naukowych, za co instytucjom i ludziom je tworzącym dziękuję.

Na koniec szczególnie ciepłe podziękowania dla rodziny i przyjaciół, a przede wszystkim dla Sylwii, za wsparcie i obecność.

ACKNOWLEDGEMENTS

The dissertation is a summary of my few-year research and it has originated thanks to support and kindness of many people.

Particularly I would like to thank my supervisor Professor Mieczysław Kuczma for remarkable help, inspiring discussions, and also vast knowledge, which I was offered on every stage of creating my research. Special thanks to every associate from the Department of Structural Mechanics for precious advice and a very friendly atmosphere, especially to Professor Romuald Świtka for introducing me to subject matters and composites.

Some of my research was realized in Technische Universität Dresden in the Institute of Mechanics and Shell Structures, led by Professor Bernd Zastrau and hereby I wish to extend my warmest thanks to him not only for a lot of very valuable debates but also for his hospitality as well. I also want to thank my colleagues from that institute for longlasting, inspiring discussions as well as their warm reception and the friendly atmosphere during my scholarship. Especially I would like to thank Dr. Rainer Schlebusch for the close collaboration which resulted in this work.

I have also received some great support from a few organizations which help scientists to develop. For instance I took part in a grant, sponsored by the Committee for Scientific Research between 2003 - 2006 and led by Prof. Mieczysław Kuczma. My Dresden's scholarship in 2006 was financially supported by Herbert-Quandt/ALTANA. I am also very indebted to the institutions and their members.

Finally the warmest thanks to my whole family, friends, especially Sylwia, for enormous support and understanding.

Spis treści

1	Wstęp	5
2	Przegląd literatury	7
2.1	Kompozyt jako materiał	7
2.2	Kompozytowy element konstrukcyjny	9
2.3	Kompozyt w stanie uszkodzenia	11
3	Cel i zakres pracy	13
4	Płyty włóknokompozytowe w zakresie liniowym	14
4.1	Opis przyjętych sposobów modelowania kompozytu	14
4.1.1	Równanie konstytutywne	14
4.1.2	Równanie różniczkowe płyty	16
4.1.3	Model ŚWITKI	16
4.1.4	Model warstwowy	19
4.2	Aproksymacja problemu metodą elementów skończonych	21
4.3	Wyniki analiz numerycznych	23
5	Płyty włóknokompozytowe w zakresie nieliniowym	33
5.1	Rodzaje uszkodzeń	33
5.2	Kryteria wytrzymałości	36
5.2.1	Kryterium maksymalnego naprężenia	37
5.2.2	Kryterium TSAI-WU	39
5.2.3	Kryterium HASHIN'A	40
5.2.4	Kryteria wytrzymałości warstwy, a uszkodzenie kompozytu warstwowego	41
5.3	Elementy mechaniki ośrodków ciągłych	42
5.3.1	Deformacja i odkształcenie	42
5.3.2	Związki konstytutywne	45
5.3.3	Równania wariacyjne	47
5.4	Element skończony przestrzenno-powłokowy (3-D)	49
5.4.1	Dyskretyzacja i linearyzacja	49
5.4.2	Zjawiska blokady	56
5.4.3	Metoda ANS (<i>Assumed Natural Strain</i>)	57
5.4.4	Metoda EAS (<i>Enhanced Assumed Strain</i>)	61
5.5	Modelowanie numeryczne kompozytów warstwowych	62
5.5.1	Model numeryczny 2-D. Rozwój uszkodzeń w kompozycie warstwowym	62
5.5.2	Model numeryczny 3-D. Delaminacja	65
5.6	Wyniki analiz numerycznych	72
5.6.1	Zginana płyta warstwowa - rozwój uszkodzenia	72
5.6.2	Test elementu kohezyjnego - rozciąganie	77
5.6.3	Test na rozwój delaminacji - forma I - <i>Double Cantilever Beam</i> (DCB)	79

6	Wnioski końcowe i kierunki dalszych badań	85
	Dodatek	87
A	Macierz sztywności elementu skończonego PIQ4	87
B	Test numeryczny powłokowo-przestrzennego elementu skończonego	94
	Bibliografia	98
	Summary in English	104

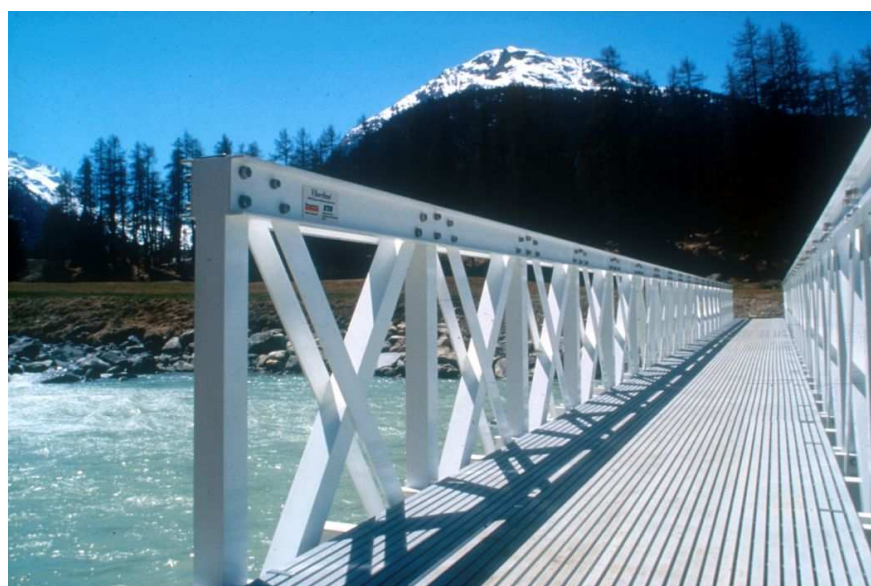
1 Wstęp

Kompozyty - materiały zbrojone, w których geometria rozkładu, kształt i wielkość składnika tworzącego strukturę w osnowie decydują o ich ostatecznych, zaprogramowanych właściwościach. [KOPALIŃSKI 1999]

Powyższa definicja materiałów kompozytowych oddaje w pełni ich istotę, jako materiałów, których właściwości możemy zaprogramować na etapie projektowania. Daje to możliwość budowy kompozytów o ściśle określonych właściwościach, na potrzeby konkretnych konstrukcji. Wraz z rozwojem inżynierii materiałowej pojawia się coraz więcej technik umożliwiających wytwarzanie coraz to nowych, często lepszych komponentów tworzących kompozyty oraz samych kompozytów.

Rzeczywistość pozwala też upowszechnić znane, choć do niedawna zarezerwowane tylko dla najbogatszych gałęzi przemysłu (np. przemysł zbrojeniowy czy lotniczy), materiały kompozytowe. I tak udział kompozytów w nowo powstających konstrukcjach jest coraz większy, materiały te coraz częściej wypierają ciężką stal i inne metale z różnych gałęzi przemysłu gdzie ważnym elementem obok wytrzymałości i trwałości jest stosunkowo niska masa konstrukcji. Kompozyty są już powszechne w przemyśle samochodowym, sportowym, czy medycznym (implanty), a coraz częściej projektanci sięgają po lekkie materiały przy projektowaniu konstrukcji budowlanych. Przykładem mogą tu być dwa mosty kompozytowe zaprezentowane na zdjęciach (rys. 1.1 i 1.2), które służą za reklamę na stronach internetowych firm zajmujących się wytwarzaniem lub projektowaniem kompozytowych elementów konstrukcyjnych. Zaletą tego typu mostów jest trwałość, łatwość montażu, duża wytrzymałość w stosunku do masy, ładny i schludny wygląd wtapiający się w otoczenie.

To ciągle upowszechnianie się nowoczesnych materiałów kompozytowych wymusza na badaczach opracowywanie coraz prostszych i bardziej użytecznych narzędzi do projektowania i wytwarzania tych materiałów. Niestety opracowywanie metod niezbędnych przy poprawnym projektowaniu konstrukcji kompozytowych nie jest łatwym zadaniem, a związane jest to przede wszystkim z właściwościami materiału kompozytowego. Cechami charakterystycznymi kompozytów jest niejednorodność i właściwości anizotropowe. Rodzaj tych właściwości zależy od rodzaju zastosowa-



Rysunek 1.1: Most Pontresina, Szwajcaria(1997) - źródło: <http://www.fiberline.com>



Rysunek 1.2: Most Schwerin-Neumühle (2003) - źródło: <http://en.structurae.de>

nego zbrojenia (proszki, włókna cięte, ciągłe, maty), a także od udziału frakcji wzmacniającej w objętości kompozytu i zależności pomiędzy właściwościami mechanicznymi tej frakcji, a osnowy. Dodatkowo dochodzą różnego rodzaju niedokładności w połączeniu komponentów wynikające z błędów technologicznych.

Kompozyty włókniste, które są tematem rozprawy charakteryzują się tym, że włókna przejmują podstawowe naprężenia i zapewniają sztywność i wytrzymałość konstrukcji. Osnowa stanowi spoiwo dla włókien, a jednocześnie umożliwia pełne wykorzystanie ich wytrzymałości i nadaje kształt elementowi konstrukcyjnemu. Przykładem konstrukcji wykonanej z ciągłych włókien i matrycy może być płyta, w której włókna ułożone są warstwami, a ich orientacja jest zależna od obciążenia jakie ta płyta będzie musiała przenosić w czasie użytkowania. Oczywiście problem polega na przewidzeniu jakie ułożenie włókien będzie najbardziej korzystne dla wytrzymałości konstrukcji. Włóknokompozyt ze względu na swoją skomplikowaną strukturę charakteryzuje się również skomplikowanym procesem powstawania i rozwoju uszkodzeń w trakcie użytkowania, co nie zawsze związane jest z utratą nośności (zwłaszcza w początkowej fazie), ale niewątpliwie osłabia element konstrukcyjny zmniejszając jego możliwości wytrzymałościowe. Problemy kształtowania właściwości kompozytu, a także powstawanie i rozwój uszkodzeń w mechanicznym ujęciu są rozważane w następnych częściach niniejszej pracy.

2 Przegląd literatury

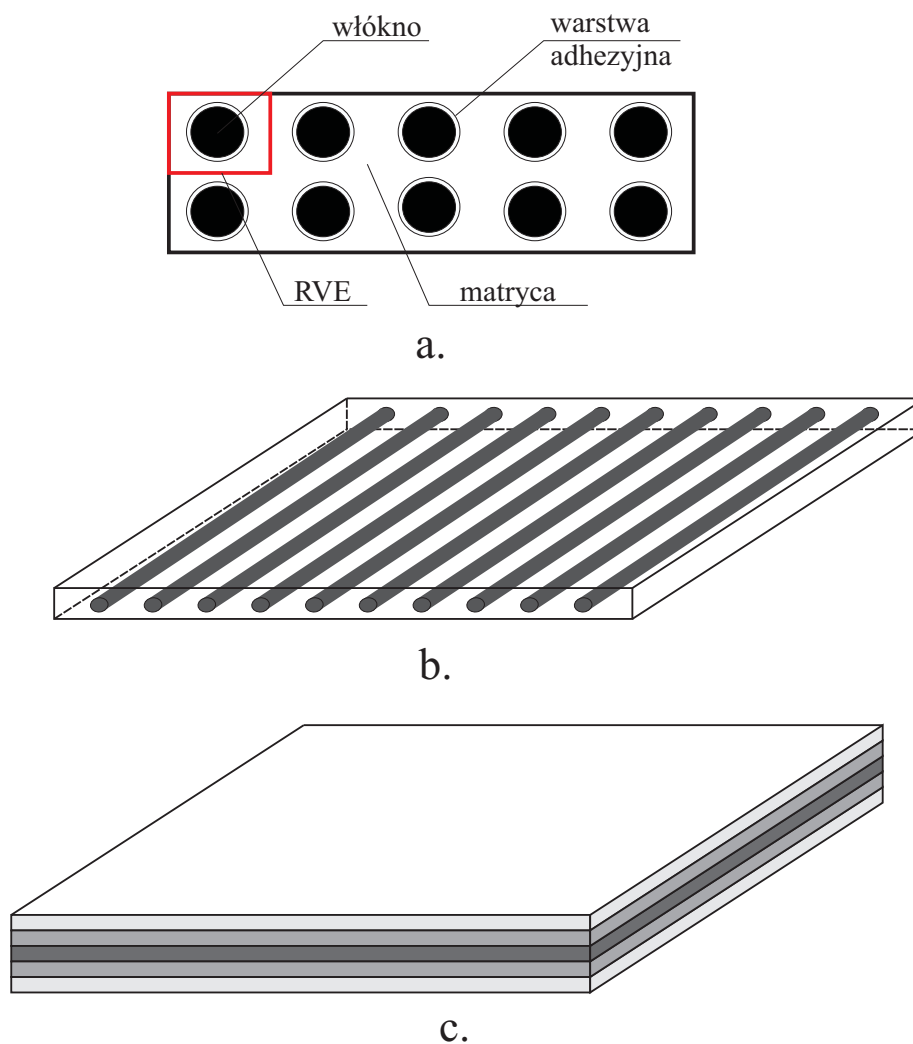
Literatura związana z kompozytami jest bardzo bogata i porusza wiele aspektów poczynając od technologii wytwarzania i badań doświadczalnych nad właściwościami materiałów składowych i kompozytu, a kończąc na skomplikowanych nieliniowych modelach matematycznych i numerycznych służących do możliwie wiernego opisu rzeczywistego zachowania się kompozytu w stanie niszczenia pod wpływem czynników zewnętrznych (obciążenie, temperatura). Pierwsze prace na temat kompozytów pojawiły się w latach czterdziesty i pięćdziesiątych ubiegłego stulecia. Prawdziwy rozwój teorii modelowania i badań kompozytów datuje się jednak na następne dziesięciolecie XX wieku. Stworzono wiele systemów obliczeniowych służących do modelowania kompozytów, które jednak nie są uniwersalne ze względu na różnorodność kompozytów i ich właściwości anizotropowe.

2.1 Kompozyt jako materiał

Jak już wspomniałem we wstępie kompozyt jest to nowy materiał powstały na skutek połączenia dwóch lub więcej materiałów składowych. Możemy wyróżnić kilka struktur wzmocnienia: włókna ciągłe, maty, tkaniny, włókna cięte i proszki. Struktura wzmocnienia wpływa głównie na stopień właściwości anizotropowych. Tematem pracy jest kompozyt wzmocniany uporządkowanymi włóknami ciągłymi, nazywany włóknokompozytem. Dalszy podział materiałów kompozytowych jest związany z rodzajem materiałów składowych tj. osnowy i włókien. Osnowa może być: polimerowa, węglowa, metalowa, ceramiczna lub cementowa i najczęściej to ona decyduje obok struktury zbrojenia o klasyfikacji kompozytu. Włókno, które ma decydujący wpływ na właściwości wytrzymałościowe kompozytu może być: szklane, węglowe, grafitowe, organiczne, borowe, ceramiczne lub metalowe. O wytrzymałości kompozytu decyduje, obok wytrzymałości wyżej wymienionych materiałów składowych, wytrzymałość adhezyjna między nimi. Na podstawie tego krótkiego wprowadzenia widzimy, że poznanie kompozytu jako materiału konstrukcyjnego jest skomplikowanym zadaniem i należy je zacząć od zapoznania się z jego strukturą, właściwościami elementów składowych, a także technologią wytwarzania i w tym miejsc należy odnotować obszerną monografię [OCHELSKI 2004], w której autor opisuje powyższe problemy oraz metody badań doświadczalnych. Praca ta ma charakter przeglądowy, można w niej znaleźć szczegółowe badania nad zachowaniem się poszczególnych elementów składowych kompozytu, mechanikę struktury kompozytu wraz z opisem procesu niszczenia pod obciążeniem i wiele innych istotnych aspektów (reologia, zmęczenie, odporność na pękanie). W miejscu tym należy wspomnieć o innych pracach o charakterze przeglądowym np. bardzo interesująca monografia [WILCZYŃSKI 1996], która skupia się głównie na własnościach mechanicznych kompozytów polimerowych, przedstawia ich modele fizyczne i matematyczne, oparte jednak na wielu uproszczeniach, czy podręcznik akademicki [HYLA 1995], który dotyka wielu aspektów ważnych przy projektowaniu konstrukcji kompozytowych z uwzględnieniem zachowania się ich w stanie niszczenia. Dalszą wiedzę o kompozytach możemy czerpać z obszernych opracowań angielskojęzycznych np. [MALLIK 1988, MATTHEWS & RAWLINGS 1999, JONES 1999, CHRISTENSEN 1979], w których możemy znaleźć bardziej szczegółowy opisy wyżej wymienionych problemów wraz z przykładami obliczeniowymi, czy [GÜRDAL et al. 1999], w której autorzy dodatkowo skupiają się na sposobach optymalizacji kompozytu. Te i inne pozycje literaturowe pozwalają zapoznać się badaczowi z ogólnymi problemami na jakie może natrafić zgłębiając wiedzę o kompozytach, jednak żeby dobrze zaprojektować konstrukcję kompozytową i przewidzieć jej zachowanie w trakcie użytkowania, mając do dyspozycji jedynie właściwości fizyczne i mechaniczne elementów składowych zdobyte na drodze doświadczeń laboratoryjnych, często potrzebujemy bardzo skomplikowanych narzędzi matematycznych i numerycznych.

Pierwszym problemem na jaki napotykamy w procesie projektowania jest wyznaczenie właściwości fizycznych i mechanicznych nowopowstałego materiału - kompozytu, niezbędnych do dalszych obliczeń. Właściwości te możemy wyznaczyć podobnie jak dla elementów składowych na drodze empirycznej, ale sposób ten jest pracochłonny i kosztowny, każdy materiał nawet przy niewielkich zmianach struktury, np. zagęszczenie zbrojenia, inny układ zbrojenia czy zmiana rodzaju włókna czy matrycy, musiałby być poddawany szeregowi doświadczeń mających na celu identyfikację właściwości fizycznych kreowanego materiału, czy też jego parametrów wytrzymałościowych. Z pomocą przychodzi nam dział mechaniki, który zajmuje się badaniem mikrostruktury kompozytu i pozwala nam wyznaczyć pożądane przez nas wielkości, noszący nazwę mikromechaniki kompozytów. Dział ten korzysta z różnego rodzaju narzędzi matematycznych i numerycznych, które pozwalają wyznaczyć np. efektywne stałe sprężystości, czy efektywną wytrzymałość nowego materiału kompozytowego. We wcześniej cytowanych monografiach znajdziemy rozdziały poświęcone temu tematowi. Zaczniemy od najprostszej metody jaką jest bez wątpienia „teoria mieszanin” ([MATTHEWS & RAWLINGS 1999, ALTENBACH et al. 2004]), w której zakładamy pełną adhezję pomiędzy powierzchnią tworzącą włókno a osnową i pełną izotropię materiałów składowych. Efektywne stałe sprężystości kompozytu wyznaczamy jako zależność pomiędzy odpowiednimi stałymi sprężystości komponentów biorąc pod uwagę ich procentowy udział w jednostce objętości. Metoda ta jest metodą przybliżoną i często wyniki nią otrzymane są dalekie od rzeczywistości. W literaturze znajdziemy dużo bardziej skomplikowane modele w skali mikro od przedstawionego powyżej, które uwzględniają często bardzo skomplikowane zależności pomiędzy elementami składowymi (mikro rysy, debonding) jak i różne własności materiałów składowych.

Podstawową rolę w większości modeli mikromechanicznych odgrywa reprezentatywny element objętościowy - REO (ang. *Representative Volume Element* – *RVE*), jest to powtarzalna komórka, która oddaje mikrostrukturę kompozytu, a jednocześnie pozwala wyznaczyć jego właściwości makroskopowe. REO w zależności od struktury zbrojenia i innych składowych np. mikro rys może być modelowany jako element dwu- lub trójwymiarowy. Przykłady takich komórek periodycznych znajdziemy w większości wcześniej cytowanych monografii, np. [HYLA 1995], gdzie możemy zapoznać się z ogólną teorią kształtowania REO. Najczęściej analityczne metody obliczeniowe są tu nie wystarczające więc badacze korzystają z metod numerycznych ([WIĘCKOWSKI 1995, WILCZYŃSKI 1996]). W temacie tym należy odnotować również takie prace jak [ABOUDI & BENVENISTE 1981, ABOUDI 1981, ABOUDI 1991], gdzie zapoznamy się z mikromodelowaniem lepkosprężystego zachowania się kompozytów o osnowie polimerowej, szczególnie ostatnie z tych trzech pozycji jest interesująca, ponieważ jest to monografia stanowiąca podsumowanie badań w tym zakresie i jest bogata w liczne przykłady. Należy też wspomnieć o modelu sprężystoplastycznym, który dla konstrukcyjnych elementów kompozytowych rozważają w swojej pracy [MRÓZ & SHAMIEV 1979]. Model sprężystoplastyczny jest szczególnie ważny w przypadku kompozytów metalowych z którym możemy się zapoznać w pracach [HASHIN 1990, DVORAK & BAHEI-ELDIN 1979]. Zbudowanie modelu materiału kompozytowego z uwzględnieniem granicy plastyczności i plastycznego płynięcia dla kompozytu jest znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku materiałów izotropowych i prowadzi do często trudnych do rozwiązania problemów. Na przykład o problemie początkowej powierzchni plastyczności i charakterystycznej utracie wypukłości na jej granicy traktują [KUCZMA & STEIN 1994]. Innym problemem często rozważanym na poziomie mikro jest problem nośności kompozytu włóknistego, żeby osiągnąć ten cel trzeba obok wiedzy na temat elementów składowych kompozytu oszacować także parametry warstwy łączącej, temat ten poruszany jest np. w pracach [ŁODYGOWSKI & OLESZKIEWICZ 1999, OLESZKIEWICZ 2004]. Rysunek 2.1a przedstawia przykład struktury kompozytu wraz z zaznaczoną powtarzalną komórką - REO. Wynikiem obliczeń na poziomie mikro są efektywne wielkości fizyczne czy mechaniczne niezbędne do obliczeń w skali makro, najczęściej są one stałe dla całego materiału czyli



Rysunek 2.1: Struktura warstwowego kompozytu włóknistego: a. mikrostruktura z opisem poszczególnych elementów, b. pojedyncza warstwa ortotropowa zbrojona włóknami ciągłymi jednokierunkowymi, c. przykład kompozytu warstwowego - dla przejrzystości odcienie szarości oznaczają warstwy jednokierunkowo zbrojone w których zbrojenie jest usytuowane pod różnym kątem w stosunku do dowolnego układu odniesienia

nowy materiał kompozytowy jest traktowany jako jednorodny, ale anizotropowy ośrodek ciągły. W kompozytach zbrojonych włóknami ułożonymi jednokierunkowo w sposób regularny, możemy wyróżnić obiekt pośredni, pomiędzy mikrostrukturą a elementem konstrukcyjnym, jakim jest warstwa jednokierunkowo zbrojona zwana także laminą (rys. 2.1b) o właściwościach ortotropowych i to ten element jest najczęściej homogenizowany na poziomie makro a efektywne wielkości materiałowe są ortotropowe. Rysunek 2.1c przedstawia grupę takich warstw ułożonych jedna na drugiej, różniących się między sobą właściwościami mechanicznymi w globalnym układzie odniesienia, często różnice te wynikają tylko z różnego zorientowania włókien w poszczególnych laminach. Taki element konstrukcyjny nazywany często w literaturze strukturą warstwową lub laminatem jest rozważany w pracy.

2.2 Kompozytowy element konstrukcyjny

We wcześniejszym podrozdziale poruszyłem problem modelowania materiału na poziomie mikro, na którym ustalone zostały właściwości makro-jednostki jaką w przypadku kompozytów warstwo-

wych jest pojedyncza warstwa. Elementy struktury jak belki, tarcze, płyty czy powłoki są kształtowane z odpowiednią sekwencją warstw dla osiągnięcia pożądaných sztywności czy wytrzymałości. Przedmiotem pracy są płyty włóknokompozytowe o strukturze warstwowej, które są pewnym szczególnym przypadkiem płyt niejednorodnych poprzecznie. Temat ten ma bardzo szeroką literaturę tworzoną praktycznie na przestrzeni całego XX wieku. Bardzo obszerny przegląd literatury znajdziemy w pracy [WOŹNIAK(RED.) 2001], omówiono tam kilkaset prac poświęconych temu tematowi. Praca ta poświęcona jest mechanice sprężystych dźwigarów powierzchniowych, czyli elementów konstrukcyjnych w których jeden wymiar (grubość), jest znacznie mniejszy od pozostałych dwóch. Jest to monografia o charakterze przeglądowym, bogata w modele matematyczne i przykłady rozwiązań płyt i powłok o różnej grubości. Jeden z jej rozdziałów jest w całości poświęcony płytom kompozytowym, a w ich kontekście modelowaniu warstwy jednokierunkowo zbrojonej i struktury warstwowej. Autor tego rozdziału ograniczył się do klasycznej teorii płyt cienkich tzn. przyjął założenie KIRCHHOFF'A jak w płytach jednorodnych. Oznacza to, że w teorii tej pomijamy odkształcenia postaciowe w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni środkowej, zakładamy płaski stan naprężenia, płyta doznaje małych odkształceń, a przemieszczenia są małe w porównaniu z grubością płyty. Inną bardzo ważną i obszerną pracą traktującą o mechanice płyt kompozytowych warstwowych jest [REDDY 1997]. Monografia ta w całości poświęcona jest płytom poddanym różnym obciążeniom, autor omawia stateczność, drania, zginanie płyt, a także zahacza w swoich rozważaniach o właściwości nieliniowe i stan zniszczenia. Praca podzielona jest na rozdziały z których dowiadujemy się jak modelować płyty warstwowe nie tylko wykorzystując klasyczną teorię płyt cienkich bazującą na wielu uproszczeniach, a także teorię pierwszego rzędu czy autorską teorię - trzeciego rzędu. Przytoczone są pełne rozwiązania analityczne dla powyższych teorii - rozwiązanie NAVIER'A czy LEVY'EGO. Nie brakuje tu również rozwiązań numerycznych, autor prezentuje nam teorię przejścia z analitycznych równań płyty poprzez związki matematyczne do pełnej dyskretyzacji zadań metodą elementów skończonych. W miejscu tym należy odnotować inne prace REDDY'EGO wraz ze współautorami będące dużym wkładem do teorii kompozytowych dźwigarów powierzchniowych np. [REDDY & CHANDRSHEKHARA 1987, BOSE & REDDY 1998a, BOSE & REDDY 1998b]. Ciekawą pracę studyjną dotyczącą płyt, powłok i laminatów napisali [LEWIŃSKI & TELEGA 1999], znajdziemy tu analizę funkcjonalną, nowoczesne równania wariacyjne, metody asymptotyczne i homogenizacji. Publikacje te traktują materiał, z którego wykonany jest element strukturalny, jako zhomogenizowany ośrodek jednorodny ortotropowy lub anizotropowy. Inne podejście do problemu zaprezentowano w pracach [ŚWITKA 1992, ŚWITKA 2004], w których autor potraktował rozdzielnie naprężenia w matrycy i siły we włóknach w równaniach równowagi.

Opisując stan wiedzy związany z kompozytowymi elementami struktury nie można pominąć prac poświęconych w całości lub w znacznej mierze metodom numerycznym w mechanice kompozytów. Ze względu na skomplikowaną strukturę wewnętrzną kompozytu, a co za tym idzie jego nieliniową odpowiedź na obciążenie oraz nierzadko skomplikowane warunki brzegowe czy kształt samego elementu konstrukcyjnego, metoda elementów skończonych (MES) jest często jedynym sposobem obliczania tychże konstrukcji. Na początku należy wspomnieć pozycje literaturowe traktujące ogólnie o metodzie elementów skończonych; o technikach numerycznych, dyskretyzacji i elementach skończonych charakterystycznych dla odpowiednich elementów konstrukcyjnych np. [ZIENKIEWICZ 1972, BATHE 1996, ZIENKIEWICZ & TAYLOR 2000]. Kompendium wiedzy o MES w kontekście kompozytów stanowi wspomniana wcześniej praca [REDDY 1997] czy też monografia [OCHOA & REDDY 1992]. Nieliniowy charakter zależności mechanicznych czy fizycznych w kompozytach powoduje spore problemy w matematycznym ich sformułowaniu oraz w zastosowaniu odpowiednich narzędzi numerycznych. Historycznie są stosowane i rozwijane przez naukowców i inżynierów dwa różne podejścia do modelowania płyt i powłok kompozytowych.

Pierwszy sposób bazuje na teorii laminatów tzn. równania sprężystości z trójwymiarowego (3-D) jest zredukowane do dwuwymiarowego (2-D), a nieliniowość geometryczna jest w formie odkształceń VON KARMANA - geometria struktury jest niezmienna (np. [OCHOA & REDDY 1992, CHANG & SAWAMIPHAKDI 1981]). Drugie podejście bazuje na trójwymiarowym sformułowaniu kontinuum, gdzie kinematyczne założenia są wprowadzone do przestrzennej aproksymacji elementami skończonymi. Geometria jest zmieniana i uaktualniana pomiędzy przyrostami obciążenia. Skończone elementy bazujące na tej metodzie nazywamy elementami kontinuum (np. [CRISFIELD 1991, BATHE 1996]). Wielu naukowców poświęca swoje prace zwiększeniu efektywności obliczeniowej co polega głównie na doskonaleniu algorytmów obliczeniowych oraz elementów skończonych. Przykładami takich prac są: [ZIENKIEWICZ et al. 1971, RAMM 1977, BISCHOFF & RAMM 1997, BISCHOFF et al. 1999, ZASTRAU et al. 2000, BAŞAR et al. 2000, SCHLEBUSCH 2005, MATHEAS 2005].

2.3 Kompozyt w stanie uszkodzenia

Bardzo ważnym działem mechaniki kompozytów jest mechanika niszczenia. Kompozyt w związku ze złożoną strukturą ulega także złożonemu procesowi niszczenia, a jednocześnie jest w stanie przenosić obciążenie jeszcze długo po pojawieniu się pierwszych uszkodzeń. W zależności od przeznaczenia konstrukcji i jej obciążenia różny rodzaj i poziom zniszczenia jest w zakresie zainteresowania badaczy [HINTON et al. 2004]. W kontekście rozpatrywanych w pracy problemów i ze względu na złożoność uszkodzeń wyróżniamy uszkodzenia wewnątrz warstwy oraz uszkodzenia pomiędzy warstwami. W pierwszy typie uszkodzeń możemy wyróżnić zarysowanie matrycy, zerwanie włókna czy ścięcie włókna i matrycy. W przypadku warstwowych płyt włóknokompozytowych najczęściej w identyfikacji powstania i rozwoju tego typu zniszczeń stosuje się makromodele bazujące na kryteriach wytrzymałości pojedynczej warstwy kompozytu ortotropowego [TSAI & WU 1971, HASHIN 1980, DATOO 1991, CHANG & LESSARD 1991, KAM & JAN 1995, PUCK & SCHUERMAN 1998]. Kryteria te wynikają z badań doświadczanych [BENZEGGAGH et al. 1995] a ich zadaniem jest możliwie dokładne odzwierciedlenie skomplikowanego mechanizmu niszczenia w tym niejednorodnym materiale [HINTON et al. 2004].

Następnie wykorzystując kryteria wytrzymałości dla warstwy można rozbudować tę teorię na cały kompozyt warstwowy, polega to na przedefiniowywaniu właściwości materiałowych uszkodzonych warstw, a co za tym idzie całej struktury [DATOO 1991, GANAPATHY et al. 1995, PADHI et al. 1998, SCIUVA et al. 1998]. Modyfikacja materiału może odbywać się na kilka sposobów np. można wyłączać ze współdziałania w strukturze warstwowej całą uszkodzoną warstwę lub wykluczać tę warstwę jedynie częściowo poprzez redukcję odpowiednich stałych materiałowych [REDDY 1997, GERMAN 1996]. W całym tym procesie najważniejsze jest oszacowanie miejsca i siły krytycznej przy której powstanie pierwsze uszkodzenie w kompozycie (ang. *first ply failure*) a następnie przewidzenie kolejnych uszkodzeń aż do uszkodzenia ostatniej warstwy (ang. *last ply failure*).

Bardziej płynna modyfikacja właściwości materiału wraz z powstaniem uszkodzenia aż do całkowitego zniszczenia jest przedmiotem działu mechaniki zatytułowanego mechanika kontinuum uszkodzeń (ang. *continuum damage mechanics (CDM)*) [LEMAITRE 1996, LEMAITRE & DESMORAT 2005]. Podejście to polega na wprowadzeniu pewnego parametru nazywanego parametrem niszczenia, który zależy od odkształcenia lub naprężenia i przyjmuje wartości od zera dla materiału bez uszkodzeń do jednego dla materiału całkowicie zniszczonego. W odniesieniu do makromodelowania struktur kompozytowych należy zdefiniować odrębne parametry niszczenia dla różnych form uszkodzeń [LADEVEZE 1992, MAIRE & CHABOCHE 1997], które modyfikują sztywności odpowiadające tym formom.

Innym rodzajem zniszczenia jest uszkodzenie na styku warstw nazywane w przypadku kon-

strukcji kompozytowych delaminacją. Jest to bardzo niebezpieczne dla konstrukcji zjawisko, a jednocześnie powszechne - powstaje w wyniku różnych czynników zewnętrznych jak obciążenie statyczne, dynamiczne, czy działanie temperatury. Badaniu przyczyn powstawania, a także rozwojowi delaminacji poświęcone jest wiele prac np. [BOLOTIN 2001, IMIELIŃSKA 2005]. Jednak głównym zadaniem stojącym przed nauką jest budowa możliwie uniwersalnego modelu matematycznego i numerycznego umożliwiającego modelowanie powstawania i rozwoju tego zjawiska. Wiele prac jest poświęconych modelowaniu delaminacji, poczynając od rozwiązań analitycznych bazujących na dużych uproszczeniach [BOLOTIN 1966], a kończąc na zaawansowanych modelach numerycznych uwzględniających złożony mechanizm powstawania delaminacji. Pisząc o numerycznym modelowaniu delaminacji należy uwzględnić dwa podejścia jedno bazujące na założeniach mechaniki pękania (ang. *fracture mechanics*), a drugie mechaniki kontinuum niszczenia. Narzędzia mechaniki pękania można użyć do modelowania rozwoju delaminacji, jednym z takich narzędzi jest technika wirtualnego zamykania rys (ang. *virtual crack closure technique (VCCT)*) zaproponowana w pracy [RYBICKI & KANNINEN 1977]. Podejście to jak i inne bazujące na mechanice pękania (wirtualne wydłużanie rysy, J-integral) wymaga istnienia rysy i jest w stanie jedynie modelować jej rozwój [TURON et al. 2004]. Innym podejściem do symulacji numerycznej procesu delaminacji jest bazująca na założeniach mechaniki uszkodzeń metoda strefy kohezynnej [DAUDEVILLE et al. 1995, CORIGLIANO & ALLIX 2000].

Strefa kohezynna składa się ze skończonych elementów kohezynnych, które mogą być trój- [PRADHAN & TAY 1998, TURON et al. 2004, BRUNO et al. 2005] lub dwuwymiarowe [CHEN et al. 1999, ALFANO & CRISFIELD 2001] w zależności od typu zadania. Równania konstytutywne dla tej strefy uwzględniają ewolucję uszkodzenia, a do przewidzenia inicjacji delaminacji wykorzystywane są kryteria wytrzymałościowe [HASHIN 1980, PUCK & SCHUERMAN 1998]. Forma równań konstytutywnych zależy przede wszystkim od rodzaju połączenia jakie mają modelować elementy kohezynne [CAMANHO et al. 2001], dla połączeń kruchych lub quasi-kruchych zachowanie materiału do osiągnięcia wartości granicznej (wytrzymałości) przez naprężenia jest liniowo sprężyste, a słabnięcie materiału jest najczęściej modelowane jako funkcja liniowa (np. [WAGNER et al. 2001]) lub wykładnicza (np. [GOYAL et al. 2004b]) zależna od odkształcenia. Jak wcześniej wspomniałem delaminacja może powstawać w wyniku wielu czynników zewnętrznych i w różnych elementach konstrukcyjnych. Prowadzi to do powstawania wielu modeli numerycznych bazujących na elementach kohezynnych, a dostosowywanych do typu problemu, zagadnieniom tym poświęcony jest szereg prac [PRADHAN & TAY 1998, BUI et al. 2000, ZOU et al. 2002, CAMANHO et al. 2002, REMMERS & DE BORST 2002, REMMERS & DE BORST 2003, CORNEC et al. 2003, ZOU et al. 2003, GOYAL et al. 2004a, MEO & THIEULOT 2005, ALFANO & SACCO, ALLIX & BLANCHARD 2006]. Do weryfikacji wyników z badań teoretycznych, a także do wyznaczenia granicznych wielkości jak wytrzymałość czy krytyczna energia pękania niezbędne są eksperymenty laboratoryjne np. [BENZEGGAGH & KENANE 1996, PEREIRA & DE MORAIS 2006].

Podsumowując tę część pracy poświęconą obecnemu stanowi wiedzy należy zauważyć, że tylko niewielka część bogatej literatury światowej z zakresu mechaniki kompozytów włóknistych została tutaj zaprezentowana. Niemniej jednak temat ten jest wciąż otwarty na nowe idee badaczy, a związane to jest w głównej mierze ze skomplikowaną strukturą wewnętrzną kompozytów i co się z tym wiąże z trudnym do przewidzenia i opisu mechanizmem niszczenia przy jednocześnie dość długiej „żywności” pomimo uszkodzeń. Cele i tezy niniejszej pracy są przedstawione w następnym rozdziale.

3 Cel i zakres pracy

Dla pewnych obciążeń w konstrukcjach kompozytowych może dojść do różnych form uszkodzenia. Są to zmiany nieodwracalne i prowadzą do osłabienia wytrzymałości kompozytu. Niezwykle ważne jest poprawne przewidzenie miejsca powstawania uszkodzenia i jego wpływu na zdolność dalszego przenoszenia obciążeń przez konstrukcje. Ważnym aspektem jest również rozwój uszkodzenia na skutek dalszego obciążania, aż do całkowitej utraty nośności przez element konstrukcyjny.

Celami stawianymi sobie w pracy jest detekcja i opisy rozwoju podstawowych uszkodzeń we włóknokompozytowym elemencie konstrukcyjnym na przykładzie płyt. Wiąże się to z nieliniową analizą płyt, a szczególnie z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej przy dużych przemieszczeniach, z którymi mamy do czynienia w przypadku rozważanych konstrukcji kompozytowych. Dodatkowym celem, będącym niejako wstępem do modelowania kompozytów jest ocena wpływu ułożenia zbrojenia, w postaci włókien ciągłych, w płycie kompozytowej na jej sztywność z wykorzystaniem różnych modeli matematycznych. Analiza ta odbywa się w zakresie sprężystym. Analizy procesu inicjacji i propagacji zniszczenia odbywają się krok po kroku, co jest uwzględnione w zastosowanych i opisanych algorytmach numerycznych. Do aproksymacji matematycznych modeli użytych do analizowanych problemów, a konkretnie ich sformułowań wariacyjnych zastosowano metodę elementów skończonych. Przy aproksymacji skomplikowanych problemów lokalnych jakimi są niewątpliwie uszkodzenia struktury, ważnym elementem jest zastosowanie takich metod numerycznych i elementów skończonych, które przy stosunkowo niewielkim czasie obliczeniowym dadzą nam wyniki pozwalające ocenić wytrzymałość i trwałość konstrukcji w stopniu zadowalającym dla projektanta. Dlatego też dodatkowym celem było opracowanie elementów skończonych odzwierciedlających możliwie dobrze cechy rzeczywistej konstrukcji z uwzględnieniem trójwymiarowego stanu naprężenia, a jednocześnie pozwalających obniżyć gęstość siatki elementów dyskretyzujących konstrukcję bez zaburzeń wynikających z numerycznych efektów blokady.

Pracę podzielono na sześć części. Pierwsze trzy traktują ogólnie o temacie płyt włóknokompozytowych tzn. zawierają wstęp, przegląd literatury światowej z zakresu badanego tematu oraz formułują cele stawiane sobie przez autora. Rozdział czwarty poświęcony jest analizie płyt włóknokompozytowych w zakresie sprężystym, ocenie wpływu ułożenia zbrojenia na sztywność płyty, porównaniu dwóch modeli do wyznaczenia efektywnej sztywności płyty. Rozdział ten zwiera również niezbędne sformułowania pozwalające na przejście z klasycznych równań różniczkowych płyty anizotropowej do rozwiązań numerycznych. W końcowej części zaprezentowane są trzy przykłady prezentujące wyniki i wnioski z analiz. Rozdział piąty jest to analiza uszkodzeń w płytach kompozytowych i zawiera, obok kryteriów niezbędnych do detekcji uszkodzeń, opis metod pozwalających przewidywać rozwój uszkodzeń. Dodatkowo w części tej jest sformułowany element skończony bazujący na mechanice kontinuum, który pozwala w wydajny sposób modelować konstrukcje kompozytowe. Zaprezentowane są również, niezbędne do poprawnej definicji tego elementu skończonego, zależności mechaniki kontinuum i sformułowania wariacyjne. W końcowej części rozdziału przedstawione są wyniki analiz numerycznych dla kilku przykładów struktur kompozytowych wraz z porównaniem do wyników eksperymentalnych dostępnych w literaturze, dla poparcia stosowalności proponowanych modeli. Ostatnia część to wnioski i plany dalszych prac badawczych w zakresie prezentowanego tematu. Opis symboli podany jest w miejscach pierwszego ich użycia, a w niektórych przypadkach jest powtórzony w innych miejscach. Praca zawiera dwa dodatki. W dodatku A są zaprezentowane elementy macierzy sztywności dla płytowego elementu skończonego rozważanego w rozdziale czwartym, a w dodatku B znajduje się test numeryczny elementu skończonego zdefiniowanego w rozdziale piątym.

4 Płyty włóknokompozytowe w zakresie liniowym

W rozdziale rozważa się problem brzegowy zginania płyt włóknokompozytowych w zakresie liniowo-sprężystym. Przyjęto założenia KIRCHHOFF'A dla płyt cienkich jednorodnych, zgodnie z nimi przemieszczenia dowolnego punktu w płycie są wyrażone przez przemieszczenia powierzchni środkowej płyty. Właściwości sprężyste nowo-powstałego kompozytu zależą od właściwości materiałowych jego składowych. W rozdziale tym obliczenie efektywnych stałych sprężystości realizowane jest dwutorowo tj. z użyciem standardowej teorii laminowania, każda z warstw traktowana jest jako ortotropowa, a następnie za pomocą ogólnie znanych procedur wyznaczana jest sztywność włóknokompozytu. Drugą metodą rozważaną w rozdziale a prowadzącą do tego samego celu czyli wyznaczenia sztywności płyty włóknokompozytowej jest metoda zaproponowana w pracach [ŚWITKA 1992, ŚWITKA 2004], a w niniejszej pracy adoptowana i użyta w modelowaniu metodą elementów skończonych. Pierwszym celem tego rozdziału jest porównanie dwóch wyżej wymienionych metod bazujących na inny podejściach do jednego zagadnienia. Porównanie jest realizowane na konkretnych przykładach zginanych płyt włóknokompozytowych. Drugim celem jest określenie i przedstawienie na przykładach wpływu orientacji włókien w poszczególnych warstwach na wielkości statyczne w rozważanych płytach. Wyniki numeryczne przedstawione w ostatniej części tego rozdziału są realizowane z wykorzystaniem własnego programu napisanego w języku programowania FORTRAN oraz z wykorzystaniem systemu obliczeniowego ABAQUS®. Część wyników prezentowanych w tym rozdziale została opublikowanych w pracach współautorów [ŚWITKA et al. 2002, KUCZMA & KULA 2003a, KUCZMA & KULA 2003b].

4.1 Opis przyjętych sposobów modelowania kompozytu

4.1.1 Równanie konstytutywne

Ponieważ niniejszy rozdział ogranicza się jedynie do liniowo- sprężystego zachowania się płyt włóknokompozytowych, zakładanym prawem konstytutywnym jest uogólnione prawo HOOKE'A. Zanim jednak zostaną zaprezentowane zależności pomiędzy odkształceniem a naprężeniem, zapiszmy związek między odkształceniem a przemieszczeniem:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.1)$$

Zależność ta wynika z redukcji tensor GREENA-LAGRANGE'A do tensora małych odkształceń poprzez pominięcie członów nieliniowych jako nieznaczących. Zanika również w tym równaniu różnica pomiędzy $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$. Poszczególne komponenty tensora odkształceń są dane:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right). \quad (4.2)$$

W rozdziale następnym zaprezentowana jest szczegółowo kinematyka dla rozważanego ośrodka ciągłego, a zależność odkształcenie - przemieszczenie tam zaprezentowana uwzględnia nieliniowość geometryczną w strukturach kompozytowych. Również w rozdziale następnym, który poświęcony jest modelowaniu struktur włóknokompozytowych z uwzględnieniem niszczenia, więcej miejsca jest poświęcone na definicję uogólnionego prawa konstytutywnego HOOKE'A, oraz definicji i transformacji macierzy współczynników materiałowych. W tym miejscu jedynie przyto-

część równanie konstytutywne pomiędzy tensorem małych odkształceń a tensorem naprężeń CAUCHY'EGO ([REDDY 1997]):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (4.3)$$

które w postaci macierzowej możemy zapisać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1113} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3313} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1213} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2313} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1323} & C_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Symetria macierzy sprężystości \mathbf{C} wynika z symetrii tensorów odkształceń i naprężeń, nieco więcej słów o szczegółach symetrii znajduje się w podrozdziale 5.3.2. W przypadku materiału anizotropowego niezależnych współczynników macierzy sprężystości jest 21, a dla warstwy ortotropowej z jaką mamy do czynienia w przypadku uwarstwienia struktury kompozytowej składowych tych jest jedynie 9. Macierz sprężystości dla materiału ortotropowego ma postać ([REDDY 1997]):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Relację naprężenie odkształcenie odwrotną do (4.7), możemy określić następująco:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}, \quad (4.7)$$

gdzie macierz \mathbf{S} jest macierzą podatności, a jej współczynniki S_{ij} dla materiału ortotropowego możemy wyrazić poprzez parametry materiałowe ([WOŹNIAK(RED.) 2001]:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

gdzie;

E_1, E_2, E_3 są to moduły YOUNG'A, odpowiednio w kierunku osi x_1, x_2 i x_3 , ν_{ij} (dla $i, j = 1, 2, 3$) są to liczby POISSON'A dla odkształceń w kierunku osi x_j , kiedy naprężenie działa w kierunku x_i , a G_{12}, G_{23}, G_{13} - moduły odkształcenia postaciowego odpowiednio w płaszczyznach x_1x_2, x_2x_3 i x_1x_3 . W funkcji tych samych stałych materiałowych w podrozdziale 5.3.2 jest zaprezentowana macierz sprężystości \mathbf{C} (5.41) wraz z macierzą transformacji (5.45). Dla płaskiego stanu naprężenia w jakim najczęściej rozpatrujemy ortotropową warstwę kompozytu zbrojonego włóknami ciągłymi związki odkształcenie-naprężenie redukują się, co jest przedstawione w podrozdziale 4.1.4 traktującym o modelu warstwowym.

4.1.2 Równanie różniczkowe płyty

Zgodnie ze wstępnymi założeniami, że rozważana płyta włóknokompozytowa jest cienka i możemy w stosunku do niej stosować klasyczną teorię płyt cienkich, a w szczególności hipotezę KIRCHOFFA -LOVE'A, do opisu deformacji płyty wystarczający jest opis deformacji jej płaszczyzny środkowej. Ponieważ w obrębie zainteresowania jest jedynie zginanie płyty bez obciążeń działających w jej płaszczyźnie, równanie różniczkowe płyty anizotropowej możemy zapisać w postaci:

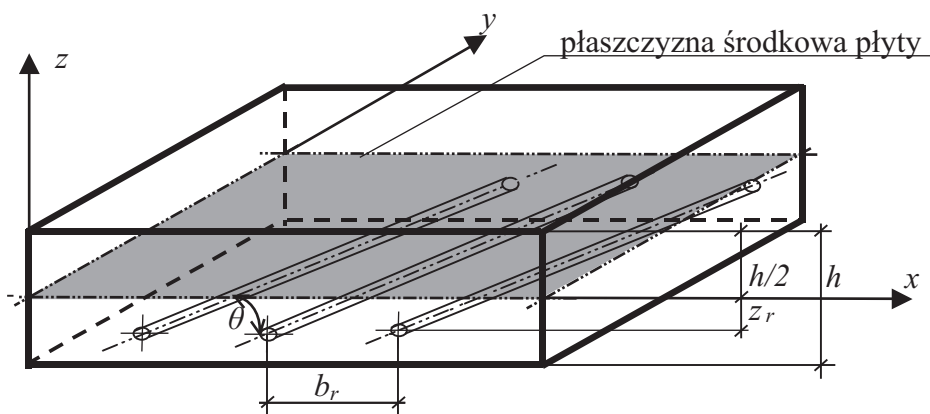
$$D_{1111} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2D_{1122} + 4D_{1212}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{2222} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4D_{1112} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{2212} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} = p \quad (4.9)$$

gdzie $w = w(x, y)$ jest przemieszczeniem środkowej powierzchni płyty $\Omega \subset R^2$, $p = p(x, y)$ jest obciążeniem płyty prostopadłym do powierzchni, stałe D_{ijkl} reprezentują sztywności płyty związane odpowiednio ze zginaniem i skręcaniem i można je zapisać w postaci macierzy:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Macierz ta jest macierzą symetryczną. Problem polega na efektywnym wyznaczeniu stałych D_{ijkl} i rozwiązaniu równania różniczkowego płyty. W pracy przedstawiam dwa sposoby efektywnego wyznaczenia elementów macierzy \mathbf{D} . Oba modele traktują kompozyt włóknisty składający się z dwóch materiałów o różnych stałych fizycznych jako ośrodek jednorodny anizotropowy (zhomogenizowany). Główne założenia obu modeli są takie same i zakładają, że włóknokompozyt jest ciągłym ośrodkiem powstałym z połączenia dwóch materiałów o właściwościach liniowo-sprężystych a połączenie między nimi charakteryzuje się pełną adhezją. Pierwszy model, który dalej będzie nazywany modelem ŚWITKI ([ŚWITKA 1992, ŚWITKA 2004]) traktuje płytę jako całość ze ściśle uporządkowanymi zatopionymi w matrycę rodzinami włókien. Drugi model to model warstwowy, bardzo powszechny (np. [REDDY 1997, MATTHEWS & RAWLINGS 1999]), traktuje płytę jako zespół warstw ortotropowych w układzie materialnym ułożonych kolejno jedna na drugiej pod dowolnym kątem układu materialnego warstwy względem układu globalnego płyty.

4.1.3 Model ŚWITKI



Rysunek 4.1: Płyta włóknokompozytowa z jedną rodziną włókien

Na rysunku 4.1 przedstawiony jest przekrój poprzeczny przez analizowaną płytę włóknokompozytową. Dla przejrzystości zaznaczona jest tylko jedna r -ta rodzina włókien. W płycie może znajdować się dowolna liczba rodzin włókien, istotne jest żeby włókna danej r -tej rodziny były ułożone w ściśle uporządkowany sposób, tj. odległość pomiędzy poszczególnymi włóknami oraz odległość środka ciężkości przekroju każdego włókna od powierzchni środkowej płyty musi być taka sama. Każde włókno należące do jednej rodziny musi mieć te same charakterystyki fizyczne i geometryczne. W modelu tym postać równania różniczkowego płyty włóknokompozytowej otrzymano bezpośrednio z równań równowagi:

$$D\nabla^4 w + \left[\sum_r \frac{E_{(r)}A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)}^2 s_{(r)i} s_{(r)j} s_{(r)k} s_{(r)l} \right] w_{,ijkl} + \\ - \left[\sum_r \frac{E_{(r)}A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} s_{(r)i} s_{(r)j} s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} s_{(s)k} s_{(s)l} \right] w_{,ijkl} = p. \quad (4.11)$$

W równaniu tym wyraźnie widać rozdzielne potraktowanie matrycy i włókien, a konkretnie stanu naprężeń w nich występującego. Podstawą tej koncepcji było potraktowanie włóknokompozytu jako ośrodka dwu fazowego, gdzie I fazę stanowi osnowa, a fazą II są ściśle uporządkowane włókna zatopione w osnowie. W prezentowanym modelu nie uwzględniono ubytku materiału osnowy na skutek wypełnienia jej przez fazę włóknistą. Założenie to ma też odzwierciedlenie w prezentowanym równaniu, a konkretnie w równaniach równowagi które prowadzą do jego powstania, ponieważ naprężenia powstałe w matrycy są całkowane po całym przekroju płyty, a nie jedynie po tym zajęty przez matrycę. W pracy [ŚWITKA 2004] autor unika tego uproszczenia poprzez odjęcie odpowiedniej składowej naprężeń w matrycy na kierunku zgodnym z kierunkiem ułożenia włókien. Brak tego uaktualnienia w niniejszej pracy prowadzi do powstawania przeszywnienia płyty, jednak jego wpływ na wyniki może być pominięty w przypadku rozpatrywanych w pracy przykładów ponieważ udział zbrojenia nie stanowi znaczącej części przekroju (rysunek 4.7), a sztywność matrycy jest znacznie mniejsza niż sztywność włókna. Porównując powyższe równanie różniczkowe płyty włóknistej wyprowadzone w pracy [ŚWITKA 1992] (4.11) z równaniem różniczkowym płyty anizotropowej (4.9) otrzymujemy sztywności D_{ijkl} z wykorzystaniem opisywanego modelu, które będą użyteczne do obliczeń metodą elementów skończonych. Sztywności te możemy zapisać następującymi zależnościami matematycznymi:

$$D_{1111} = D + \sum_r \frac{E_{(r)}A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)}^2 (s_{(r)1})^4 + \\ - \sum_r \frac{E_{(r)}A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} (s_{(r)1})^2 s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} (s_{(s)1})^2, \quad (4.12)$$

$$D_{2222} = D + \sum_r \frac{E_{(r)}A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)}^2 (s_{(r)2})^4 + \\ - \sum_r \frac{E_{(r)}A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} (s_{(r)2})^2 s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} (s_{(s)2})^2, \quad (4.13)$$

$$D_{1122} = \nu_m D + \sum_r \frac{E_{(r)}A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)}^2 (s_{(r)1})^2 (s_{(r)2})^2 +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} (s_{(r)1})^2 s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} (s_{(s)2})^2 + \\
& -\frac{1}{4} \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} (s_{(r)2})^2 s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} (s_{(s)1})^2,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
D_{1212} &= \frac{(1 - \nu_m) D}{2} + \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)}^2 (s_{(r)1})^2 (s_{(r)2})^2 + \\
& -\frac{1}{4} \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} s_{(r)1} s_{(r)2} s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} s_{(s)1} s_{(s)2},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
D_{2212} &= \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)}^2 s_{(r)1} (s_{(r)2})^3 + \\
& -\frac{1}{4} \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} (s_{(r)2})^2 s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} s_{(s)1} s_{(s)2} + \\
& -\frac{1}{4} \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} s_{(r)2} s_{(r)1} s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} (s_{(s)2})^2,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
D_{1112} &= \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)}^2 (s_{(r)1})^3 s_{(r)2} + \\
& -\frac{1}{4} \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} (s_{(r)1})^2 s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} s_{(s)1} s_{(s)2} + \\
& -\frac{1}{4} \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} z_{(r)} s_{(r)1} s_{(r)2} s_{(r)p} s_{(r)q} \sum_s c_{(s)pq} z_{(s)} (s_{(s)1})^2,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

gdzie D jest sztywnością płyty izotropowej wykonanej z materiału matrycy i wyraża się następującą zależnością:

$$D = \frac{E_m h^3}{12(1 - \nu_m^2)}, \tag{4.18}$$

a pozostałe wielkości związane są z geometrią i materiałem włókien. W celu uzupełnienia powyższych zależności należy zdefiniować i nazwać wszystkie występujące w nich zmienne.

$$\begin{bmatrix} c_{(r)11} \\ c_{(r)12} \\ c_{(r)22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{(r)1} s_{(r)1} \\ 2s_{(r)1} s_{(r)2} \\ s_{(r)2} s_{(r)2} \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

gdzie \mathbf{k} jest macierzą symetryczną, a jej współczynniki mają postać:

$$k_{11} = \frac{E_m h}{1 - \nu_m^2} + \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} (s_{(r)1})^4, \tag{4.20}$$

$$k_{12} = 2 \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} (s_{(r)1})^3 s_{(r)2}, \quad (4.21)$$

$$k_{13} = \frac{E_m h \nu_m}{1 - \nu_m^2} + \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} (s_{(r)1})^2 (s_{(r)2})^2, \quad (4.22)$$

$$k_{22} = 2 \left[\frac{E_m h}{1 - \nu_m^2} + 2 \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} (s_{(r)1})^2 (s_{(r)2})^2 \right], \quad (4.23)$$

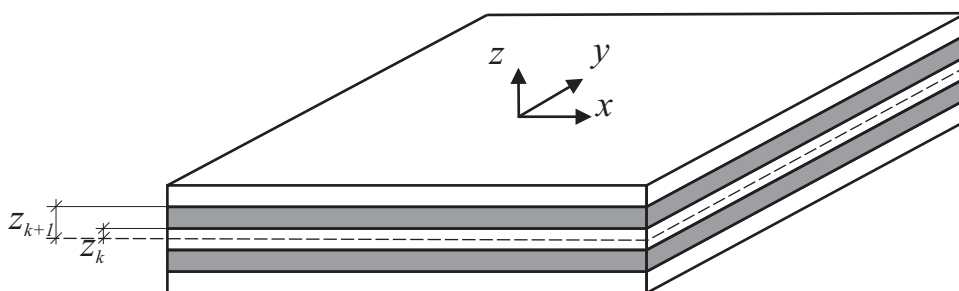
$$k_{23} = 2 \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} s_{(r)1} (s_{(r)2})^3, \quad (4.24)$$

$$k_{33} = \frac{E_m h}{1 - \nu_m^2} + \sum_r \frac{E_{(r)} A_{(r)}}{b_{(r)}} (s_{(r)2})^4. \quad (4.25)$$

We wszystkich powyższych wzorach użyte symbole opisują następujące wielkości; E_m –moduł sprężystości YOUNG’A matrycy, $E_{(r)}$ –moduł sprężystości YOUNG’A matrycy r -tej rodziny włókien, ν_m –współczynnik POISSON’A matrycy, h –grubość płyty, $A_{(r)}$ –pole powierzchni przekroju poprzecznego pojedynczego włókna z r -tej rodziny, $b_{(r)}$ –odległość pomiędzy pojedynczymi włóknami w r -tej rodzinie, $z_{(r)}$ –odległość osi włókien r -tej rodziny do środkowej powierzchni płyty, $s_{(r)1}$ –cosinus kąta zawartego między osią włókna r -tej rodziny a osią x w globalnym układzie współrzędnych, $s_{(r)2}$ –cosinus kąta zawartego między osią włókna r -tej rodziny a osią y w globalnym układzie współrzędnych.

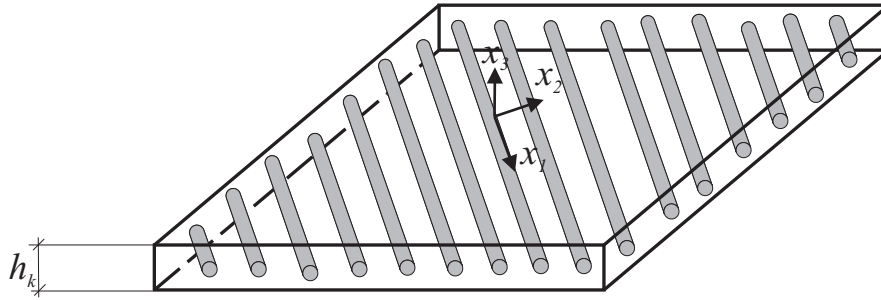
4.1.4 Model warstwowy

Stosując klasyczną teorię płyt warstwowych należy na wstępie wspomnieć o kilku ważnych założeniach, które są niezbędne w tym modelu. Zakładamy, że połączenie między laminami w strukturze warstwowej (płyce) jest doskonałe i nieskończenie cienkie - nie podlega deformacjom poprzecznym. W poprzek styku warstw istnieje ciągłość przemieszczeń, nie może dojść do poślizgu między warstwami. Charakterystyczny przekrój poprzeczny analizowanych płyt uwarstwionych pokazano na rysunku 4.2, gdzie dla przejrzystości zaznaczono tylko dwie warstwy, symetryczne względem płaszczyzny środkowej płyty. Położenie typowej warstwy k -tej, ($k = 1, \dots, N$) i jej grubość h_k określają dwie sąsiednie rzędne z_k i z_{k+1} . Zakłada się, że każda z warstw jest, z uwagi na zbrojenie włóknami, ośrodkiem ortotropowym. Wyróżnia się dwa układy odniesienia. Układ globalny xyz , jest układem współrzędnych w którym rozwiązywany jest postawiony problem brzegowy zginania płyty, natomiast każda z warstw ma swój własny układ materialnych osi głównych $x_1 x_2 x_3$, przy czym osie x_3 i z pokrywają się.



Rysunek 4.2: Płyta warstwowa

Układ osi materialnych stanowi jednocześnie układ osi ortotropii przy czym oś x_1 jest zgodna z kierunkiem ułożenia włókien w warstwie co obrazuje rysunek 4.3.



Rysunek 4.3: Typowa warstwa k -ta, $k = 1, \dots, N$

Związek konstytutywny dla k -tej warstwy włókno-kompozytu ortotropowego (4.7) w układzie osi materialnych $x_1x_2x_3$ dla płaskiego stanu naprężenia ($\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 0$) można zapisać następująco:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}^{(k)}. \quad (4.27)$$

We wzorze (4.30) zastosowano uproszczony zapis macierzowy relacji tensorowych, grupując składowe tensora naprężenia σ_{ij} i tensora odkształcenia ε_{ij} w wektory, a składowe tensora sprężystości w macierz \mathbf{C} , co wyjaśnia związek macierzowy (4.27). Elementy macierzy sprężystości \mathbf{C} dla warstwy włókno-kompozytu ortotropowego można obliczyć wg zależności:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & C_{1122} &= C_{2211} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ C_{2222} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & C_{1212} &= 2G_{12}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Określenie modułów sprężystości w kierunku osi materialnych w warstwie jednokierunkowo zbrojonej włóknami ciągłymi w najprostszej inżynierskiej formie bazuje na spostrzeżeniu, że odkształcenie w kierunku włókien jest takie same we włóknie i w osnowie. Szczegółowe wyprowadzenia dla wielkości materiałowych warstwy, bazujące na tym założeniu zwykle spotykanym w teorii belek, płyt i powłok, znajduje się np w pracy [WOŹNIAK(RED.) 2001]. Wyprowadzone tam stałe materiałowe warstwy możemy zapisać w funkcji odpowiednich stałych materiałowych poszczególnych komponentów:

$$\begin{aligned} E_1 &= c_r E_r + c_m E_m, & E_2 &= \frac{E_r E_m}{c_r E_r + c_m E_m}, \\ \nu_{12} &= c_r \nu_r + c_m \nu_m, & G_{12} &= \frac{G_r G_m}{c_r G_r + c_m G_m}, \end{aligned}$$

$$G_r = \frac{E_r}{2(1 + \nu_r)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}. \quad (4.29)$$

Często teoria prowadząca do powyższych zależności w literaturze nazywana jest teorią mieszanin, ponieważ o parametrach materiałowych kreowanego materiału, obok parametrów materiałowych składowych, decyduje jedynie udział objętościowy komponentów w jednostce objętości. Udział ten jest w powyższych zależnościach oznaczony odpowiednio dla włókien przez c_r , a dla matrycy przez c_m . Pozostałe wielkości zostały już wcześniej wyjaśnione, należy tylko uzupełnić, że przez indeks m oznaczone są wszelkie parametry charakteryzujące matrycę, a przez r - rodzinę włókien wzmacniających daną warstwę ortotropową. W układzie osi globalnych xyz ortotropowy związek konstytutywny 4.30 staje się związkiem anizotropowym scharakteryzowanym macierzą $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)}, \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{1112} \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2222} & \tilde{C}_{2212} \\ \tilde{C}_{1211} & \tilde{C}_{1222} & \tilde{C}_{1212} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}^{(k)}. \quad (4.31)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \left(\mathbf{T}^{(k)} \right)^T \quad (4.32)$$

gdzie $\mathbf{T}^{(k)}$ jest macierzą przejścia z układu materialnego k -tej warstwy do układu globalnego, zależną od kąta θ jaki tworzy oś x_1 z osią x . Macierz $\mathbf{T}^{(k)}$ można zapisać w postaci:

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Po wyliczeniu macierzy sprężystości dla poszczególnych warstw i transformacji ich do globalnego układu współrzędnych należy wyznaczyć stałe D_{ijkl} reprezentujące odpowiednio sztywności płyty. W prezentowanym modelu do wyznaczenia wyżej wymienionych współczynników posługujemy się następującą zależnością:

$$D_{ijkl} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \tilde{C}_{ijkl}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3), \quad (4.34)$$

gdzie N jest liczbą warstw w kompozycie warstwowym, a współrzędne z_{k+1} i z_k określają położenie każdej z warstw w strukturze (patrz rys. 4.2).

4.2 Aproxymacja problemu metodą elementów skończonych

Równanie 4.9 należy uzupełnić o odpowiednie warunki brzegowe zależne od sposobu podparcia płyty. Otrzymane w ten sposób zagadnienie brzegowe jest trudne lub wręcz niemożliwe do rozwiązania metodami klasycznymi w praktycznych przypadkach nieregularnego kształtu płyty, nieregularnych warunków podparcia płyty lub nieregularnego rozkładu obciążenia płyty. Metodą, która pozwala skutecznie rozwiązywać złożone problemy brzegowe mechaniki jest metoda elementów skończonych (MES). Dobrą podstawą otrzymania układu równań (lub nierówności) macierzowych MES jest sformułowanie wariacyjne problemu brzegowego. Celem podania takiego sformułowania dla płyty zginanej wprowadźmy pewne oznaczenia. Niech $U \subset H^2(\Omega)$ oznacza

zbiór przemieszczeń kinematycznie dopuszczalnych płyty, a $V \subset H^2(\Omega)$ zbiór funkcji testujących (przemieszczeń wirtualnych). Tutaj $H^2(\Omega)$ jest przestrzenią HILBERT'A funkcji, które do drugich pochodnych włącznie są całkowalne z kwadratem w obszarze Ω . Ponadto, oznaczmy przez Γ brzeg obszaru Ω , przy czym $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Γ_D jest fragmentem brzegu, na którym nałożone są przemieszczeniowe warunki podparcia płyty, natomiast na Γ_N - naprężeniowe warunki podparcia. Wykorzystując zasadę prac wirtualnych możemy zapisać równanie (4.9) wraz z przynależnymi mu warunkami brzegowymi w tzw. postaci słabej jako następujące równanie wariacyjne, por. np. [KUCZMA 1991]:

Szukamy takiej funkcji ugięcia $w \in U$, e

$$a(w, v) = f(v) \text{ dla wszystkich } v \in V. \quad (4.35)$$

Formy dwuliniowa $a(\bullet, \bullet)$ i liniowa $f(\bullet)$ zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned} a(w, v) = \int_{\Omega} \left(D_{1111} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2D_{1122} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4D_{1112} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + 4D_{2212} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_{2222} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4D_{1212} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) dx dy \\ f(v) = \int_{\Omega} p v dx dy + \int_{\Gamma_N} \left(M_{nn} \frac{\partial v}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial v}{\partial s} + Q_n v \right) ds \end{aligned} \quad (4.36)$$

Równanie (4.35) jest tutaj podstawą do otrzymania modelu skończenie wymiarowego zginanej płyty przy zastosowaniu metody elementów skończonych. W zastosowanej tutaj przemieszczeniowej wersji MES, pole przemieszczeń w obrębie każdego elementu $\Omega^e \subset \Omega$, na które dzieli się płaszczyznę środkowa płyty Ω , aproksymujemy wielomianem, co pozwala zapisać funkcję przemieszczenia w postaci:

$$w(x, y) = \sum_e w^e(x, y) = \sum_e \mathbf{N}^e(x, y) \mathbf{d}^e = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (4.37)$$

gdzie $\mathbf{N} = \mathbf{N}(x, y)$ jest macierzą wierszową funkcji kształtu, a \mathbf{d} jest wektorem (macierzą kolumnową) parametrów węzłowych pola $w = w(x, y)$. Analogiczny w formie rozkład mamy dla funkcji testujących v . Pole odkształceń da się zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{bmatrix} = -z \boldsymbol{\kappa} = -z \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (4.38)$$

gdzie $\boldsymbol{\kappa}$ przedstawia zestawione w macierz kolumnową krzywizny:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \quad \mathbf{B} = \partial \mathbf{N}, \quad \partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Pole naprężeń $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$ w k -tej warstwie można wyrazić jako:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = -z \tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \mathbf{B} \mathbf{d}, \quad z \in [z_k, z_{k+1}], \quad (4.40)$$

a następnie pole momentów w płycie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -\mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{d}. \quad (4.41)$$

Zauważmy, że wszystkie zależności polowe (4.37-4.41) zostały wyrażone w funkcji wektora \mathbf{d} , który jest wielkością niewiadomą. W zależności od przyjętego kształtu elementu skończonego i liczby węzłów, oraz związanych z nimi parametrów (najczęściej) węzłowych i zastosowanych funkcji interpolujących otrzymujemy różne zestawy funkcji kształtu. W istocie funkcje kształtu są obciętymi do obszaru elementu globalnymi funkcjami bazowymi aproksymacji skończenie wymiarowej. Macierz sztywności elementu Ω^e określa wzór:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy. \quad (4.42)$$

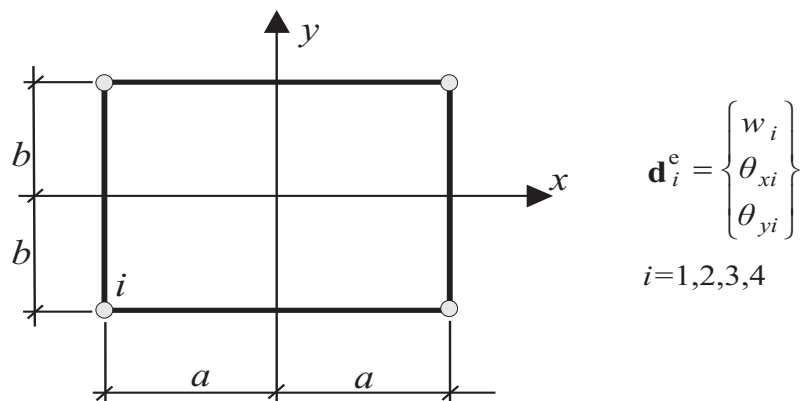
Ostatecznie w wyniku zastosowanej aproksymacji MES, równanie (4.35) przechodzi w macierzowy układ równań:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad (4.43)$$

który rozwiązujemy ze względu na \mathbf{d} . Przez \mathbf{K} i \mathbf{f} oznaczono odpowiednio globalną macierz sztywności i globalny wektor obciążeń węzłowych konstrukcji (płyty), które otrzymujemy poprzez agregację macierzy sztywności i wektora obciążeń węzłowych elementu - \mathbf{K}^e i \mathbf{f}^e .

4.3 Wyniki analiz numerycznych

W tej części pracy jak już wcześniej wspomniałem rozważane są dwa problemy tj. rozwiązanie zginanej płyty włóknokompozytowej w zakresie sprężystym z wykorzystaniem dwóch różnych modeli (rozdziały 4.1.3-4.1.4) do wyznaczenia macierzy sztywności płyty \mathbf{D} oraz określenie wpływu ułożenia zbrojenia na rozkład przemieszczeń i sił wewnętrznych w płycie. Do obliczeń używany jest własny program napisany w języku FORTRAN, a element skończony, który posłużył do dyskretyzacji płyty to 4-węzłowy prostokątny element PIQ4 o 12 stopniach swobody, który jest pokazany na rys. 4.4, por. [ZIENKIEWICZ 1972]. W każdym z węzłów $i = 1, 2, 3, 4$ parametrami są przemieszczenie w_i , kąt obrotu względem osi $x - \theta_{xi}$, oraz kąt obrotu względem osi $y - \theta_{yi}$.



Rysunek 4.4: Prostokątny element skończony PIQ4

Jako funkcji interpolującej w obrębie elementu użyto wielomianu:

$$w^e = w^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} yx^3 + \alpha_{12} xy^3 \quad (4.44)$$

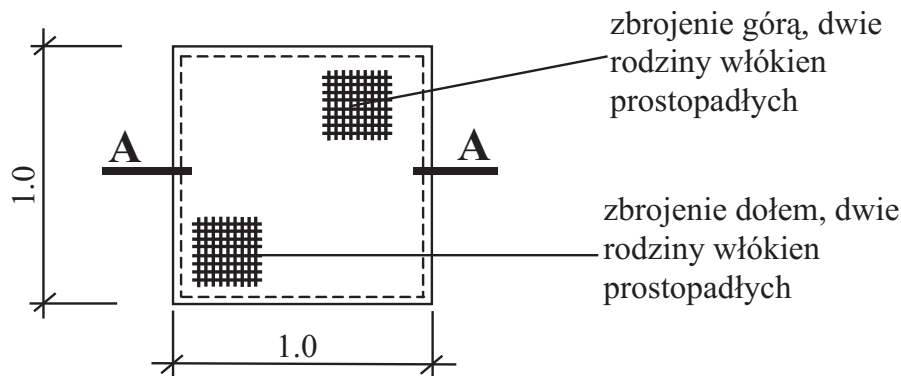
Wzory na funkcje kształtu $N_j = N_j(x, y)$, $j = 1, \dots, 12$, oraz otrzymane w pracy [KUCZMA & KULA 2003b] składniki macierzy sztywności K_{ij} anizotropowego elementu PIQ4 zestawiono w Dodatku A.

Przykład 1: Kwadratowa płyta włóknokompozytowa zbrojona czterema rodzinami włókien - płyta ortotropowa

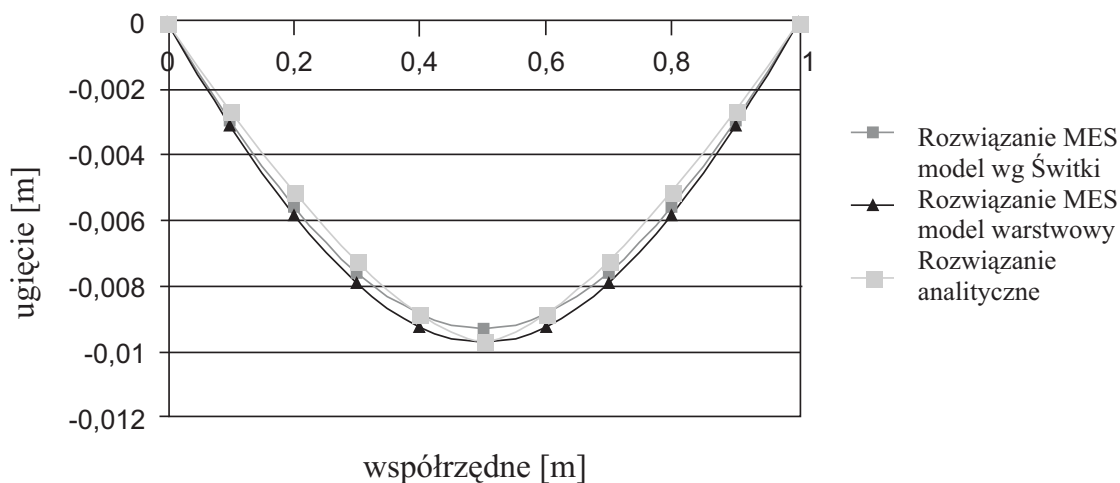
Jako pierwszy przykład, do weryfikacji zastosowanego elementu skończonego i porównania rozpatrywanych modeli, zaprezentowana jest płyta kwadratowa zbrojona czterema rodzinami włókien. Dodatkowo wyniki numeryczne są porównane z rozwiązaniem analitycznym NAVIER'A w postaci podwójnego szeregu FOURIERA'A dla płyty ortotropowej ([KULA 1999]). Zbrojeniem są dwie pary rodziny włókien wzajemnie prostopadłych, jedna z nich ułożona jest powyżej płaszczyzny środkowej płyty, a druga poniżej co schematycznie obrazuje rysunek 4.5, są one symetryczne względem tej płaszczyzny. Na całym obwodzie płyta jest oparta przegubowo i obciążona obciążeniem równomiernym prostopadłym do powierzchni ($p = 1.0$ kPa). Grubość płyty wynosi 0.01 m, a współczynniki materiałowe macierzy poliestrowej i włókna szklanego odpowiednio - $E_m = 3.15$ GPa, $\nu_m = 0.38$, $E_r = 85,5$ GPa, $\nu_r = 0.20$.

Tablica 4.1: Przykład 1: współczynniki sztywności D_{ijkl} obliczone z wykorzystaniem dwóch modeli, przy czym $D_{1112} = D_{2212} = 0$

	D_{1111}	D_{2222}	D_{1122}	D_{1212}
Model ŚWITKI	5.473E-4	5.347E-4	1.166E-4	9.511E-5
Model warstwowy	5.541E-4	5.426E-4	1.209E-4	1.07E-4



Rysunek 4.5: Włóknokompozytowa płyta ortotropowa



Rysunek 4.6: Linia ugięcia w przekroju A-A wg rys.4.5

W rozwiązaniu metodą elementów skończonych aproksymowałem płytę siatką elementów skończonych PIQ4 - 20 x 20 (400 elementów, 441 węzłów, 1323 stopni swobody). Do obliczenia współczynników sztywności płyty D_{ijkl} posłużyły obie wyżej prezentowane modele, różnice można zaobserwować w tabeli 4.1. Z tego zestawienia widać, że płyta liczona wg modelu warstwowego jest sztywniejsza niż liczona wg ŚWITKI. Różnice te nie są jednak znaczące i rezultaty, w postaci linii ugięcia dla przekroju A-A w rozpatrywanej płycie (patrz rys. 4.5) graficznie zaprezentowane na rysunku 4.6, liczone z wykorzystaniem sztywności z obu modeli są podobne a maksymalna różnica nie przekracza 5%. Trzecia krzywa na wykresie obrazuje wcześniej wspomniane rozwiązanie analityczne dla rozważanej płyty.

Przykład 2: Zginana płyta włóknokompozytowa anizotropowa - porównanie elementów skończonych i wpływ gęstości siatki na przemieszczenia

Jako drugi przykład testowana jest płyta włóknokompozytowa złożona z matrycy poliestrowej i szesnastu rodzin włókien szklanych typu S. Rysunek 4.7 obrazuje przekrój poprzeczny analizowanej płyty. W prezentowanych obliczeniach wybrane rodziny włókien są obrócone o kąt θ_i w stosunku do układu globalnego w jakim rozpatrywana jest płyta. Kąt θ_i w modelu warstwowym jest to kąt pomiędzy materialnym układem współrzędnych i -tej warstwy a globalnym układem współrzędnych. Grubość płyty wynosi $h = 0.02$ m, a charakterystyki materiału są wyliczane na podstawie charakterystyk materiałów składowych zestawionych w tabeli 4.2. Rozważane są dwa przypadki zbrojenia płyty, które od tego momentu będziemy nazywali C1 i C2. W obu przypadkach zbrojenie jest symetryczne względem środkowej płaszczyzny płyty. Różnica między tymi przypadkami polega na różnym zorientowaniu poszczególnych rodzin włókien względem globalnego osi układu współrzędnych. Do oznaczenia położenia włókien przynależnych do konkretnej rodziny, czy warstwy w zależności od modelu, zastosowano standardowy zapis dla kompozytów warstwowych ([JONES 1999]).

C1: $[M/0/90/0 + \theta/90 + \theta/0/90/0 + \theta/90 + \theta/M]_s$,

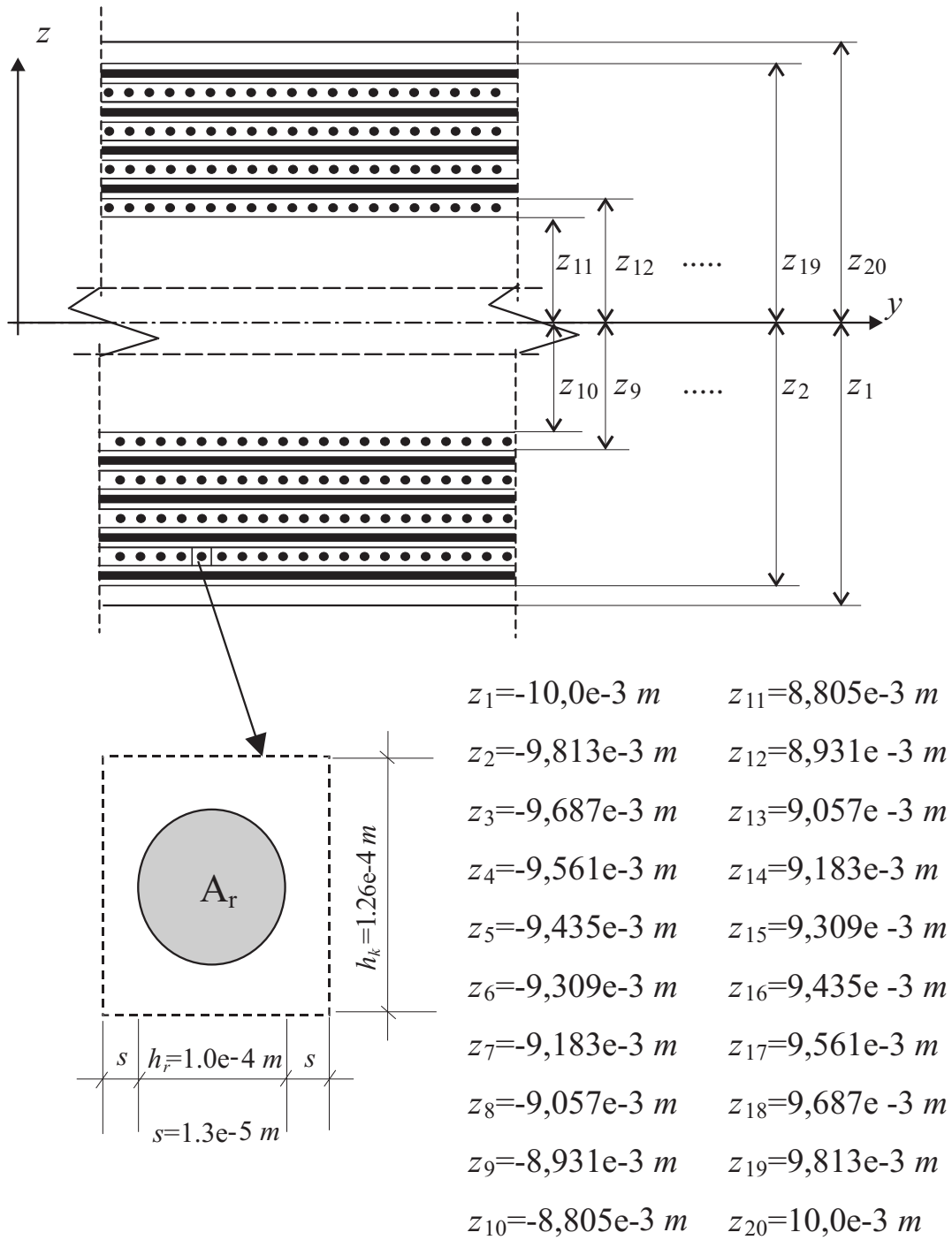
C2: $[M/0/90/22, 5/112, 5/45/135/67, 5/157, 5/M]_s$.

W zapisie tym poszczególne liczby oznaczają kąt θ_i dla poszczególnych warstw idąc od powierzchni górnej do powierzchni środkowej dla połowy przekroju płyty, co wyraża indeks s oznaczający również symetrię względem płaszczyzny środkowej. Przez M oznaczono warstwy (model warstwowo), których jedynym składnikiem jest matryca (niezbrojone). Na rysunku 4.7 zaprezentowany jest przekrój poprzeczny przez analizowaną płytę wraz z lokalizacją wszystkich rodzin włókien.

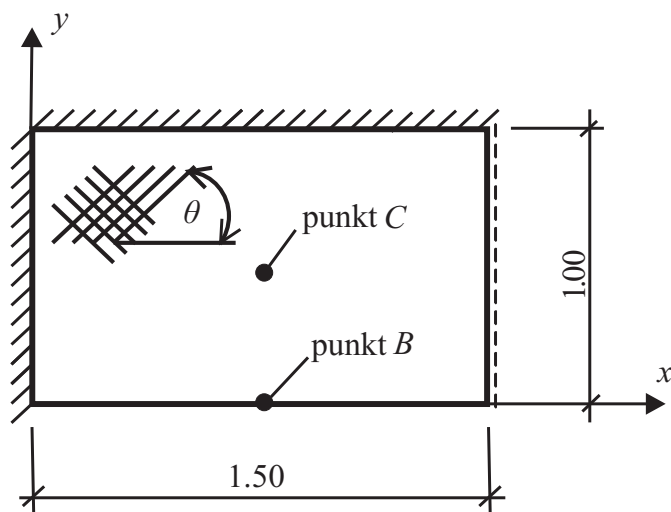
Analizowana jest płyta prostokątna o wymiarach - 1.00 m na 1.50 m, obciążona obciążeniem równomiernie rozłożonym ($p = 1.00$ kPa) prostopadłym do powierzchni płyty i siłą skupioną ($P = 1.00$ kN) w centralnym punkcie płyty (punkt C). Płyta jest utwierdzona na dwóch krawędziach i swobodnie podparta na jednej krawędzi, czwarta krawędź jest swobodna co obrazuje rysunek 4.8. Prezentowana w przykładzie analiza prowadzi do porównania przemieszczeń powierzchni środkowej płyty w punktach charakterystycznych B i C (rys.4.8) wyznaczonych z wykorzystaniem różnych elementów skończonych i przy różnej gęstości siatki elementów. Celem prezentowanego przemieszczenia jest ocena zastosowanego do obliczenie elementu skończonego (PIQ4) i weryfikacja własnego kodu do obliczeń anizotropowych płyt włóknokompozytowych. Dla porównania zaprezentowane są wyniki również uzyskane dla tej samej płyty z wykorzystaniem komercyjnego systemu obliczeniowego ABAQUS®. Wszystkie obliczenia wykonane w tym celu bazują na elementach skończonych rekomendowanych przez twórców systemu do obliczeń płaskich konstrukcji kompozytowych ([ABAQUS 2004]). Model który został zastosowany do homogenizacji struktury kompozytowej, bazuje na prezentowanej teorii uwarstwienia. Elementy skończone użyte w programie są to cztero- i ośmiowęzłowe elementy powłokowe ze zredukowanym całkowaniem.

Tablica 4.2: Stałe materiałowe dla komponentów rozważanego w przykładzie włóknokompozytu

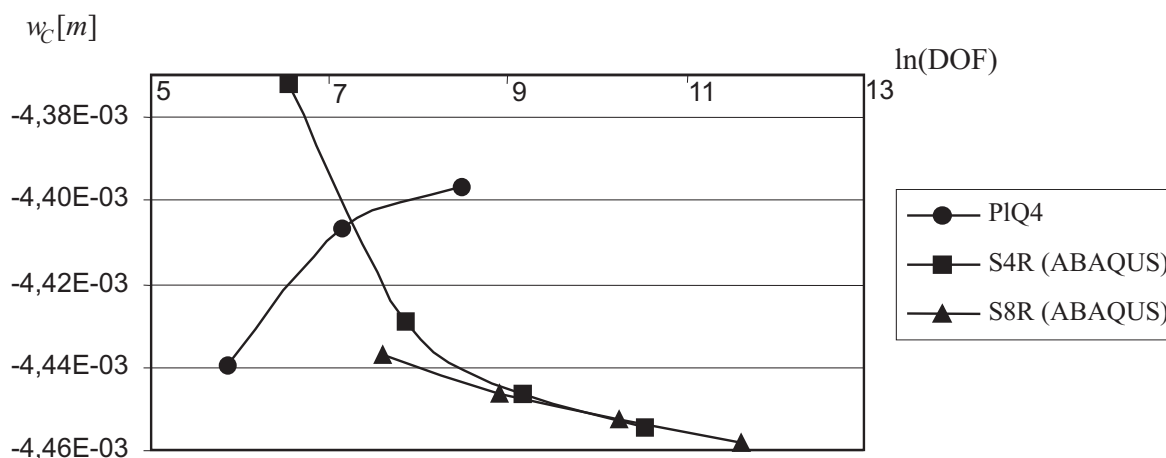
	moduł YOUNG' A	współczynnik POISSON' A
Matryca poliestrowa	$E_m = 3.15$ GPa	$\nu_m = 0.38$
Włókno szklane typu S	$E_r = 85.5$ GPa	$\nu_r = 0.20$



Rysunek 4.7: Przekrój poprzeczny przez płytę analizowaną w przykładzie 2

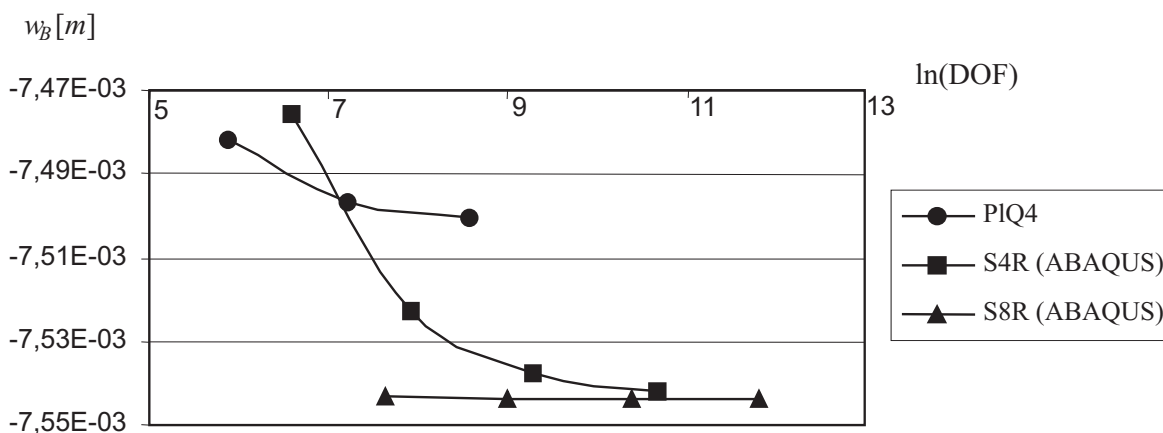


Rysunek 4.8: Geometria i warunki brzegowe włóknokompozytowej płyty prostokątnej analizowanej w przykładach 2 i 3

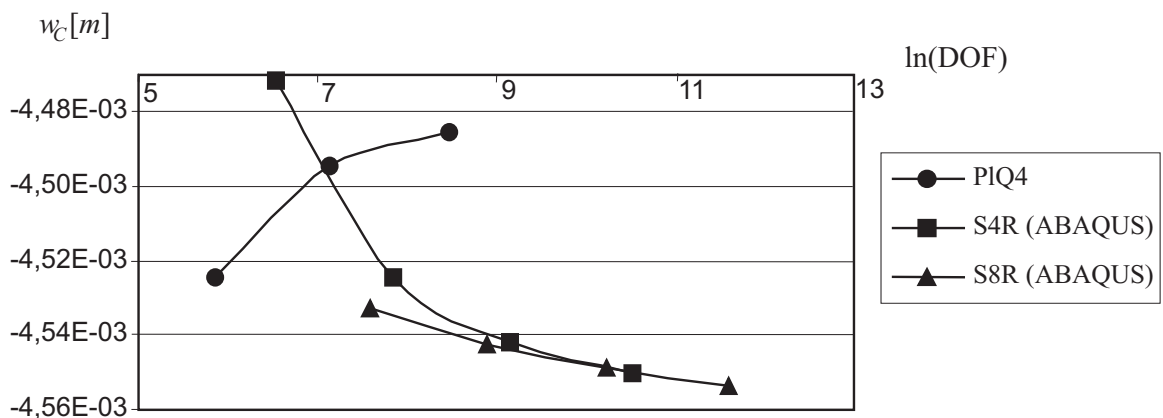


Rysunek 4.9: Przypadek C1 ($\theta = 0^\circ$): ugięcie w punkcie C dla różnych elementów i siatek

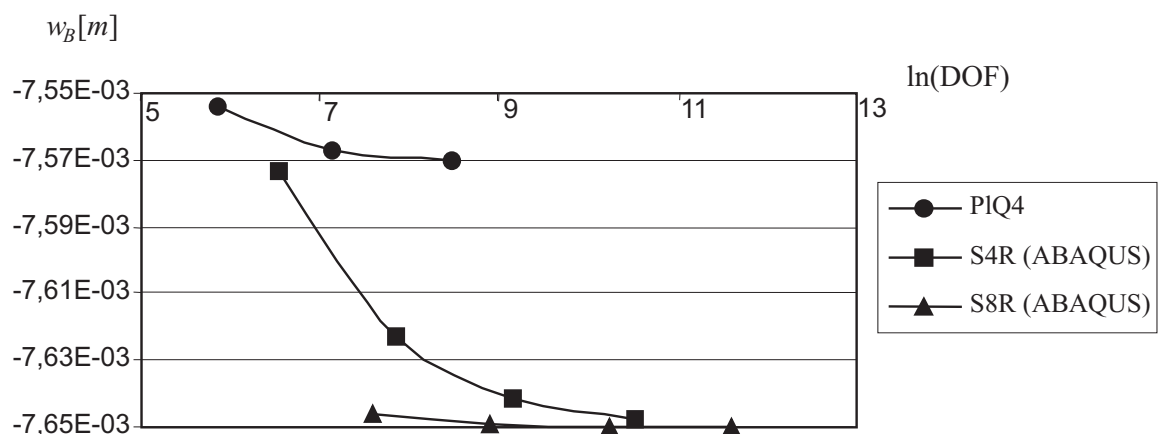
Wyniki zaprezentowane na rysunkach 4.9 - 4.12 wskazują, że zastosowany element skończony PIQ4 prowadzi do dość efektywnych wyników z wyłączeniem regionów z obciążeniem skupionym (rys. 4.9, 4.11). Na osi odciętych jako parametr porównawczy przedstawiono logarytm naturalny z liczby stopni swobody (DOF) całej zdyskretyzowanej płyty, przy czym elementy powłokowe z biblioteki systemu ABAQUS® mają po 6 stopni swobody w węzle.



Rysunek 4.10: Przypadek C1 ($\theta = 0^\circ$): ugięcie w punkcie B dla różnych elementów i siatek



Rysunek 4.11: Przypadek C2: ugięcie w punkcie C dla różnych elementów i siatek

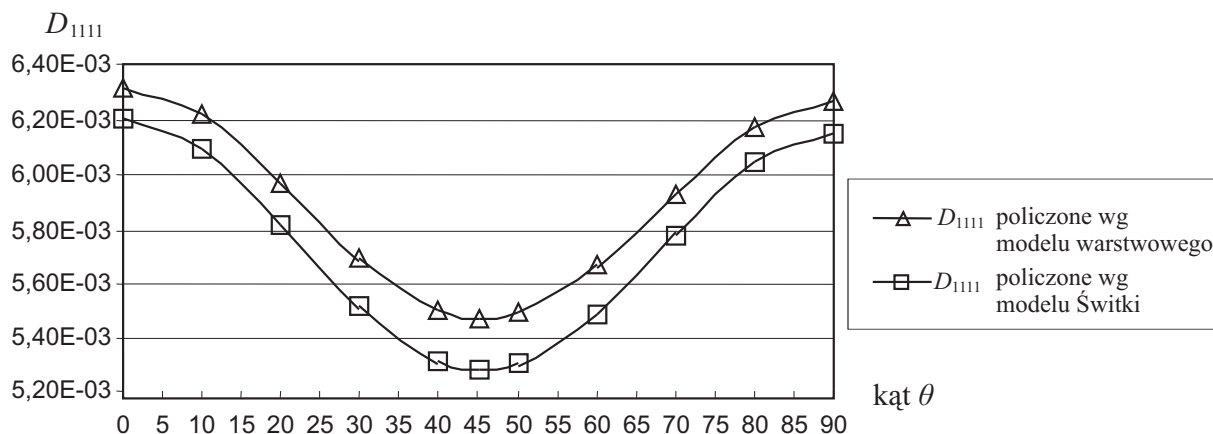


Rysunek 4.12: Przypadek C2: ugięcie w punkcie B dla różnych elementów i siatek

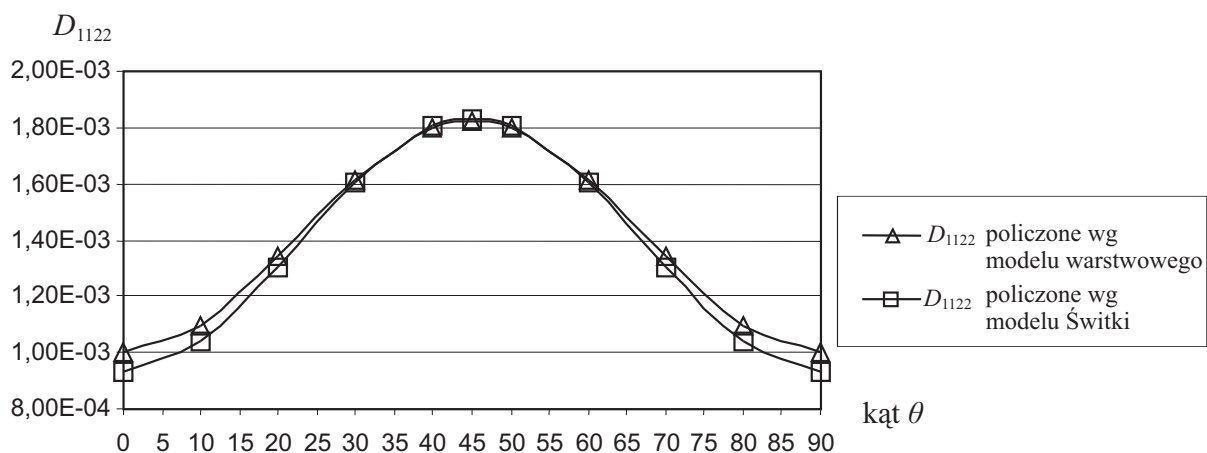
Przykład 3: Zginana płyta włóknokompozytowa anizotropowa - wpływ ułożenia zbrojenia na sztywność płyty

W przykładzie tym jest analizowana ta sama płyta co w przykładzie numer 2, przypadek1: C1:[M/0/90/0 + θ /90 + θ /0/90/0 + θ /90 + θ /M]_s, który jest rozpatrywany dla różnych wartości kąta θ we wskazanych warstwach (rodzinach włókien). Rysunki od 4.13 do 4.15 obrazują wpływ kąta θ na niektóre współczynniki sztywności płyty D_{ijkl} , liczone wg obu modeli. Przedstawiono tylko niektóre sztywności dla zobrazowania zachodzących w nich zmian wraz ze zmianą orientacji zbrojenia, należy dodać, że dla rozważanej płyty jakościowa zmiana (przebieg prezentowanej krzywej zmiany) D_{2222} jest analogiczna jak dla D_{1111} , a $D_{1212} - D_{1122}$. Krzywa reprezentująca zmianę D_{1211} w zależności od kąta θ jest lustrzanym odbiciem krzywej z rysunku 4.15. Z krzywych tych można wyczytać, że zmiana kąta ułożenia włókien w niektórych rodzinach może zmienić dość znacząco sztywności rozważanej płyty i tak, zmiana wartości współczynnika sztywności D_{1111} wynosi ok. 13%, a D_{1122} nawet 40%. Wpływ użycia różnych modeli do obliczania tych sztywności nie wykazuje znaczących zmian, a największe różnice w wielkościach obserwujemy dla D_{1111} i D_{2222} , nie przekraczają one jednak 5% w rozpatrywanym przypadku. Następne dwa wykresy zaprezentowane na rysunkach 4.16 i 4.17 obrazują wpływ orientacji zbrojenia na ugięcie w dwóch punktach charakterystycznych płyty (rys. 4.8) tj. odpowiednio w centralnym punkcie płyty - punkt C i w punkcie B umieszczonym w środku rozpiętości swobodnej krawędzi płyty. Wykresy te pokazują, że zmiana kąta θ ma wpływ na wielkość ugięć, lecz wpływ ten jest znacznie mniejszy niż w przypadku współczynników sztywności i nie przekraczają 5% w rozpatrywanej płycie.

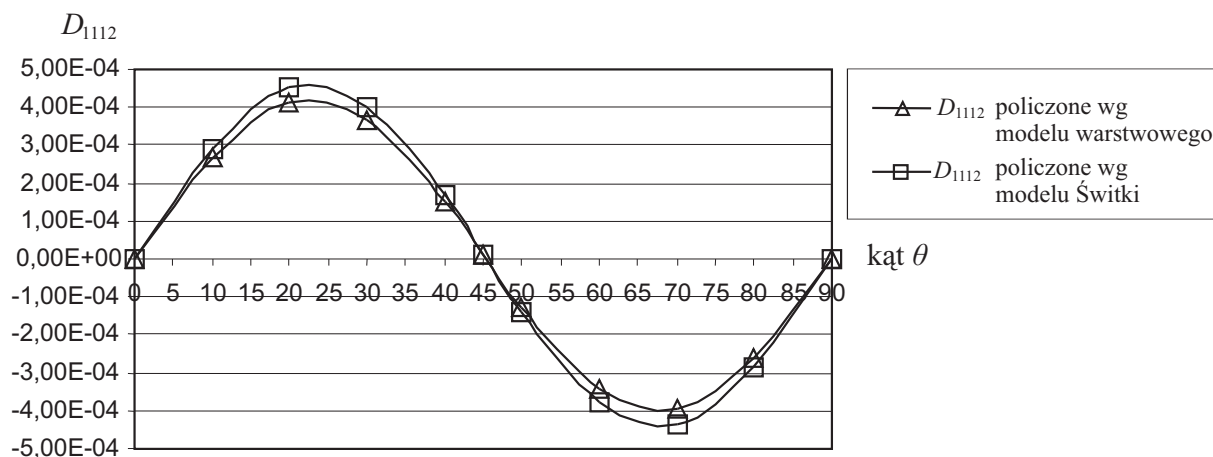
Wyniki te są otrzymane z testów numerycznych z użyciem własnego kodu i dla porównania programem ABAQUS[®], przy czym dla obu modeli przyjęto tę samą gęstość siatki elementów skończonych tj. 16x24. W obliczeniach programem ABAQUS[®] do dyskretyzacji płyty użyto czterowęzłowych elementów powłokowych - S4R ([ABAQUS 2004]). Dodatkowo na wykresach 4.16 i 4.17 są porównane ugięcia otrzymana z wykorzystaniem różnych modeli użytych do obliczania sztywności płyty. Obok omawianych wcześniej modeli włączonych do własnego programu, dla porównania są użyte dwa modele dostępne dla płaskich konstrukcji kompozytowych w programie ABAQUS[®]. Pierwszy to klasyczny i opisywany w pracy model warstwowy dla którego danymi są już przygotowane efektywne stałe sprężystości ortotropowych warstw, wyliczone np. z wykorzystaniem zależności 4.29. Drugi model umożliwia osobną deklarację matrycy i włókien, matrycę deklarujemy jako element skończony np. powłokowy S4R i umieszczamy w jego wnętrzu równolegle do płaszczyzny środkowej rodzinę lub rodziny włókien podając pole przekroju pojedynczego włókna, odległość pomiędzy środkami ciężkości przekrojów sąsiednich włókien i usytuowanie rodziny w stosunku do płaszczyzna środkowej elementu. Ten sposób modelowania struktury wzmacnianej włóknami w dokumentacji systemu ABAQUS[®] jest nazywany *rebar layer* ([ABAQUS 2004]). Różnice wynikające z użycia wyżej wymienionych modeli nie przekraczają 8% i można zauważyć, że wyniki otrzymane z użyciem modelu warstwowego dla obu elementów skończonych są sobie bliskie, a model ten jest mniej podatny niż pozostałe modele. Widać również bliskość rozwiązań do których uzyskania użyto modele traktujące rozdzielnie włókna i matrycę na poziomie obliczania sztywności struktury tj. modelu wg ŚWITKI i *rebar layer*.



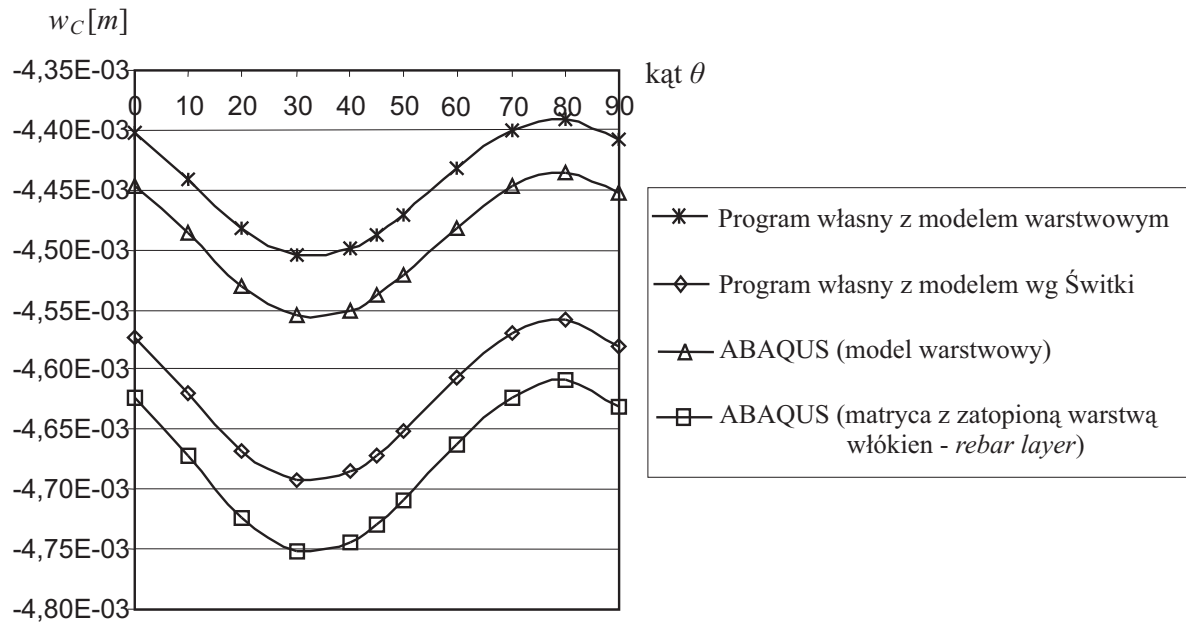
Rysunek 4.13: Wpływ ułożenia włókien w wybranych warstwach na D_{1111} dla różnych modeli



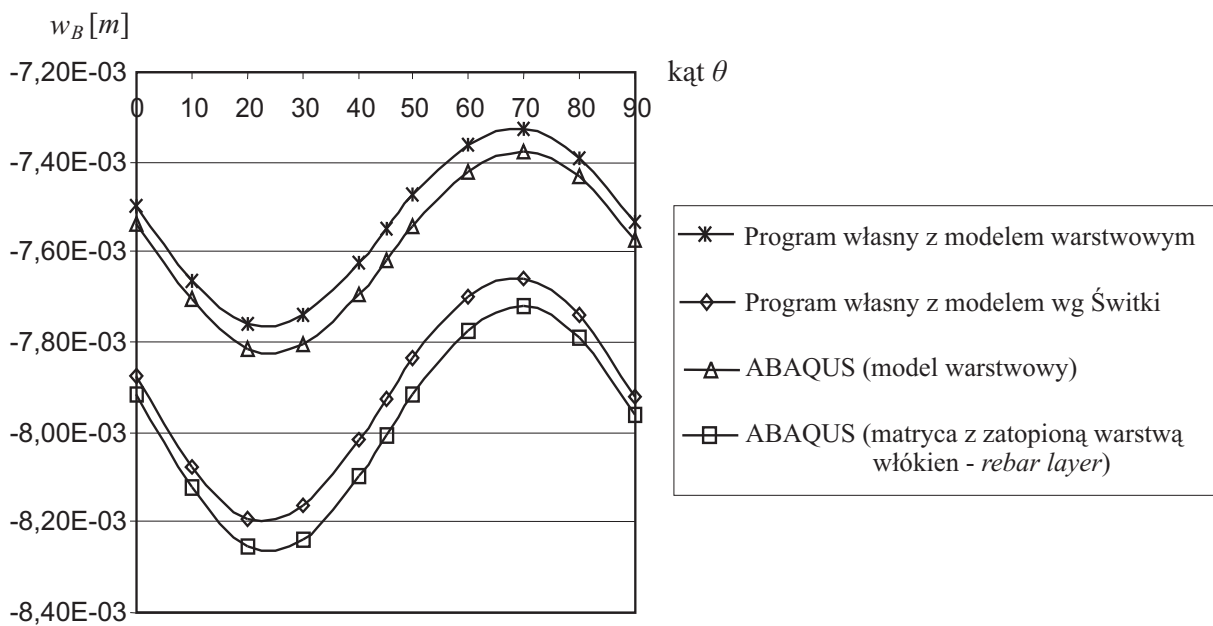
Rysunek 4.14: Wpływ ułożenia włókien w wybranych warstwach na D_{1122} dla różnych modeli



Rysunek 4.15: Wpływ ułożenia włókien w wybranych warstwach na D_{1112} dla różnych modeli



Rysunek 4.16: Przypadek C1: wpływ ułożenia zbrojenia na ugięcie w punkcie C otrzymany jako rezultat obliczeń z wykorzystaniem różnych modeli i programów



Rysunek 4.17: Przypadek C1: wpływ ułożenia zbrojenia na ugięcie w punkcie B otrzymany jako rezultat obliczeń z wykorzystaniem różnych modeli i programów

5 Płyty włóknokompozytowe w zakresie nieliniowym

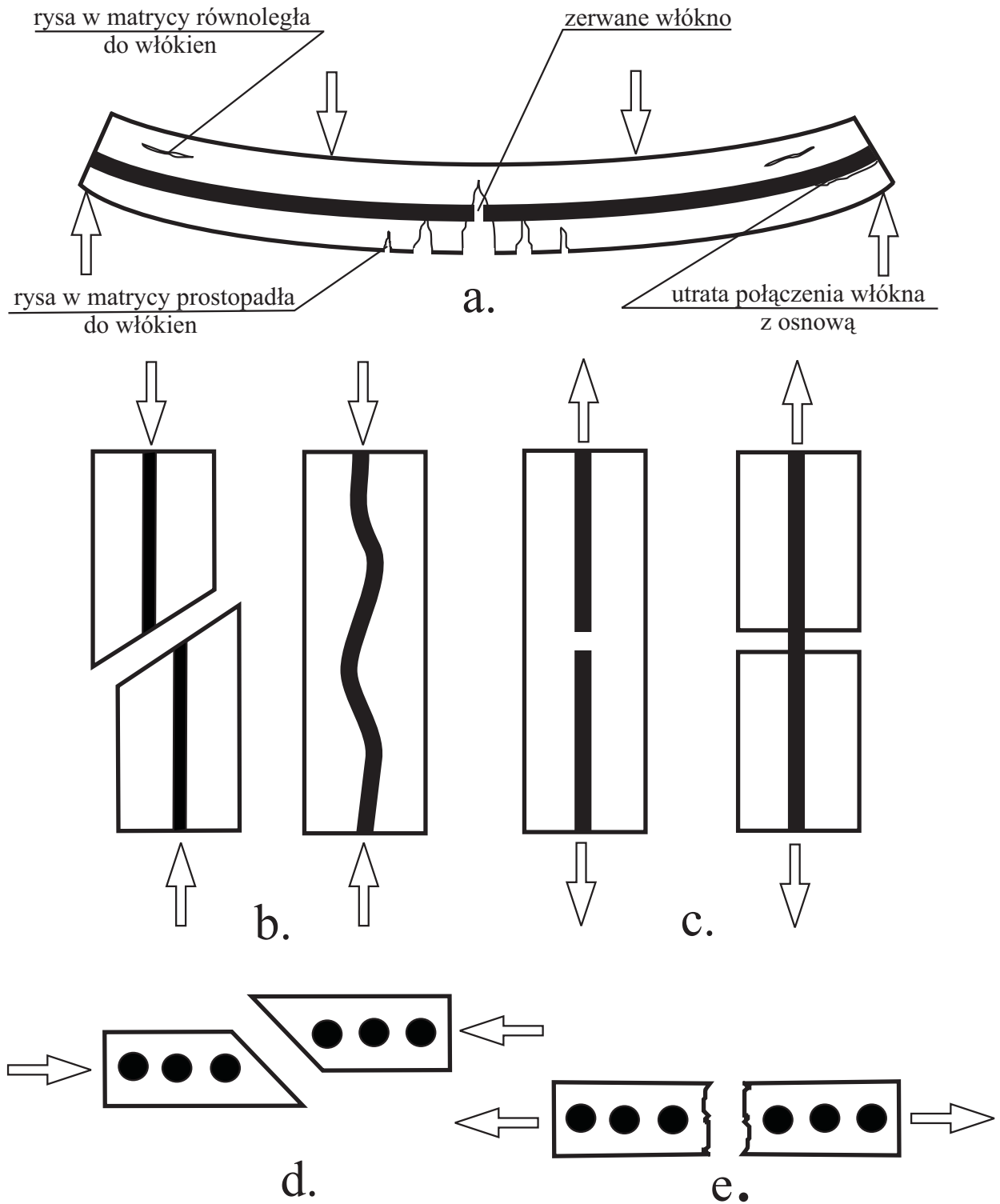
Rozdział ten poświęcony jest modelowaniu procesu uszkodzeń do jakiego dochodzi w płytach kompozytowych poddanych obciążeniu. W poszczególnych podrozdziałach są opisane rodzaje uszkodzeń w kompozytach, sposoby przewidywania ich powstawania, a także modele umożliwiające symulację rozwoju uszkodzenia od inicjacji do całkowitej utraty nośności przez element konstrukcyjny. Do obliczeń jest wykorzystana metody elementów skończonych, użyte algorytmy i wykorzystane elementy skończone są zaprezentowane w odpowiednich podrozdziałach. Obliczenia są wykonane z użyciem komercyjnego programu ABAQUS® z dodatkowymi procedurami własnymi w języku programowania FORTRAN. Część wyników prezentowanych w tym rozdziale zostało opublikowanych w pracach autorskich lub współautorskich [KULA 2004, KUCZMA & KULA 2005, KUCZMA & KULA 2006].

5.1 Rodzaje uszkodzeń

Proces zniszczenia kompozytów może mieć różnorodny przebieg w zależności od rodzaju kompozytu i obciążenia na niego działającego. Ogólnie przyjmuje się, że zniszczeniem kompozytu w sensie mechanicznym nazywamy znaczącą zmianę właściwości materiału, niebezpieczną dla konstrukcji. Zanim dojdzie do zniszczenia kompozyt często ulega uszkodzeniom, które nie zawsze są niebezpieczne dla konstrukcji, powodują jednak zmianę właściwości mechanicznych kompozytu, najczęściej jego osłabienie, co należy uwzględnić w procesie projektowania. Ważnym elementem jest identyfikacja uszkodzenia i modyfikacja właściwości materiału z uszkodzeniem.

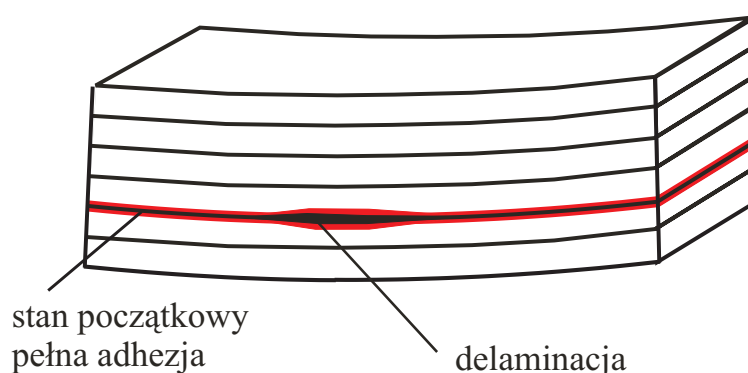
Rodzaj uszkodzenia zależy głównie od właściwości mechanicznych komponentów, w przypadku włóknokompozytów - osnowy i włókna, a także od rodzaju ich zespolenia. W przypadku pojedynczej laminy mówimy o uszkodzeniach wewnątrz struktury warstwy (ang.: *intralaminar failure*) i możemy wyróżnić tu następujące rodzaje uszkodzeń: pękanie matrycy, pękanie lub wyboczenie włókna, wyciąganie włókna z matrycy (utrata adhezji), ścięcie kompozytu. Część tych uszkodzeń wraz z obciążeniami mogącymi je spowodować została przedstawiona schematycznie na rysunku 5.1. W celu wyznaczenia miejsca powstania i rodzaju uszkodzenia niezbędne nam są pewne wielkości charakterystyczne określające stany graniczne materiału. Wielkościami tymi mogą być zarówno odkształcenia jak i naprężenia, charakteryzujące stan graniczny materiału. Wyznaczenie krytycznych wartości naprężeń przy złożonym ich stanie, z jakim mamy do czynienia w trakcie eksploatacji, jest niezwykle skomplikowane i wymagałoby olbrzymiej ilości doświadczeń dla różnych, możliwych zestawów obciążeń. Dlatego podjęto próby stworzenia pewnych matematycznych związków nazywanych hipotezami lub kryteriami wytrzymałościowymi, które umożliwiają poprzez porównanie naprężeń czy odkształceń w danym punkcie struktury z odpowiednimi wielkościami krytycznymi charakterystycznymi dla materiału, a wyznaczonych w prostych stanach wyężenia tj. jednoosiowe ściskanie i rozciąganie oraz czyste ścinanie. Należy tu zaznaczyć, że w przypadku kompozytów włóknistych wspomniane wielkości krytyczne są różne w różnych kierunkach materialnych i zależą od ułożenia włókien. Wytrzymałość kompozytu w kierunku ułożenia włókien jest przeważnie wielokrotnie większa niż w kierunku do nich prostopadłym.

Część z kryteriów wytrzymałościowych skonstruowana jest w ten sposób, że pozwala uwzględnić wieloosiowy stan naprężenia w warstwie i sprzężenie między różnymi mechanizmami zniszczenia. Podejście to nie daje nam jednak odpowiedzi z jakim uszkodzeniem mamy do czynienia w danym punkcie materialnym i w celu jego identyfikacji musimy się posłużyć dodatkowymi zależnościami. Inne kryteria definiują różne warunki wytrzymałościowe dla różnych rodzajów uszkodzeń. Kilka z kryteriów wytrzymałości jest zaprezentowanych i wykorzystanych w dalszych częściach pracy. Należy tu jednak dodać, że wszystkie te kryteria dotyczą rozważań na poziomie makroskopowym - warstwy, tzn. nie uwzględniają mikrouszkodzeń.

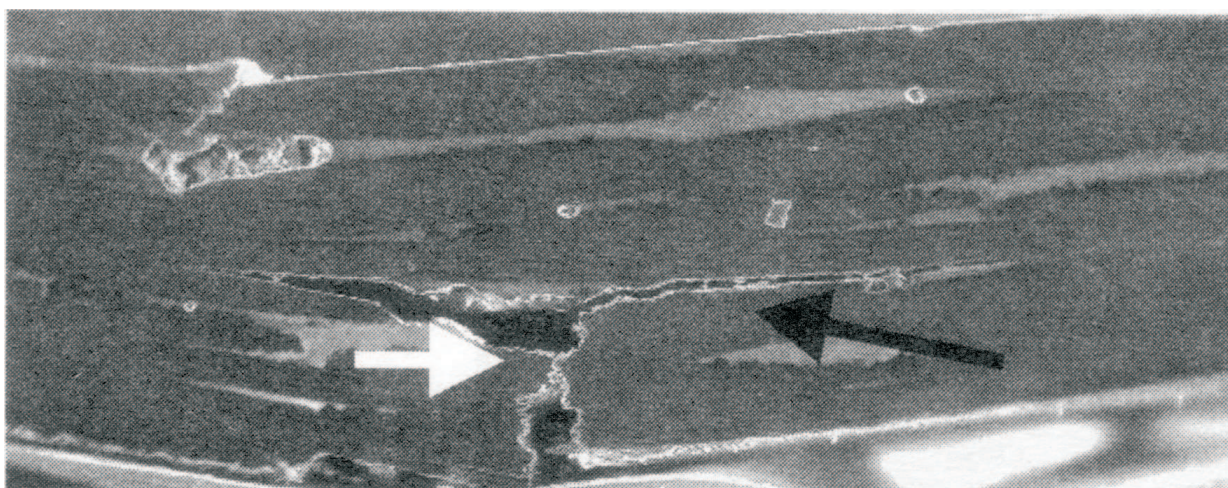


Rysunek 5.1: Rodzaje zniszczenia w kompozycie włóknistym pod różnymi obciążeniami: a - zginanie, b - ściskanie w kierunku ułożenia włókien - ścięcie włókien i matrycy (lewy), wyboczenie włókien (prawy), c - rozciąganie w kierunku ułożenia włókien - zerwanie włókna w matrycy (lewy) $\epsilon_F < \epsilon_M$, pęknięcie matrycy $\epsilon_F > \epsilon_M$ (prawy), d - ściskanie w kierunku prostopadłym do kierunku ułożenia włókien - ścięcie matrycy, e - rozciąganie w kierunku prostopadłym do kierunku ułożenia włókien - pęknięcie matrycy

Wszystkie wyżej wymienione uszkodzenia ułożone są, jak wcześniej wspomniałem, wewnątrz pojedynczej warstwy i element konstrukcyjny z uszkodzeniami możemy rozpatrywać w zależności od rodzaju problemu jako dwu- lub trójwymiarowy. Nie są to jednak wszystkie uszkodzenia jakie możemy zidentyfikować i nazwać w kompozycie. Ponieważ przedmiotem pracy jest płyta kompozytowa włóknista, w której fizycznie lub myślowo wydzielone są warstwy ortotropowe, więc poza uszkodzeniami w pojedynczej warstwie możemy wyróżnić uszkodzenia zachodzące na styku warstw (ang. *interlaminar failure*). Jest to bardzo częste uszkodzenie z jakim mamy do czynienia w kompozytach warstwowych podczas eksploatacji i najczęściej nazywamy je delaminacją, przez termin ten należy rozumieć utratę kontaktu poprzez dwie sąsiadujące ze sobą warstwy. Przyczyną delaminacji mogą być geometryczne nieciągłości wywołane przez stan naprężenia, defekty materiału wcześniej zaistniałe w obrębie jednej z warstw uszkodzenia np. rysy prostopadłe do powierzchni zespolenia warstw. Na rysunku 5.2. jest przedstawiony przykład delaminacji w warstwowym elemencie konstrukcyjnym. W procesie projektowania konstrukcji do identyfikacji poziomu obciążenia przy którym dojdzie do delaminacji mogą posłużyć nam hipotezy wytrzymałościowe bazujące na odkształceniach lub naprężeniach jak również metody mechaniki pękania.



Rysunek 5.2: Fragment struktury warstwowej z delaminacją



Rysunek 5.3: Zdjęcie przelomu struktury kompozytowej (matryca epoksydowa wzmocniona włóknami karbonowymi) z widocznymi uszkodzeniami; pęknięciem poprzecznym (biała strzałka) i delaminacją (czarna strzałka)



Rysunek 5.4: Zdjęcie przełomu struktury kompozytowej (matryca epoksydowa wzmocniona włóknami karbonowymi) z widoczną propagacją rysy poprzecznej

Dodatkowo dla dobrego zobrazowania postaci przykładowych uszkodzeń w kompozycie zamieszczam zdjęcia skopiowane z pracy [IMIELIŃSKA 2005] (rys. 5.3 i 5.4).

W następnych częściach tego rozdziału będą szczegółowo rozpatrywane problemy uszkodzeń w kompozytach i modele umożliwiające przewidzenie miejsca ich powstania oraz ich rozwój w warstwowej konstrukcji kompozytowej na przykładzie elementów konstrukcyjnych ze szczególnym uwzględnieniem płyt.

5.2 Kryteria wytrzymałości

Kryteria wytrzymałości dla kompozytów możemy podzielić na trzy grupy. Pierwszą grupę stanowią kryteria niezależne (ang. *independent failure criteria*), dają one nam odpowiedź które z naprężeń lub odkształceń wywołało uszkodzenie, a co za tym idzie pozwalają zidentyfikować jego rodzaj. Wadą tego rodzaju kryteriów jest brak sprzężenia między mechanizmami zniszczenia. Wyróżnić w tej grupie możemy dwa kryteria tj. kryterium maksymalnego naprężenia i kryterium maksymalnego odkształcenia. Poniżej zostanie zaprezentowane, omówione i wykorzystane kryterium bazujące na naprężeniu, kryterium bazujące na odkształceniu ma postać analogiczną do prezentowanej, a różnica polega na nałożeniu warunków granicznych w postaci odkształceń a nie naprężeń.

Drugą grupą kryteriów są kryteria wielomianowe (ang. *polynomial failure criteria*) opracowane przez badaczy na drodze empirycznej. Kryteria te uwzględniają złożoność mechanizmu uszkodzeń poprzez zależność od wszystkich składowych stanu naprężeń. Kryteria te wywodzą się z warunku plastyczności HUBERA–MISESA–HENCKY’EGO, który został uogólniony na materiały ortotropowe przez HILL’A w 1950 roku. Warunek ten ma postać:

$$(G + H) \sigma_{11}^2 + (F + H) \sigma_{22}^2 + (F + G) \sigma_{33}^2 - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} + \\ - 2G\sigma_{11}\sigma_{33} - 2F\sigma_{22}\sigma_{33} + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (5.1)$$

i został on uznany za kryterium wytrzymałości kompozytu, a parametry F , G , H , L , M , N , związane z plastycznym zachowaniem materiału ortotropowego zostały zastąpione parametrami wyrażonymi przez charakterystyki wytrzymałościowe kompozytu. W grupie tej możemy wyróżnić kilka kryteriów nazwanych najczęściej od nazwisk ich twórców: TSAI–WU , AZZI–TSAI–HILL, HOFFMAN.

Ostatnią grupą kryteriów są kryteria, które uwzględniają interakcje komponentów tensora naprężeń a jednocześnie identyfikują rodzaj uszkodzenia (ang. *direct-mode criteria*). Do grupy tej przykładowo należą kryteria zaproponowane przez [HASHIN 1980, CHANG & LESSARD 1991, LEE 1982, PUCK & SCHUERMAN 1998].

Zanim przejdę do omówienia kilku wybranych i zastosowanych w pracy kryteriów, zdefiniuje wytrzymałości ortotropowej warstwy kompozytu włóknistego wraz z oznaczeniami:

R_{11}^t - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku osi x_1 - kierunek ułożenia włókien,

R_{11}^c - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku osi x_1 - kierunek ułożenia włókien,

R_{22}^t - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku osi x_2 prostopadłym do włókien,

R_{22}^c - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku osi x_2 prostopadłym do włókien,

R_{33}^t - wytrzymałość warstwy na rozciąganie w kierunku prostopadłym do włókien,

R_{33}^c - wytrzymałość warstwy na ściskanie w kierunku osi x_3 prostopadłym do włókien,

R_{12} - wytrzymałość warstwy na ścinanie w płaszczyźnie osi materiałowych (x_1, x_2),

R_{13} - wytrzymałość warstwy na ścinanie w płaszczyźnie osi materiałowych (x_1, x_3),

R_{23} - wytrzymałość warstwy na ścinanie w płaszczyźnie osi materiałowych (x_2, x_3).

5.2.1 Kryterium maksymalnego naprężenia

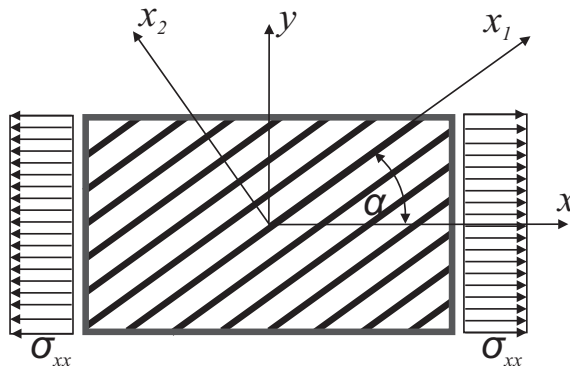
Kryterium naprężenia maksymalnego definiuje stan bezpieczeństwa dla kompozytu jednokierunkowo zbrojonego poprzez zależności naprężeń normalnych $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ i stycznych $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$ od odpowiadających im wytrzymałości i możemy je zapisać:

$$|\sigma_{jj}| \leq R_{jj}^c \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{i} \quad \sigma_{jj} < 0 \quad (5.2)$$

$$|\sigma_{jj}| \leq R_{jj}^t \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{i} \quad \sigma_{jj} > 0 \quad (5.3)$$

$$|\sigma_{ij}| \leq R_{ij} \quad \text{dla} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

Jeżeli którykolwiek z wyżej wymienionych warunków jest przekroczony w punkcie materialnym to oznacza to, że kompozyt w tym punkcie uległ uszkodzeniu. Wiedząc który z warunków został spełniony, wiemy do jakiego typu uszkodzenia doszło i tak np. jeśli dodatnie naprężenie normalne w kierunku ułożenia włókien przekroczy wytrzymałość kompozytu na rozciąganie w tym kierunku oznacza to, że doszło do zerwania włókna. Prześledźmy działanie tego kryterium na przykładzie jednoosiowego rozciągania z różną orientacją osi materiałowej x_1 (kierunek ułożenia włókien) względem osi x wzdłuż której zachodzi rozciąganie.



Rysunek 5.5: Rozciągana warstwa ortotropowa (α - kąt pomiędzy globalnym układem współrzędnych xy , a lokalnym układem osi materiałowych x_1x_2)

Rysunek 5.5 obrazuje to dwuwymiarowe akademickie zadanie. Jedyną niezerową składową tensora naprężenia w układzie globalnym xy jest σ_{xx} , wykorzystując transformację odwrotną do układu lokalnego x_1x_2 otrzymujemy tensor naprężeń w postaci:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \cos^2 \alpha \\ \sigma_{xx} \sin^2 \alpha \\ -\sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

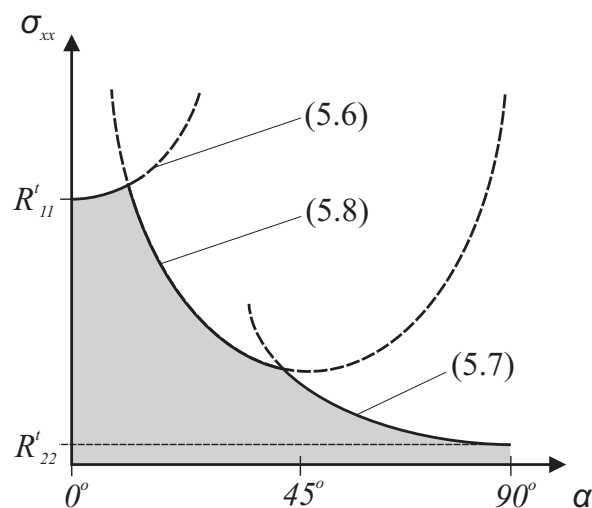
A stosując kryterium maksymalnego naprężenia otrzymamy równania trzech krzywych:

$$\sigma_{xx} = \frac{R_{11}^t}{\cos^2 \alpha}, \quad (5.6)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{R_{22}^t}{\sin^2 \alpha}, \quad (5.7)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{R_{12}}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (5.8)$$

Efekt zastosowania tych równań do obliczenia wytrzymałości laminy na rozciąganie przy różnej orientacji włókien przedstawia rysunek 5.6, gdzie obszar pod krzywymi jest obszarem bezpiecznym (szary kolor).



Rysunek 5.6: Schematyczny obraz wyniku analizy zniszczenia rozciąganej warstwy kompozytu z wykorzystaniem kryterium maksymalnego naprężenia. Zależność między wartością krytyczną naprężenia a orientacją zbrojenia

Wynik otrzymany dla tego prostego przypadku dla większości kompozytów odbiega od wyników doświadczalnych, a z tego wynika konieczność stosowania bardziej rozbudowanych kryteriów ([REDDY 1997, GERMAN 1996]).

5.2.2 Kryterium TSAI-WU

Jednym ze wspomnianych wcześniej kryteriów wielomianowych jest kryterium zaproponowane przez TSAI i WU ([TSAI & WU 1971]). Autorzy starali się dopasować teoretyczne krzywe do wyników doświadczalnych, kryterium to ma więc podłoże empiryczne. Uwzględnione w nim zależności między naprężeniami w wieloosiowym stanie naprężeń. Sprężenie to jest w formie tensorów wytrzymałościowych II i IV rzędu, odpowiednio F_{ij} i F_{ijkl} . Równanie wielomianu obrazującego kryterium TSAI-WU i opisującego powierzchnię zniszczenia zapisujemy w postaci ([REDDY 1997]):

$$F(\sigma_{ij}) = F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \quad \text{dla} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (5.9)$$

-notacja zawężona (zapis VOIGT'A).

W równaniu tym σ_{ij} są to komponenty tensora naprężenia warstwy w głównym materialnym układzie współrzędnych. Współrzędne tensorów wytrzymałościowych definiujemy jako zależności wytrzymałości warstwy z prostych prób obciążeniowych:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{1}{R_{11}^t} - \frac{1}{R_{11}^c}, & F_{22} &= \frac{1}{R_{22}^t} - \frac{1}{R_{22}^c}, & F_{33} &= \frac{1}{R_{33}^t} - \frac{1}{R_{33}^c}, \\ F_{1111} &= \frac{1}{R_{11}^t R_{11}^c}, & F_{2222} &= \frac{1}{R_{22}^t R_{22}^c}, & F_{3333} &= \frac{1}{R_{33}^t R_{33}^c}, \\ F_{1212} &= \frac{1}{R_{12}}, & F_{2323} &= \frac{1}{R_{23}}, & F_{1313} &= \frac{1}{R_{13}}, & F_{1122} &= -\frac{1}{2}\sqrt{F_{1111}F_{2222}}, \\ F_{2233} &= -\frac{1}{2}\sqrt{F_{2222}F_{3333}}, & F_{1133} &= -\frac{1}{2}\sqrt{F_{1111}F_{3333}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

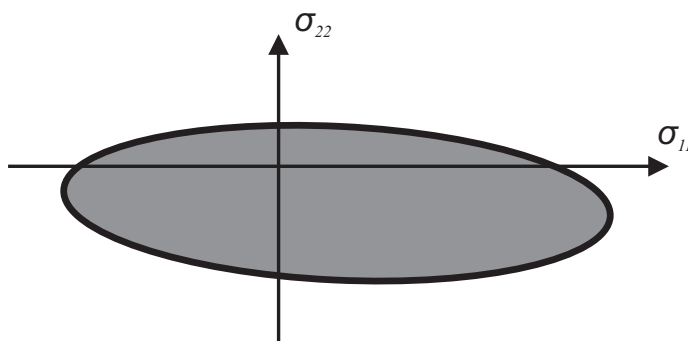
O uszkodzeniu kompozytu w myśl kryterium TSAI-WU mówimy kiedy w danym punkcie zachodzi warunek:

$$F(\sigma_{ij}) \geq 1 \quad (5.11)$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia w kompozycie ortotropowym kryterium to redukuje się do postaci:

$$F_{11}\sigma_{11} + F_{22}\sigma_{22} + F_{12}\sigma_{12} + 2F_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{1111}\sigma_{11}^2 + F_{2222}\sigma_{22}^2 + F_{1212}\sigma_{12}^2 \geq 1 \quad (5.12)$$

i obrazowo możemy przedstawić je na wykresie - rysunek 5.6, gdzie założono, że $\sigma_{12} = 0$. Obszar wewnątrz elipsy oznacza stan bez uszkodzenia.



Rysunek 5.7: Kryterium TSAI-WU

W publikacjach [ALTENBACH et al. 2004, HÖRMANN 2002] przedstawiono przykłady wykorzystania kryteriów wielomianowych dla ortotropowej warstwy. W pracy [MALLIK 1988] znajdziemy wykresy pokazujące rozkład wyników doświadczalnych zniszczenia na powierzchni naprężeń normalnych (σ_{11}, σ_{22}) wraz z krzywymi obrazującymi przykładowe kryteria. Z grafów tych możemy odczytać różnice pomiędzy kryteriami i ich porównanie z doświadczeniem.

5.2.3 Kryterium HASHIN'A

Ostatnim rodzajem kryteriów są kryteria 'direct-mode'. Przykładem tego rodzaju kryteriów są kryteria zaproponowane przez HASHIN'A, w których autor uwzględnił wpływ sprężenia składowych tensora naprężenia na poszczególne rodzaje uszkodzeń. Złożenie mechanizmu uszkodzenia jest zapisane dla różnych rodzajów uszkodzeń poprzez następujące zależności matematyczne:

Zerwanie włókien (rozciąganie):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{R_{13}}\right)^2 \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma_{11} > 0, \quad (5.13)$$

Wyboczenie włókien (ściskanie):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^c}\right) \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma_{11} \leq 0, \quad (5.14)$$

Uszkodzenie matrycy (rozciąganie):

$$\frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{(R_{22}^t)^2} + \frac{1}{(R_{23})^2} ((\sigma_{23})^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{R_{13}}\right)^2 \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma_{22} + \sigma_{33} > 0, \quad (5.15)$$

Uszkodzenie matrycy (ściskanie):

$$\frac{1}{R_{22}^c} \left[\left(\frac{R_{22}^c}{2R_{23}}\right)^2 - 1 \right] (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{R_{13}}\right)^2 + \frac{(\sigma_{23})^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{(R_{23})^2} + \frac{1}{4(R_{23})^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma_{22} + \sigma_{33} \leq 0. \quad (5.16)$$

Powyższe zależności umożliwiają identyfikacje uszkodzenia na poziomie warstwy z uwzględnieniem wpływu różnych składowych tensora naprężenia na powstanie danego uszkodzenia np. zarysowanie matrycy, zerwanie lub wyboczenie włókna czy ścięcie warstwy. Wśród warunków wytrzymałościowych zaproponowanych przez HASHIN'A znajdziemy również zależność, która umożliwia identyfikacje uszkodzenia między warstwami:

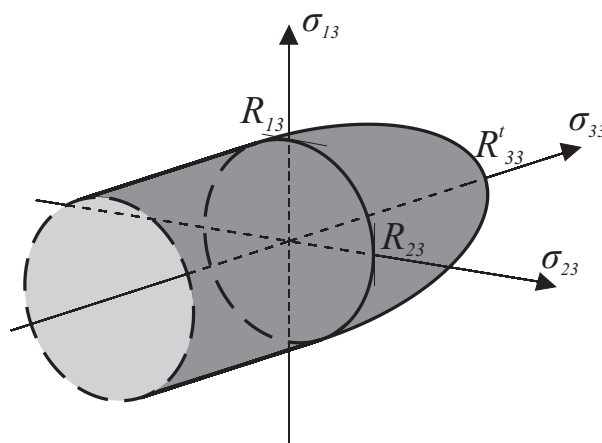
Delaminacja:

$$\left(\frac{\langle \sigma_{33} \rangle}{R_{33}^t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{R_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{R_{23}}\right)^2 \geq 1, \quad (5.17)$$

gdzie $\langle \bullet \rangle$ oznacza nawias MACAULAY'A, który definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33} \rangle &= \sigma_{33} & \text{dla} & \quad \sigma_{33} > 0, \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= 0 & \text{dla} & \quad \sigma_{33} \leq 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Powyższą zależność możemy przedstawić w postaci graficznej - rysunek 5.8.



Rysunek 5.8: Kryterium HASHIN'A dla delaminacji

Zależność HASHIN'A dla delaminacji pozwala określić miejsce i moment inicjacji tego zjawiska, czyli powstania rysy równoległej do płaszczyzny warstwy. Propagacja rysy może być realizowana na różne sposoby bazujące na mechanice kontinuum zniszczenia lub na mechanice pękania. Zastosowany w pracy model jest opisany w części poświęconej numerycznemu modelowaniu delaminacji (podrozdział 5.5.2).

5.2.4 Kryteria wytrzymałości warstwy, a uszkodzenie kompozytu warstwowego

W podrozdziałach 5.2.1-5.2.3 zostały zaprezentowane trzy oparte na nieco różnych założeniach kryteria wytrzymałości pojedynczej, ortotropowej warstwy kompozytu włóknistego. Jednak zadanie najczęściej stojącym przed projektantem jest określenie nośności nie pojedynczej laminy ale elementu konstrukcyjnego wykonanego z kilku czy kilkunastu połączonych ze sobą warstw - laminatu.

Mnogość kompozytów, ich geometria, rodzaj zespolenia czy wreszcie różnorodny mechanizm niszczenia, uniemożliwiają stworzenie modeli matematycznych czy numerycznych pozwalających jednoznacznie ocenić nośność elementu warstwowego jako zhomogenizowanego elementu. Chcąc określić nośność struktury kompozytowej musimy zejść w swoich rozważaniach do poziomu warstwy ortotropowej i najpierw określić jej wytrzymałość na podstawie wyżej opisanych kryteriów. Następnie należy opracować algorytm umożliwiający określenie poziomu uszkodzenia laminatu przez pryzmat uszkodzenia w poszczególnych laminach. Proces ten jest z reguły dość skomplikowany ponieważ wymaga transformacji wielkości fizycznych z globalnego układu współrzędnych w którym rozpatrywany jest laminat do materialnych układów lokalnych poszczególnych warstw w celu przyrównania ich do charakterystycznych wytrzymałości, lub podstawiania do kryteriów wytrzymałościowych.

Pojawienie się uszkodzenia w warstwie nie oznacza utraty nośności przez cały warstwowy element konstrukcyjny, przeważnie jest jedynie inicjacją uszkodzenia, co wymaga zdefiniowania właściwości mechanicznych uszkodzonej warstwy a co za tym idzie laminatu. Laminat może jednak przenosić dalej obciążenie, często dużo większe od tego, które spowodowało pierwsze uszkodzenie (ang. *first ply failure - FPF*). Przy kolejnych przyrostach obciążenia kontrolujemy już zmodyfikowaną konstrukcję i postępujemy jak przy pierwszym uszkodzeniu tzn. poszukujemy „pierwszego uszkodzenia” w „nowym” materiale. Przez „nowy” materiał rozumiemy materiał zde-

gradowany na skutek uszkodzeń. Postępujemy tak aż do całkowitego zniszczenia laminatu (ang. *ultimate ply failure - UPF*).

Postęp uszkodzenia od pierwszego uszkodzenia do całkowitego zniszczenia w laminacie możemy realizować na kilka sposobów, które wypunktowane zostały w rozdziale poświęconym aktualnemu stanowi wiedzy. W pracy zastosowany jest model bazujący na redukcji tych sztywności które są związane z wykrytym uszkodzeniem, np. jeśli naprężenie normalne w kierunku prostopadłym do włókien przekroczy odpowiadającą mu wytrzymałość i dojdzie pęknięcia matrycy to tylko sztywność w tym samym kierunku zostanie zredukowana ([DATOO 1991, REDDY 1997]), w przypadku modelowania dwuwymiarowego. Szczegółowy algorytm postępowania przy numerycznym modelowaniu rozwoju uszkodzenia w kompozycie warstwowym zaprezentowany jest w podrozdziale 5.5.1. Innym ważnym uszkodzeniem w kompozycie jest wspomniana wcześniej delaminacja, która wymaga dla pełnego opisu tego zjawiska zastosowania modelu trójwymiarowego. Ponieważ uszkodzenie to zachodzi na granicy warstw sposób modelowania jest inny niż w przypadku uszkodzeń zachodzących w obrębie warstw. Inicjacja delaminacji jest przewidywana także przy pomocy kryteriów wytrzymałościowych, a postęp delaminacji jest realizowany z wykorzystaniem energii pęknięcia oraz prawa ewolucji wg mechaniki kontinuum uszkodzeń. Szczegółowo delaminacja jest rozpatrywana w rozdziale 5.5.2.

5.3 Elementy mechaniki ośrodków ciągłych

W rozdziale 4 było rozpatrywane liniowe zachowanie płyty w płaskim stanie naprężenia. Model bazujący na płaskim stanie naprężenia nie pozwala jednak uwzględnić wszystkich procesów zniszczenia jakie mogą zajść w strukturze warstwowej. Dlatego w podrozdziale 5.4 jest zdefiniowany powłokowy element skończony 3-D bazujący na mechanice ośrodków ciągłych, który w pełni nadaje się do nieliniowej analizy płyt czy powłok warstwowych, również z delaminacją. W tej części pracy są przedstawione na podstawie literatury [RYMARZ 1993, REDDY 1997, BAŞAR & WEICHERT 2000] podstawowe zależności mechaniki ciała stałego - równania polowe, które umożliwią pełne i zrozumiałe zdefiniowanie wyżej wymienionego elementu, oraz sformułowanie wariacyjne, które pozwala na aproksymację problemu metodą elementów skończonych.

5.3.1 Deformacja i odkształcenie

Rozważania bazujące na mechanice ośrodków ciągłych należy zacząć od opisu kinematyki ośrodka. Na wstępie zdefiniuję dwie konfiguracje odniesienia ([BAŞAR & WEICHERT 2000]): Konfigurację początkową B_o tzn. ciało znajdujące się w przestrzeni euklidesowej R^3 jest nieobciążone, nie uległo deformacji i stan naprężenia jest zerowy. Wektor położenia punktu P_o należącego do przestrzeni B_o w kartezjańskim układzie współrzędnych zapisujemy:

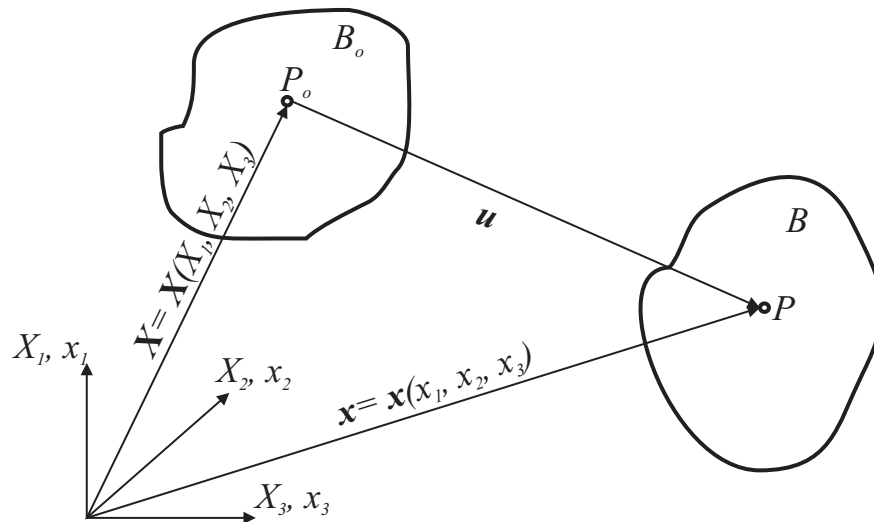
$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(X_1, X_2, X_3), \quad (5.19)$$

a współrzędne X_1, X_2, X_3 są nazywane współrzędnymi LAGRANGE'A lub materialnymi.

Konfiguracja aktualna B tzn. ciało znajdujące się w przestrzeni euklidesowej R^3 doznało pewnej deformacji na skutek zewnętrznego obciążenia, punkt P_o zmienił swoją pozycję na P , której wektor położenie możemy zapisać w tym samym układzie odniesienia:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3), \quad (5.20)$$

współrzędne x_1, x_2, x_3 nazywamy współrzędnymi EULER'A lub przestrzennymi. Powyższe rozważania obrazuje rysunek 5.9.



Rysunek 5.9: Współrzędne materialne i przestrzenne. wektor przemieszczenia - \mathbf{u}

Transformując współrzędne do dowolnego układu krzywoliniowego $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ otrzymamy:

$$X_i = X_i(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3), \quad (5.21)$$

$$x_i = x_i(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3). \quad (5.22)$$

Następnie różniczkując wektory położenia we współrzędnych materialnych i przestrzennych względem układu krzywoliniowego otrzymujemy kowariantne wektory bazy:

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)}{\partial \Theta_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)}{\partial \Theta_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.24)$$

Wektory kontrawariantne definiujemy w standardowy sposób z zależności $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$ i $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$, gdzie δ_i^j to delta KRONECKER'A. Wektor przemieszczenia cząstki materialnej P_0 na miejsce P jest dany przez różnicę wektora położenia początkowego i aktualnego:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (5.25)$$

W celu określenia odkształcenia i deformacji ciała materialnego wprowadzamy nieskończenie mały odcinek materialny $d\mathbf{X}$ (rys. 5.10). Odcinek ten w konfiguracji aktualnej - „zdeformowanej” przechodzi w odcinek $d\mathbf{x}$ (rys. 5.10). Możemy zdefiniować odcinki materialne w układzie współrzędnych krzywoliniowym:

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Theta_i} d\Theta_i = \mathbf{G}_i d\Theta_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.26)$$

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta_i} d\Theta_i = \mathbf{g}_i d\Theta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.27)$$

Chcąc ustalić zależność między $d\mathbf{X}$, a $d\mathbf{x}$ wprowadzamy tensor drugiego rzędu, który nosi nazwę tensora gradientu deformacji i jest oznaczany przez \mathbf{F} . Definiujemy go przez wektory metryczne:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.29)$$

Obserwując zależność kowariantnych wektorów bazy \mathbf{G}_i i \mathbf{g}_i wyrażone przez \mathbf{F} i \mathbf{F}^{-1} , poprzez odpowiednie przekształcenia ([BAŞAR & WEICHERT 2000]), otrzymujemy zależności transformacji odcinka materialnego $d\mathbf{X}$ we współrzędnych materialnych w „zdeformowany” odcinek $d\mathbf{x}$ we współrzędnych przestrzennych. Transformacja ta jest realizowana przez gradient deformacji \mathbf{F} , a transformacja odwrotna przez jego inwersję \mathbf{F}^{-1} :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}. \quad (5.30)$$

Spośród wielu możliwości definicji tensora odkształcenia najbardziej pasującym do opisu dużych odkształceń jest tensor GREENA-LAGRANGE’A, który możemy zapisać:

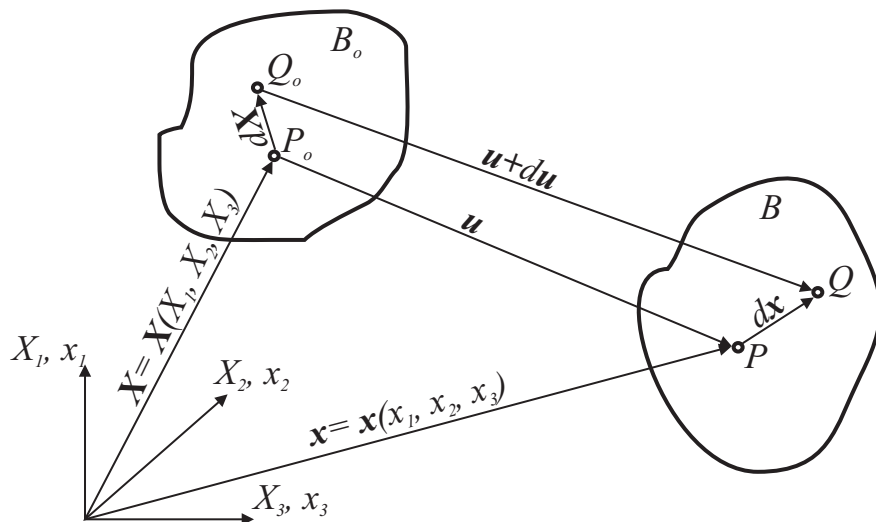
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}), \quad (5.31)$$

gdzie \mathbf{G} reprezentuje tensor jednostkowy. Alternatywnie reprezentację tensora \mathbf{E} możemy zapisać we współrzędnych kowariantnych:

$$\mathbf{E} = E_{ij}\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,i}\mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j}\mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i}\mathbf{u}_{,j}) = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}). \quad (5.32)$$

Gdzie $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ i $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ są współrzędnymi metrycznymi aktualnej i początkowej konfiguracji. W postulowanym w pracy nieliniowo geometrycznym sformułowaniu wykorzystywane są odkształcenia GREENA-LAGRANGE’A zapisane powyższymi zależnościami (5.30) i (5.31). W przypadku małych odkształceń tensor GREENA-LAGRANGE’A redukuje się do tensora małych odkształceń, który możemy zapisać w stosowanej w tym miejscu notacji następująco:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,i}\mathbf{G}_j + \mathbf{u}_{,j}\mathbf{G}_i). \quad (5.33)$$



Rysunek 5.10: Deformacja odcinka materialnego $d\mathbf{X}$ w $d\mathbf{x}$

5.3.2 Związki konstytutywne

Przed sformułowaniem prawa materiałowego należy zdefiniować naprężenia. Miarą naprężenia energetycznie sprzężoną z odkształceniami GREENA-LAGRANGE' A jest tensor naprężenia PIOLI-KIRCHOFF' A drugiego rzędu \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (5.34)$$

Tensor ten reprezentuje naprężenia w odniesieniu do konfiguracji początkowej i nie można go bezpośrednio zinterpretować fizycznie. Inną miarą naprężenia jest tensor CAUCHY'EGO, którego współrzędne odnoszą się do konfiguracji aktualnej i jest on miarą fizyczną aktualnego stanu materiału. Tensor CAUCHY'EGO możemy otrzymać z tensora PIOLI-KIRCHOFF' A z następującej zależności:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (5.35)$$

gdzie J jest to *jakobian*. Równanie to jest szczególnie ważne przy praktycznym wykorzystaniu wyników obliczeń np. w prognozowaniu uszkodzeń w kompozytach. Mając zdefiniowane odkształcenia i naprężenia musimy zdefiniować prawo materiałowe poprzez odpowiednie związki konstytutywne. W pracy jak to już było opisane w rozdziale poświęconym w rozdziale poświęconym płytom kompozytowym w zakresie sprężystym (rozdział 4) postulujemy liniową zależność pomiędzy odkształceniami a naprężeniami, w tym miejscu ten postulat sformułujemy jako zależność liniową odkształceń GREENA-LAGRANGE' A i naprężeń PIOLI-KIRCHOFF' A:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E}. \quad (5.36)$$

\mathbf{C} jest tensorem czwartego rzędu nazywanym tensorem materiałowym lub sprężystości i jest dany przez zależność:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W^{int}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}, \quad (5.37)$$

w której $W^{int}(\mathbf{E})$ jest gęstością energii odkształcenia. Tensor \mathbf{C} jako czwartego rzędu ma 81 komponentów, ale ze względu na symetrię tensorów odkształceń i naprężeń liczba niezależnych współrzędnych wynosi 36, symetria ta jest nazywana w literaturze anglojęzycznej *minor symmetry*:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}. \quad (5.38)$$

Reprezentację tensora sprężystości w notacji VOIGT' A przyjmuje postać:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1113} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3313} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1213} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2313} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1323} & C_{1313} \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Jednakże wzięwszy pod uwagę własności potencjału W^{int} mamy:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W^{int}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 W^{int}}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = C_{klij}, \quad (5.40)$$

co redukuje liczbą niezależnych elementów macierzy \mathbf{C} do 21. Symetria ta w literaturze angielskojęzycznej nazywana jest *major symmetry*. Dalsze redukcje liczby niezależnych komponentów wynikają z właściwości fizycznych ośrodka, a konkretnie z ilości osi symetrii w materiale. I tak ośrodek z 21 niezależnymi komponentami macierzy sprężystości nazywany jest ośrodkiem anizotropowym i nie ma żadnej osi symetrii, ośrodek ortotropowy ma 3 osie symetrii co redukuje liczbę niezależnych elementów do 9, a ośrodek o nieskończonej liczbie osi symetrii - izotropowy ma jedynie 2 niezależne komponenty. Ponieważ pojedyncza lamina zbrojona włóknami ciągłymi jest ośrodkiem ortotropowym w odniesieniu do materialnego układu współrzędnych, macierz materiałowa warstwy oznaczona jako $\bar{\mathbf{C}}$, jest dana ([JONES 1999, SCHLEBUSCH 2005]):

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Theta} & \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Theta} & \frac{\nu_{13}+\nu_{23}\nu_{12}}{E_1 E_2 \Theta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Theta} & \frac{1-\nu_{31}\nu_{13}}{E_3 E_1 \Theta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_3 E_1 \Theta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{13}+\nu_{23}\nu_{12}}{E_1 E_2 \Theta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_3 E_1 \Theta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{31} \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

gdzie:

$$\Theta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1 E_2 E_3} > 0, \quad (5.42)$$

gdzie E_i , ν_{ij} , G_{ij} są inżynierskimi stałymi sprężystości. Należy tu odnotować zależność pewnych stałych sprężystości w ośrodku ortotropowym stanowiące o symetrii (*major symmetry*):

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}, \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23} \quad i \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}. \quad (5.43)$$

Ortogonalne wektory bazy do której odnosi się macierz materiałowa $\bar{\mathbf{C}}$ oznaczmy \mathbf{M}_i w konfiguracji początkowej. Wektor bazy \mathbf{M}_3 jest wektorem normalnym do płaszczyzny zbrojenia a kierunek wektora \mathbf{M}_1 jest zgodny z kierunkiem włókien. Chcąc transformować macierz $\bar{\mathbf{C}}$ zdefiniowaną w bazie $\mathbf{M}_i \otimes \mathbf{M}_j \otimes \mathbf{M}_k \otimes \mathbf{M}_l$ w macierz sprężystości \mathbf{C} w bazie $\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l$ korzystamy z reguły transformacji wyprowadzonej w wielu pracach ([BISCHOFF et al. 2004, SCHLEBUSCH 2005]):

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}_M \bar{\mathbf{C}} \mathbf{T}_M^T, \quad (5.44)$$

gdzie \mathbf{T}_M jest macierzą transformacji. Szczegółowe wyprowadzenie macierzy transformacji przedstawił SCHLEBUSCH w rozprawie doktorskiej [SCHLEBUSCH 2005]. Cytując za nim przedstawię jedynie postać macierzy transformacji, która użyta jest w pracy i zaimplementowana do elementu skończonego definiowanego w następnym rozdziale:

$$\mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 1}^1 & M_{\cdot 2}^1 M_{\cdot 2}^1 & M_{\cdot 3}^1 M_{\cdot 3}^1 & 2M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 2}^1 & 2M_{\cdot 2}^1 M_{\cdot 3}^1 & 2M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 3}^1 \\ M_{\cdot 1}^2 M_{\cdot 1}^2 & M_{\cdot 2}^2 M_{\cdot 2}^2 & M_{\cdot 3}^2 M_{\cdot 3}^2 & 2M_{\cdot 1}^2 M_{\cdot 2}^2 & 2M_{\cdot 2}^2 M_{\cdot 3}^2 & 2M_{\cdot 1}^2 M_{\cdot 3}^2 \\ M_{\cdot 1}^3 M_{\cdot 1}^3 & M_{\cdot 2}^3 M_{\cdot 2}^3 & M_{\cdot 3}^3 M_{\cdot 3}^3 & 2M_{\cdot 1}^3 M_{\cdot 2}^3 & 2M_{\cdot 2}^3 M_{\cdot 3}^3 & 2M_{\cdot 1}^3 M_{\cdot 3}^3 \\ M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 2}^2 & M_{\cdot 2}^1 M_{\cdot 2}^2 & M_{\cdot 3}^1 M_{\cdot 2}^3 & M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 2}^2 + M_{\cdot 2}^1 M_{\cdot 1}^2 & M_{\cdot 2}^1 M_{\cdot 3}^2 + M_{\cdot 3}^1 M_{\cdot 2}^2 & M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 3}^2 + M_{\cdot 3}^1 M_{\cdot 1}^2 \\ M_{\cdot 1}^2 M_{\cdot 1}^3 & M_{\cdot 2}^2 M_{\cdot 2}^3 & M_{\cdot 3}^2 M_{\cdot 3}^3 & M_{\cdot 1}^2 M_{\cdot 2}^3 + M_{\cdot 2}^2 M_{\cdot 1}^3 & M_{\cdot 2}^2 M_{\cdot 3}^3 + M_{\cdot 3}^2 M_{\cdot 2}^3 & M_{\cdot 1}^2 M_{\cdot 3}^3 + M_{\cdot 3}^2 M_{\cdot 1}^3 \\ M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 1}^3 & M_{\cdot 2}^1 M_{\cdot 2}^3 & M_{\cdot 3}^1 M_{\cdot 3}^3 & M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 2}^3 + M_{\cdot 2}^1 M_{\cdot 1}^3 & M_{\cdot 2}^1 M_{\cdot 3}^3 + M_{\cdot 3}^1 M_{\cdot 2}^3 & M_{\cdot 1}^1 M_{\cdot 3}^3 + M_{\cdot 3}^1 M_{\cdot 1}^3 \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

gdzie:

$$M_{\cdot j}^i = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{M}_j. \quad (5.46)$$

5.3.3 Równania wariacyjne

Przed zapisaniem równań wariacyjnych dla rozpatrywanego problemu należy przedstawić równania polowe dla konfiguracji początkowej B_o z obszarem granicznym ∂B_o . Ponieważ w dalszej części pracy wprowadzimy pewne ulepszenie tensora odkształcenia GREENA-LAGRANGE'A, począwszy od teraz tensor odkształceń GREENA-LAGRANGE'A będziemy oznaczać \mathbf{E}^u co wyraża jego zależność od wektora przemieszczenia \mathbf{u} . Przez \mathbf{E} będziemy rozumieć pełen tensor odkształceń, czyli sumę tensora \mathbf{E}^u i dodatkowych odkształceń rezydualnych czy w wolnym tłumaczeniu z języka angielskiego - „ulepszających” (*enhanced*). Metoda polegająca na ulepszeniu tensora odkształceń, która została zaproponowana przez [SIMO & RIFAI 1990] i jest wykorzystana w niniejszej pracy nazywana jest w literaturze angielskiej *Enhanced Assumed Strain* (EAS), a jej postulaty i definicja zostaną przedstawione w dalszych częściach pracy.

Podstawowe równania mechaniki kontinuum niezbędne do dalszych rozważań:

Równanie równowagi:

$$\text{Div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X} \in B_o, \quad (5.47)$$

równanie konstytutywne:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} \quad \forall \mathbf{X} \in B_o, \quad (5.48)$$

kinematyczne równanie polowe:

$$\mathbf{E}^u = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}) \quad \forall \mathbf{X} \in B_o, \quad (5.49)$$

gdzie:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H} \quad \text{i} \quad \mathbf{H} = \text{Grad}(\mathbf{u}). \quad (5.50)$$

Na obszarze granicznym konfiguracji B_o zdefiniujemy warunki brzegowe kinematyczne:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{X} \in \partial_{\mathbf{u}} B_o, \quad (5.51)$$

i statyczne:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{X} \in \partial_{\mathbf{t}} B_o, \quad (5.52)$$

przy czym zachodzą zależności na obszarze granicznym:

$$\partial B_o = \partial_{\mathbf{u}} B_o \cup \partial_{\mathbf{t}} B_o \quad \text{i} \quad \emptyset = \partial_{\mathbf{u}} B_o \cap \partial_{\mathbf{t}} B_o. \quad (5.53)$$

W powyższych równaniach przez ρ oznaczona jest gęstość masy w konfiguracji początkowej, \mathbf{f} opisuje siły masowe, $\bar{\mathbf{u}}$ i $\bar{\mathbf{t}}$ to odpowiednio przemieszczenia początkowe i obciążenie na powierzchni, przez \mathbf{N} oznaczony jest wektor normalny do powierzchni ∂B_o . Chcąc rozwiązać powyższe równania polowe z wykorzystaniem metody elementów skończonych musimy sformułować równania wariacyjne. Najpopularniejszy i najprostszym typem jest sformułowanie wariacyjne z jedynie początkowo niewiadomym polem przemieszczeń - zasada prac wirtualnych [REDDY 1997, BISCHOFF et al. 2004]. Sformułowanie to jest nazywane „słabym” i w tym klasycznym ujęciu aproksymuje równanie równowagi (5.47) i naprężeniowe warunki brzegowe (5.52). Możemy je zapisać (np. [SCHLEBUSCH 2005]):

$$\int_{B_o} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}^u[\delta \mathbf{u}] dV = \int_{\rho} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial_{\mathbf{t}} B_o} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA. \quad (5.54)$$

Rozwiązanie jest uzależnione od dwóch dodatkowych, „silnych” warunków lokalnych tj. równania kinematycznego (5.49) i prawa materiałowego (5.48) oraz od przemieszczeniowych warunków brzegowych (5.51). Przez $\delta \mathbf{u}$ oznaczone są wirtualne przemieszczenia nazywane też funkcjami testowymi. Równanie pracy wirtualnej jest przytoczone jako punkt wyjścia do wprowadzenia bardziej skomplikowanego równania wariacyjnego, które lepiej przystaje do problemów nieliniowych rozpatrywanych w pracy. Mowa tu o trójpolowym funkcjale wariacyjnym wprowadzonym przez [WASHIZU 1955] i [HU 1955] nazwanym od ich nazwisk funkcjalem HU-WASHIZU:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_{B_o} W^{int}(\mathbf{E})dV - \int_{B_o} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}dV + \int_{B_o} \mathbf{S} : \left(\frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}) - \mathbf{E} \right) dV \\ & - \int_{\partial_t B_o} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}dA + \int_{\partial_u B_o} \mathbf{t} \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})dA. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Wszystkie wielkości w równaniu (5.55) odnoszą się do konfiguracji początkowej. Jak już wcześniej wspomniałem w pracy wykorzystamy pewne ulepszenie wektora odkształceń mające na celu redukcję znanych zjawisk zachodzących w elementach skończonych z przemieszczeniowymi stopniami swobody a noszącymi nazwę blokady, a w publikacjach angielskojęzycznych - *locking*. Metoda EAS pozwala skutecznie zredukować efekt blokady, o którego rodzajach i sposobach wprowadzania dodatkowych parametrów ulepszających tensor odkształceń traktują np. prace ([SIMO & RIFAI 1990, BISCHOFF & RAMM 1997, SCHLEBUSCH 2005]). Szczegóły zastosowanego w pracy rodzaju EAS i jego zastosowania w elemencie skończonym są przedmiotem następnego rozdziału. W tej części pracy nazwę jedynie dodatkową część tensora odkształcenia i zapiszę funkcjonał HU-WASHIZU w jej funkcji. Ulepszającą część tensora odkształcenia, która fizycznie jest rezydum kinematycznego pola równań, oznaczę przez $\tilde{\mathbf{E}}$, a cały tensor odkształcenia można zapisać:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{E}^u = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}), \quad (5.56)$$

a jego wariację:

$$\delta \mathbf{E} = \delta \mathbf{E}^u + \delta \tilde{\mathbf{E}} \quad \text{gdzie} \quad \delta \mathbf{E}^u = \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}. \quad (5.57)$$

Funkcjonał HU-WASHIZU przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{S}) = & \int_{B_o} W^{int}(\mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}})dV - \int_{B_o} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}dV + \int_{B_o} \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}}dV - \int_{\partial_t B_o} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}dA \\ & + \int_{\partial_u B_o} \mathbf{t} \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})dA. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Część tego funkcjonału związana z przemieszczeniowymi warunkami brzegowymi może być pominięta bez utraty głównego sensu równania [BISCHOFF & RAMM 1997], a wariację równania (5.58) można zapisać:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{S}) = & \int_{B_o} \left[\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E}^u [\delta \mathbf{u}] + \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \tilde{\mathbf{E}} \right] dV - \int_{B_o} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}dV \\ & + \int_{B_o} \left[\delta \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{S} : \delta \tilde{\mathbf{E}} \right] dV - \int_{\partial_t B_o} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}dA. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Wprowadzając warunek ortogonalności dla pola naprężeń \mathbf{S} i dodatkowych odkształceń $\tilde{\mathbf{E}}$ zasugerowany przez [SIMO & RIFAI 1990]:

$$\int_{B_o} \mathbf{S} : \tilde{\mathbf{E}}dV = 0 \quad (5.60)$$

słaba forma problemu brzegowego redukuje się do dwupolowego problemu:

$$\int_{B_o} \left[\mathbf{S}^E : \delta \mathbf{E}^u[\delta \mathbf{u}] + \mathbf{S}^E : \delta \tilde{\mathbf{E}} \right] dV - \int_{B_o} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial_t B_o} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA = 0, \quad (5.61)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie \mathbf{S}^E dla naprężeń wyrażonych równaniem konstytutywnym (5.48). Nieliniowe równanie (5.61) można rozwiązać iteracyjnie metodą elementów skończonych. Dyskretyzacja i linearyzacja tego równania zostaną przeprowadzone w następnej części pracy.

5.4 Element skończony przestrzenno-powłokowy (3-D)

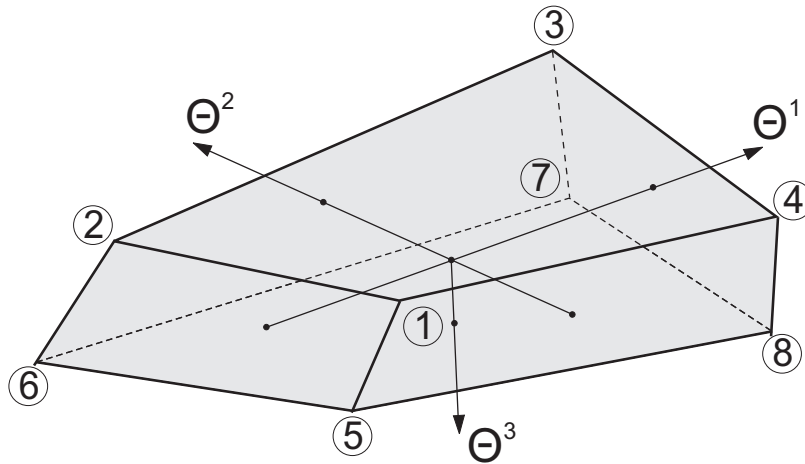
Rozdział ten jest poświęcony definicji ośmiowęzłowego elementu skończonego powłokowego użytecznego do nieliniowej analizy kompozytów warstwowych w szczególności płyt i powłok. Bazą prezentowanego elementu jest standardowy element przestrzenny (kontinuum) ośmiowęzłowy z trzema przemieszczeniowymi stopniami swobody w każdym węźle. Trójliniowe funkcje kształtu opisują interpolacje parametrów węzłowych. Element ten nie ma obrotowych stopni swobody dzięki czemu unikamy skomplikowanych uaktualnień tensora rotacji w analizie nieliniowej. Pozwala on wygodnie i intuicyjnie modelować struktury warstwowe, a jednocześnie umożliwia poprawne wyznaczenie naprężeń normalnych i stycznych na styku warstw co jest bardzo ważne przy obliczaniu struktur warstwowych z delaminacją. Element ten w podstawowej („czystej”) wersji charakteryzuje się zbyt dużą sztywnością i tendencją do powstawania zjawiska blokady przy pewnych rodzajach obciążenia. W celu wyeliminowania tych wad w pracy stosuje się dwie metody wzbogacenia elementu tj. wspomnianą wcześniej metodę EAS wprowadzoną przez [SIMO & RIFAI 1990] oraz specjalny sposób interpolacji niektórych odkształceń nazywany w literaturze angielskojęzycznej metodą - 'Assumed Natural Strain' (ANS). Metoda ANS została wprowadzona dla płyt przez [HUGHES & TEZDUYAR 1981], a następnie stosowana do różnych elementów skończonych opisujących cienkie konstrukcje [BISCHOFF & RAMM 1997, VU-QUOC & TAN 2003, SCHLEBUSCH 2005]. O szczegółach tych metod, sposobie ich adaptacji w elemencie i wpływie na jego zachowanie traktują kolejne podrozdziały tego rozdziału. Finalny element skończony jest wolny od efektu blokady i z powodzeniem może być stosowany do modelowania konstrukcji warstwowych z uwzględnieniem delaminacji co jest jednym z celów niniejszej pracy. W dalszej części pracy wyprowadzany i stosowany element będzie nazywany przestrzenno-powłokowym dla odróżnienia od elementów powłokowych jak również od elementów przestrzennych w klasycznym rozumieniu.

5.4.1 Dyskretyzacja i linearyzacja

Izoparametryczny przestrzenno-powłokowy element skończony z ośmioma węzłami przedstawia rysunek 5.11 gdzie przez $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ oznaczono układ osi naturalnych elementu. Obszar ciągły zadania w konfiguracji początkowej B_o dzielimy na na nel obszarów B_o^e , gdzie przez nel oznaczamy liczbą elementów skończonych, a B_o^e konfigurację początkową pojedynczego elementu. Matematycznie aproksymację możemy zdefiniować następująco:

$$B_o = \bigcup_{e=1}^{nel} B_o^e \quad \text{przy czym} \quad B_o^e \neq \emptyset \quad \text{i} \quad B_o^i \cap B_o^j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad (5.62)$$

warunki te opisują wzajemną relację obszaru elementów, przy czym iloczyn ich powierzchni granicznych $\partial B_o^i \cap \partial B_o^j$ może być zbiorem pustym, punktem, krawędzią lub powierzchnią, dla każdego $i \neq j$, w zależności od wzajemnego usytuowania elementów w aproksymowanym obszarze.



Rysunek 5.11: Przestrzenno-powłokowy, izoparametryczny, ośmiowęzłowy element skończony

Wektory położenia poszczególnych węzłów w konfiguracji początkowej:

$$\mathbf{X}(1) = \mathbf{X}(-1, -1, -1), \quad (5.63)$$

$$\mathbf{X}(2) = \mathbf{X}(-1, 1, -1), \quad (5.64)$$

$$\mathbf{X}(3) = \mathbf{X}(1, 1, -1), \quad (5.65)$$

$$\mathbf{X}(4) = \mathbf{X}(1, -1, -1), \quad (5.66)$$

$$\mathbf{X}(5) = \mathbf{X}(-1, -1, 1), \quad (5.67)$$

$$\mathbf{X}(6) = \mathbf{X}(-1, 1, 1), \quad (5.68)$$

$$\mathbf{X}(7) = \mathbf{X}(1, 1, 1), \quad (5.69)$$

$$\mathbf{X}(8) = \mathbf{X}(1, -1, 1). \quad (5.70)$$

Interpolacje geometrii w konfiguracji początkowej przeprowadzamy za pomocą równania:

$$\mathbf{X}_h(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \sum_{I=1}^8 N_I(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{X}(I) \in B_{oh}^e, \quad (5.71)$$

gdzie:

$$N_I(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 + \Theta^1(I) \Theta^1)(1 + \Theta^2(I) \Theta^2)(1 + \Theta^3(I) \Theta^3), \quad (5.72)$$

a $\Theta^i(I)$ są to współrzędne naturalne węzła I (5.62-5.70). Indeks h w powyższym i w następnych równaniach wskazuje wielkości aproksymowane metodą elementów skończonych. Wielkości N_I

nazywamy funkcjami kształtu i w przypadku opisywanego elementu skończonego są to funkcje trójliniowe:

$$N_1 = N_1(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 - \Theta^1)(1 - \Theta^2)(1 - \Theta^3), \quad (5.73)$$

$$N_2 = N_2(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 - \Theta^1)(1 + \Theta^2)(1 - \Theta^3), \quad (5.74)$$

$$N_3 = N_3(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 + \Theta^1)(1 + \Theta^2)(1 - \Theta^3), \quad (5.75)$$

$$N_4 = N_4(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 + \Theta^1)(1 - \Theta^2)(1 - \Theta^3), \quad (5.76)$$

$$N_5 = N_5(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 - \Theta^1)(1 - \Theta^2)(1 + \Theta^3), \quad (5.77)$$

$$N_6 = N_6(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 - \Theta^1)(1 + \Theta^2)(1 + \Theta^3), \quad (5.78)$$

$$N_7 = N_7(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 + \Theta^1)(1 + \Theta^2)(1 + \Theta^3), \quad (5.79)$$

$$N_8 = N_8(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \frac{1}{8}(1 + \Theta^1)(1 - \Theta^2)(1 + \Theta^3). \quad (5.80)$$

W zapisie macierzowym równanie interpolacji konfiguracji podstawowej możemy zapisać:

$$\mathbf{X}_h(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \mathbf{N}\mathbf{X}^e, \quad (5.81)$$

gdzie \mathbf{X}^e jest wektorem składającym się ze współrzędnych wszystkich ośmiu węzłów w konfiguracji podstawowej i możemy go zdefiniować:

$$\mathbf{X}^e = \{\mathbf{X}(1)^T \mathbf{X}(2)^T \mathbf{X}(3)^T \mathbf{X}(4)^T \mathbf{X}(5)^T \mathbf{X}(6)^T \mathbf{X}(7)^T \mathbf{X}(8)^T\}^T, \quad (5.82)$$

wektor ten ma 24 elementy. Macierz \mathbf{N} nazywamy macierzą kształtu i możemy zapisać:

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.83)$$

gdzie \otimes oznacza produkt KRONECKER'A i w efekcie tego działania macierz \mathbf{N} ma postać:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}. \quad (5.84)$$

Następnie należy zdefiniować aproksymację konfiguracji aktualnej, która ma następującą postać:

$$\mathbf{x}_h(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \sum_{I=1}^8 N_I(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{x}(I), \quad (5.85)$$

a w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{x}_h(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \mathbf{N} \mathbf{x}^e, \quad (5.86)$$

gdzie:

$$\mathbf{x}^e = \{\mathbf{x}(1)^T \mathbf{x}(2)^T \mathbf{x}(3)^T \mathbf{x}(4)^T \mathbf{x}(5)^T \mathbf{x}(6)^T \mathbf{x}(7)^T \mathbf{x}(8)^T\}^T. \quad (5.87)$$

Kiedy aproksymacja obu konfiguracji jest zdefiniowana możemy przejść do definicji aproksymacji pola przemieszczeń rzeczywistych i wirtualnych. Równanie (5.25) zapisujemy dla wielkości aproksymowanych metodą elementów skończonych:

$$\mathbf{u}_h^e = \mathbf{x}_h^e - \mathbf{X}_h^e = \mathbf{N}(\mathbf{x}^e - \mathbf{X}^e) = \mathbf{N} \mathbf{d}, \quad (5.88)$$

gdzie \mathbf{d} jest wektorem parametrów węzłowych, a jego współrzędnymi są 24 przemieszczenia ośmiu węzłów elementu skończonego:

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{u}_h^e(1)^T \mathbf{u}_h^e(2)^T \mathbf{u}_h^e(3)^T \mathbf{u}_h^e(4)^T \mathbf{u}_h^e(5)^T \mathbf{u}_h^e(6)^T \mathbf{u}_h^e(7)^T \mathbf{u}_h^e(8)^T\}^T. \quad (5.89)$$

Analogicznie zapisujemy interpolację pola przemieszczeń wirtualnych:

$$\mathbf{u}_h^e = \mathbf{N} \delta \mathbf{d}. \quad (5.90)$$

Wektor odkształcenia \mathbf{E}_h^u ma następujące współrzędne zależne od parametrów węzłowych \mathbf{d} :

$$\mathbf{E}_h^u(\mathbf{d}) = \{E_{11h}^u, E_{22h}^u, E_{33h}^u, E_{12h}^u, E_{23h}^u, E_{13h}^u\}^T, \quad (5.91)$$

przez analogię możemy zapisać współrzędne wariacji wektora odkształcenia, patrz [SCHLEBUSCH 2005]. Poszczególne składowe wektora odkształcenia wyznaczamy z zależności:

$$\mathbf{E}_{ijh}^u = \frac{1}{2}(g_{ijh} - G_{ijh}), \quad (5.92)$$

które to równanie po odpowiednich przekształceniach (np. [SCHLEBUSCH 2005]) przyjmuje postać użyteczną dla rozwiązań metodą elementów skończonych:

$$\mathbf{E}_h^u(\mathbf{d}) = \mathbf{B}(\mathbf{X}^e + \frac{1}{2}\mathbf{d})\mathbf{d} = \mathbf{B}(\mathbf{X}^e)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{B}(\mathbf{d})\mathbf{d}, \quad (5.93)$$

gdzie:

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^T \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{d}^T \mathbf{B}_{33} \\ \mathbf{d}^T \mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{d}^T \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{d}^T \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{d}^T \mathbf{B}_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ij} = \text{sym}(\mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,j}). \quad (5.94)$$

Wariację wektora odkształceń definiujemy:

$$\delta \mathbf{E}_h^u(\mathbf{d})[\delta \mathbf{d}] = \mathbf{B}(\mathbf{X}^e) \delta \mathbf{d} + \mathbf{B}(\mathbf{d}) \delta \mathbf{d}. \quad (5.95)$$

W celu pełnego opisu problemu w ujęciu metody elementów skończonych z wykorzystaniem funkcjonału HU-WASHIZU należy zapisać związki konstytutywne w ujęciu MES. Zdefiniujemy najpierw wektor naprężeń \mathbf{S}^E zależny od odkształceń:

$$\mathbf{S}_h^E = \mathbf{S}_h^E(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{S}_h^E(\mathbf{E}_h^u(\mathbf{d}) + \tilde{\mathbf{E}}_h(\boldsymbol{\alpha})), \quad (5.96)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}$ jest wektorem parametrów węzłowych, które interpolowane funkcjami zapisanymi w postaci macierzy \mathbf{M} wyznaczają naprężenia rezydualne $\tilde{\mathbf{E}}_h$. Interpolację tą zapisujemy następującym równaniem:

$$\tilde{\mathbf{E}}_h(\boldsymbol{\alpha}) = \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (5.97)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{M}}$ jest macierzą powstałą na skutek odpowiedniej transformacji macierzy interpolacji \mathbf{M} , której postać zależy od rodzaju modyfikacji układu metodą EAS i będzie częściowo dyskutowana w rozdziale poświęconym tej metodzie. Transformacja ta jest związane z wyrażeniem ulepszej części wektora odkształceń w odniesieniu do różnych wektorów bazy:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{\sqrt{G_h}} \tilde{E}_{ij}^0 \mathbf{G}_0^i \otimes \mathbf{G}_0^j, \quad (5.98)$$

gdzie \mathbf{G}_0^i definiuje bazę w centralnym punkcie elementu. Interpolacja wektora odkształceń rezydualnych w odniesieniu do wektora bazy w środku elementu w zapisie zaproponowanym przez [SCHLEBUSCH 2005] zapisujemy:

$$\tilde{\mathbf{E}}_h^0(\boldsymbol{\alpha}) = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ \sqrt{2}] \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}, \quad (5.99)$$

gdzie macierz diagonalna w tym wzorze jest efektem specyfiki zapisu. Transpozycję macierzy do macierzy $\tilde{\mathbf{M}}$ zapisujemy zależnością:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{\sqrt{G_h}} \mathbf{T}_N \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ \sqrt{2}] \mathbf{M}, \quad (5.100)$$

gdzie macierz transformacji ma postać:

$$\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} N_{.1}^1 N_{.1}^1 & N_{.2}^1 N_{.2}^1 & N_{.3}^1 N_{.3}^1 & 2N_{.1}^1 N_{.2}^1 & 2N_{.2}^1 N_{.3}^1 & 2N_{.1}^1 N_{.3}^1 \\ N_{.1}^2 N_{.1}^2 & N_{.2}^2 N_{.2}^2 & N_{.3}^2 N_{.3}^2 & 2N_{.1}^2 N_{.2}^2 & 2N_{.2}^2 N_{.3}^2 & 2N_{.1}^2 N_{.3}^2 \\ N_{.1}^3 N_{.1}^3 & N_{.2}^3 N_{.2}^3 & N_{.3}^3 N_{.3}^3 & 2N_{.1}^3 N_{.2}^3 & 2N_{.2}^3 N_{.3}^3 & 2N_{.1}^3 N_{.3}^3 \\ N_{.1}^1 N_{.1}^2 & N_{.2}^1 N_{.2}^2 & N_{.3}^1 N_{.3}^2 & N_{.1}^1 N_{.2}^2 + N_{.2}^1 N_{.1}^2 & N_{.2}^1 N_{.3}^2 + N_{.3}^1 N_{.2}^2 & N_{.1}^1 N_{.3}^2 + N_{.3}^1 N_{.1}^2 \\ N_{.1}^2 N_{.1}^3 & N_{.2}^2 N_{.2}^3 & N_{.3}^2 N_{.3}^3 & N_{.1}^2 N_{.2}^3 + N_{.2}^2 N_{.1}^3 & N_{.2}^2 N_{.3}^3 + N_{.3}^2 N_{.2}^3 & N_{.1}^2 N_{.3}^3 + N_{.3}^2 N_{.1}^3 \\ N_{.1}^1 N_{.1}^3 & N_{.2}^1 N_{.2}^3 & N_{.3}^1 N_{.3}^3 & N_{.1}^1 N_{.2}^3 + N_{.2}^1 N_{.1}^3 & N_{.2}^1 N_{.3}^3 + N_{.3}^1 N_{.2}^3 & N_{.1}^1 N_{.3}^3 + N_{.3}^1 N_{.1}^3 \end{bmatrix}, \quad (5.101)$$

a jej elementy wyznaczamy z zależności:

$$N_{.j}^i = \mathbf{G}_0^i \cdot \mathbf{G}_j. \quad (5.102)$$

Równanie (5.60) zakładające ortogonalność pola niezależnych naprężeń i rezydualnych odkształceń prowadzi do zależności:

$$\int_{B_{oh}} (\mathbf{S}_h^0)^T \tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\alpha}) dV = 0, \quad (5.103)$$

gdzie \mathbf{S}_h^0 oznacza wektor naprężeń stałych. Po podstawieniu $dV = \sqrt{G_h} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3$ i uwzględnieniu zależności (5.97-5.100) otrzymamy warunek, który musi spełniać macierz interpolacji \mathbf{M} :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{M} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = 0. \quad (5.104)$$

Równanie konstytutywne na podstawie (5.36) z uwzględnienie macierzy materiałowej wyrażonej równaniem (5.44) zapisujemy:

$$\mathbf{S}_h^E = \mathbf{C} \mathbf{E}_h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (5.105)$$

W celu wyprowadzenia układu równań metody elementów skończonych należy dokonać modyfikacji problemu wariacyjnego (5.61) tj. dyskretyzacji i linearyzacji. Dla przejrzystości wyprowadzenia zapiszmy równanie (5.61) w następującej formie:

$$a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \delta \mathbf{u}, \delta \tilde{\mathbf{E}}) = f(\delta \mathbf{u}, \delta \tilde{\mathbf{E}}), \quad (5.106)$$

gdzie $a(\bullet, \bullet)$ jest formą semidwuliniowa, a $f(\bullet)$ - semiliniową i wyrażają następujące części funkcjonału HU-WASHIZU:

$$a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \delta \mathbf{u}, \delta \tilde{\mathbf{E}}) = \int_{B_o} [\mathbf{S}^E : D\mathbf{E}^u[\delta \mathbf{u}] + \mathbf{S}^E : \delta \tilde{\mathbf{E}}] dV, \quad (5.107)$$

$$f(\delta \mathbf{u}, \delta \tilde{\mathbf{E}}) = \int_{B_o} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial_t B_o} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} dA = 0. \quad (5.108)$$

Dyskretyzując powyższe równanie metodą elementów skończonych otrzymamy następującą formę równania wariacyjnego:

$$a_h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}, \delta \mathbf{d}, \delta \boldsymbol{\alpha}) = \delta \mathbf{d}^T \int_{B_{oh}^e} \mathbf{B}(\mathbf{X}^e + \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{S}_h^E(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) dV + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \int_{B_{oh}^e} \tilde{\mathbf{M}}^T \cdot \mathbf{S}_h^E(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) dV, \quad (5.109)$$

co inaczej zapiszmy w formie uproszczonej:

$$a_h(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}, \delta \mathbf{d}, \delta \boldsymbol{\alpha}) = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{R}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \tilde{\mathbf{R}}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (5.110)$$

gdzie przez $\mathbf{R}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})$ i $\tilde{\mathbf{R}}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})$ rozumiemy wektory sił wewnętrznych zależne od parametrów węzłowych \mathbf{d} i $\boldsymbol{\alpha}$. Po prawej stronie równania wariacyjnego pozostaną wszelkie siły zewnętrzne, które w formie dyskretnej możemy zapisać w postaci:

$$f_h(\delta \mathbf{d}, \delta \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}_{ext}(\mathbf{d}) \cdot \delta \mathbf{d}, \quad (5.111)$$

gdzie $\mathbf{R}_{ext}(\mathbf{d})$ jest wektorem sił węzłowych zawierającym wpływ sił masowych i innych obciążeń zewnętrznych. W celu rozwiązania tego nieliniowego problemu użyjemy metody iteracyjnej

NEWTONA-RAPHSON'A, której szczegółowy opis znajdziemy w wielu publikacjach dotyczących metod komputerowych np. [BATHE 1996, ZIENKIEWICZ & TAYLOR 2000]. W celu wykorzystania tej metody musimy dokonać linearyzacji problemu wariacyjnego, co doprowadzi do uzyskania równań liniowych metody elementów skończonych. Zadanie nieliniowe sprowadza się do zadania liniowego na kolejnych przyrostach przemieszczenia. Linearyzację powyższego problemu wariacyjnego (5.106) jest szczegółowo przedstawiona w pracach [BISCHOFF & RAMM 1997, SCHLEBUSCH 2005] i prowadzi do następującego zlinearyzowanego układu równań metody elementów skończonych w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_G(\mathbf{d}) + \mathbf{K}_P(\mathbf{d}) & \mathbf{K}^{u\alpha}(\mathbf{d}) \\ \mathbf{K}^{\alpha u}(\mathbf{d}) & \mathbf{K}^{\alpha\alpha}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{d} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ext}(\mathbf{d}) - \mathbf{R}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) \\ -\tilde{\mathbf{R}}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}, \quad (5.112)$$

gdzie poszczególne macierze sztywności są wyrażone przez następujące zależności:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G(\mathbf{d}) = \int_{B_{oh}^e} & (S_h^{\mathbf{E}11} \cdot \mathbf{B}_{11} + S_h^{\mathbf{E}22} \cdot \mathbf{B}_{22} + S_h^{\mathbf{E}33} \cdot \mathbf{B}_{33} + \\ & + S_h^{\mathbf{E}12} \cdot \mathbf{B}_{12} + S_h^{\mathbf{E}23} \cdot \mathbf{B}_{23} + S_h^{\mathbf{E}13} \cdot \mathbf{B}_{13}) dV, \end{aligned} \quad (5.113)$$

$$\mathbf{K}_P(\mathbf{d}) = \int_{B_{oh}^e} \mathbf{B}(\mathbf{X}^e + \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{X}^e + \mathbf{d}) dV, \quad (5.114)$$

$$\mathbf{K}^{u\alpha}(\mathbf{d}) = \int_{B_{oh}^e} \mathbf{B}(\mathbf{X}^e + \mathbf{d})^T \cdot \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{M}} dV, \quad (5.115)$$

$$\mathbf{K}^{\alpha u}(\mathbf{d}) = \int_{B_{oh}^e} \tilde{\mathbf{M}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{X}^e + \mathbf{d}) dV, \quad (5.116)$$

$$\mathbf{K}^{\alpha\alpha}(\mathbf{d}) = \int_{B_{oh}^e} \tilde{\mathbf{M}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{M}} dV. \quad (5.117)$$

W układzie równań (5.112) $\Delta\mathbf{d}$ oznacza przyrosty przemieszczeń w elemencie. Ponieważ rezydualne naprężenia nie muszą być ciągłe wzdłuż granic elementu wektor przyrostów parametrów $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ może być wyeliminowany na poziomie elementu poprzez tzw. kondensację statyczną, co w rezultacie prowadzi do zredukowanego układu równań (5.112) dla elementu EAS:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d})\Delta\mathbf{d} = \mathbf{R}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (5.118)$$

czyli do czystego przemieszczeniowego problemu z nieznanym wektorem przemieszczeń węzłowych, gdzie styczną macierz sztywności możemy wyrazić przez następującą zależność:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}) = \mathbf{K}_P(\mathbf{d}) + \mathbf{K}_G(\mathbf{d}) - \mathbf{K}^{u\alpha}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{K}^{\alpha\alpha}(\mathbf{d})^{-1} \cdot \mathbf{K}^{\alpha u}(\mathbf{d}), \quad (5.119)$$

a wektor rezydium:

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}_{ext}(\mathbf{d}) - \mathbf{R}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{K}^{u\alpha}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{K}^{\alpha\alpha}(\mathbf{d})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (5.120)$$

Równanie (5.118) możemy zapisać w formie użytecznej dla metody przyrostowej:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}^k)\Delta\mathbf{d}^k = \mathbf{R}(\mathbf{d}^k, \boldsymbol{\alpha}^k), \quad (5.121)$$

gdzie przez k rozumiemy numer przyrostu a aktualizację parametrów węzłowych zapisujemy:

$$\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}^k, \quad (5.122)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = \boldsymbol{\alpha}^k + \Delta \boldsymbol{\alpha}^k, \quad (5.123)$$

a przyrost „wewnętrznych” parametrów odkształcenia $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ możemy wyrazić w funkcji przyrostów przemieszczeń węzłowych równaniem:

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}^k = -\mathbf{K}^{\alpha\alpha}(\mathbf{d})^{-1}(\mathbf{K}^{\alpha u}(\mathbf{d}) \cdot \Delta \mathbf{d}^k + \tilde{\mathbf{R}}_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})). \quad (5.124)$$

5.4.2 Zjawiska blokady

We wcześniejszych rozdziałach wspominałem o zjawisku blokady i metodach, które są zastosowane w pracy do eliminacji tych zjawisk, ale żeby mówić o szczegółach tej eliminacji z wykorzystaniem metod ANS i EAS należy wspomnieć o źródłach i rodzajach zjawiska blokady. Nie wszystkie niżej dyskutowane blokady występują w płytach ale dla pełnej uniwersalności elementu do obliczeń struktur warstwowych o dowolnym kształcie rozważania obejmują także blokady występujące w zakrzywionych cienkich strukturach. Już od lat sześćdziesiątych wiadomo, że elementy skończone bazujące na zasadzie prac wirtualnych mogą prowadzić do niepoprawnych wyników czy też charakteryzować się bardzo wolną zbieżnością. Dla pewnych zadań wyniki mogą być całkowicie nieużyteczne. Często, w odpowiedzi na obciążenie, konstrukcja liczona metodą elementów skończonych wykazuje przeszywnienie. Zjawiska odpowiedzialne za błędne czy niedoskonałe wyniki od lat siedemdziesiątych zostały nazwane w literaturze fachowej blokadą. Słowo to ma obrazować pewne blokady w strukturze uniemożliwiające rzeczywistą deformację, a wynikające z ograniczonych możliwości deformacji elementów skończonych zdefiniowanych w ujęciu przemieszczeniowym przy niedużej ilości węzłów. Ciężko jest jednoznacznie zdefiniować zjawisko blokady ponieważ w strukturach wyróżniamy kilka rodzajów tego zjawiska i różne parametry są za nie odpowiedzialne. Cytując za pracami innych badaczy np. [BISCHOFF 2005, SCHLEBUSCH 2005] możemy wyróżnić następujące rodzaje blokady:

- blokada poprzecznego ścinania (ang.: '*transverse shear locking*')
- blokada krzywizny (ang.: '*curvature thickness locking*')
- blokada objętościowa (ang.: '*volumetric locking*')
- blokada membranowa (ang.: '*membrane locking*')
- blokada ścinania (ang.: '*shear in-plane locking*')

Pierwszą metodą przeciwdziałania efektom blokady było zaproponowane w pracy [ZIENKIEWICZ et al. 1971] zredukowane całkowanie. Autorzy zaproponowali zredukowanie liczby punktów GAUSS'A przy całkowaniu niektórych składników energii sprężystej co w efekcie pozwoliło na usunięcie skutków powstania zjawisk blokady. Metodę tą autorzy zastosowali do wcześniej opracowanych elementów skończonych i wyeliminowali dzięki niej blokadę ścinania w elementach płytowych, czy blokadę membranową w elementach powłokowych. Technika ta jest najbardziej powszechną techniką unikania efektów blokady, ale do dziś nie ma racjonalnego wytłumaczenia. Blokada poprzecznego ścinania, którą udaje się skutecznie eliminować zredukowanym całkowaniem jest najbardziej powszechnym zjawiskiem tego typu, może ona wystąpić w ścinanych elementach belkowych, powłokowych czy płytowych. Mamy z nią również do czynienia w przypadku prezentowanego elementu 3-D bazującego na mechanice kontinuum, ale dedykowanego do

modelowania cienkich struktur płytowych lub powłokowych. Efekt tej blokady jest szczególnie uciążliwy ponieważ często uniemożliwia otrzymanie sensownych rezultatów, w praktycznych obliczeniach, przy rozsądnej liczbie stopni swobody.

W pracy do eliminacji niekorzystnego wpływu tego zjawiska wykorzystano metodę interpolacji odkształceń stycznych E_{13}^u i E_{23}^u , zaproponowaną przez [HUGHES & TEZDUYAR 1981] -ANS. Obok wspomnianego zredukowanego całkowania i zastosowanej metody ANS, badacze skutecznie eliminują blokadę poprzecznego ścinania np. metodą DSG (ang. *Discrete Shear Gap*) [BISCHOFF et al. 2003, BISCHOFF et al. 2004]. Następną blokadą wymienioną powyżej jest blokada krzywizny. Blokada ta jest rzadko dyskutowana w literaturze, a bywa również nazywana blokadą trapezową. Zjawisko to występuje w zginanych belkach i powłokach, których kształt początkowy jest poprowadzony po krzywiznie (elementy skończone dyskretyzujące tą krzywiznę mają kształt trapezów) i istotnym dla wyników jest odkształcenie normalne w kierunku grubości struktury E_{33}^u . Powstają tzw. sztuczne odkształcenie na tym kierunku. W celu ich uniknięcia stosuje się biliniową interpolację odkształceń E_{33}^u zaproponowaną przez [BETSCH & STEIN 1995] (metoda ANS), lub metodę DSG (metoda ta wg [BISCHOFF et al. 2004] może wyeliminować wszystkie blokady związane z geometrią tj. oprócz dwóch wcześniej wspomnianych również membranową i ścinania). W elemencie przestrzenno-powłokowym opisywanym w tym rozdziale zastosowano metodę ANS do uniknięcia wpływu jej efektu. Pozostałe trzy blokady tj. blokada objętości, membranowa i ścinania są w pracy eliminowane z wykorzystaniem metody EAS wprowadzonej przez [SIMO & RIFAI 1990]. Blokada membranowa tak jak blokada krzywizny występuje jedynie w krzywoliniowych belkach i powłokach, a związana jest ze stanem tarczowym. Blokada ścinania może wystąpić w elementach dwu- i trójwymiarowych i jest szczególnie widoczna w przypadku elementów 3-D stosowanych do dyskretyzacji struktur płaskich [BISCHOFF 2005].

Ostatnim typem zjawisk blokady jest blokada objętościowa nie zależna od geometrii a od parametrów materiałowych, a konkretnie od współczynnika POISSON'A, często w literaturze nazywana też blokadą POISSON'A (ang. *Poisson locking*). Niektórzy autorzy twierdzą, że efekt tej blokady jest widoczny jedynie w materiałach w których współczynnik POISSON'A zbliża się do wartości 0.5. Jednakże obserwujemy również wpływ tego zjawiska w przypadku materiałów polimerowych czy w metalach z deformacjami plastycznymi. Następne podrozdziały wskazują konkretne narzędzia numeryczne prowadzące do eliminacji zjawisk blokady w prezentowanym elemencie skończonym z wykorzystaniem ANS i EAS.

5.4.3 Metoda ANS (*Assumed Natural Strain*)

Metoda ANS jest zazwyczaj używana do wzbogacania izoparametrycznych elementów skończonych w ujęciu przemieszczeniowym. Główną ideą tej metody jest wybór pewnych specjalnych interpolacji dla poprzecznych odkształceń ścinających w miejsce klasycznej interpolacji bezpośrednio z przemieszczeń. Główne elementy procedury modyfikacji procesu obliczeniowego poprzecznych odkształceń ścinających możemy przedstawić w trzech kolejnych punktach:

1. obliczenie dyskretnych wartości odkształceń bezpośrednio z przemieszczeń we wcześniej zdefiniowanych tzw. punktach kolokacyjnych (w literaturze angielskojęzycznej możemy się spotkać z następującymi terminami określającymi te punkty; *collocation, sampling, tying points*)
2. Obliczenie funkcji odkształceń w obrębie elementu przez interpolację odkształceń z punktów kolokacyjnych
3. wykorzystanie odkształceń w punktach całkowania (np. punktach GAUSS'A) do dalszych obliczeń wg algorytmu

Rysunek 5.12 przedstawia cztery punkty kolokacyjne, których wybór jest związany z fizycznymi właściwościami rozpatrywanego elementu w nawiązaniu do rozpatrywanego problemu blokady. W szczególności problem doboru tych punktów jest dyskutowany np. w pracach [DVORKIN & BATHE 1984, SCHLEBUSCH 2005, BISCHOFF 2005]. Dla rozpatrywanego elementu dobrano cztery punkty o następujących współrzędnych w naturalnym układzie współrzędnych $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$: $\mathbf{A} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (+1, 0, 0)$, $\mathbf{C} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (0, -1, 0)$ i $\mathbf{D} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (0, +1, 0)$. Punkty \mathbf{A} i \mathbf{B} są wykorzystywane do interpolacji odkształceń E_{23h}^u , a \mathbf{C} i \mathbf{D} do interpolacji E_{13h}^u . Interpolacje te możemy zapisać związkiem:

$$\begin{Bmatrix} E_{23}^{ANS} \\ E_{13}^{ANS} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\mathbf{A}} & N_{\mathbf{B}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{\mathbf{C}} & N_{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{23h}^{u\mathbf{A}} \\ E_{23h}^{u\mathbf{B}} \\ E_{13h}^{u\mathbf{C}} \\ E_{13h}^{u\mathbf{D}} \end{Bmatrix}, \quad (5.125)$$

w który liniowe funkcje kształtu są wyrażone następującymi zależnościami:

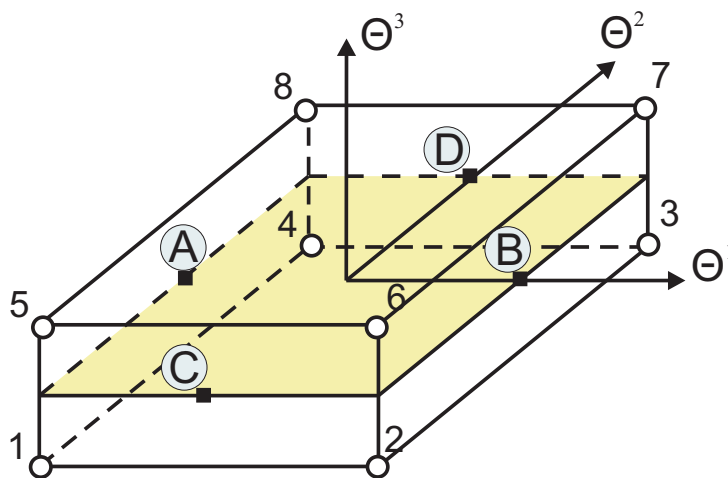
$$\begin{aligned} N_{\mathbf{A}} &= N_{\mathbf{A}}(\Theta^1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1 - \Theta^1) & N_{\mathbf{B}} &= N_{\mathbf{B}}(\Theta^1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1 + \Theta^1) \\ N_{\mathbf{C}} &= N_{\mathbf{C}}(0, \Theta^2, 0) = \frac{1}{2}(1 - \Theta^2) & N_{\mathbf{D}} &= N_{\mathbf{D}}(0, \Theta^2, 0) = \frac{1}{2}(1 + \Theta^2). \end{aligned} \quad (5.126)$$

W podejściu tym zakładamy, że odkształcenia E_{23h}^u i E_{13h}^u są stałe na grubości elementu, testy numeryczne pokazują, że założenie to jest wystarczająco efektywne dla konstrukcji cienkich. Zgodnie z wyżej zamieszczonym tokiem postępowania, przy zastosowaniu metody ANS, wyliczamy najpierw wartości odkształceń w punktach kolokacyjnych tj. $E_{23h}^{u\mathbf{A}}$, $E_{23h}^{u\mathbf{B}}$, $E_{13h}^{u\mathbf{C}}$ i $E_{13h}^{u\mathbf{D}}$, a następnie interpolujemy je wyznaczając „nowe“ wartości poprzecznych odkształceń ścinających, odpowiednio, E_{23}^{ANS} jako wartość liniowo zależną od współrzędnej Θ^1 i stałej względem Θ^2 , oraz E_{13}^{ANS} liniowo zależnej względem Θ^2 , a stałej względem Θ^1 (5.125-5.126). W praktyce sprowadza się to do tego, że w miejsce odkształceń wyliczanych z zależności:

$$E_{ijh}^u(\mathbf{d}) = (\mathbf{X}^e + \frac{1}{2}\mathbf{d})^T \mathbf{B}_{ij} \mathbf{d}, \quad (5.127)$$

przy czym $ij = 23, 13$, obliczamy te odkształcenia na podstawie poniższej formuły:

$$E_{ij}^{ANS}(\mathbf{d}) = (\mathbf{X}^e + \frac{1}{2}\mathbf{d})^T \bar{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{d}, \quad (5.128)$$



Rysunek 5.12: Punkty kolokacyjne \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} - metoda redukcji blokady poprzecznego (ANS) ścinania

gdzie „nowe“ elementy macierzy \mathbf{B} tj. $\bar{\mathbf{B}}_{13}$ i $\bar{\mathbf{B}}_{23}$ możemy zapisać:

$$\bar{\mathbf{B}}_{23} = (N_{\mathbf{A}} [A] + N_{\mathbf{B}} [B]) \otimes [E_{12}] \otimes [E_3], \quad (5.129)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{13} = (N_{\mathbf{C}} [C] + N_{\mathbf{D}} [D]) \otimes [E_{12}] \otimes [E_3], \quad (5.130)$$

$$[E_{12}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}, \quad [E_3] = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}, \quad (5.131)$$

$$[A] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.132)$$

$$[C] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.133)$$

Metoda ta jak pokazują testy numeryczne wykonane przez niezależnych autorów na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat, poczynając od prekursorów [HUGHES & TEZDUYAR 1981, DVORKIN & BATHE 1984], kończąc na pracach z ostatnich lat [VU-QUOC & TAN 2003, SCHLEBUSCH 2005], jest w pełni efektywna do eliminacji poprzecznej blokady ścinania, czyli innymi słowy eliminacji „pasożytniczych“ poprzecznych odkształceń ścinających (ang. *parasitic transverse shear strains*) powstałych w czystym zginaniu np. w prezentowanym elemencie bazującym na mechanice ośrodków ciągłych z przemieszczeniowymi stopniami swobody.

Drugą wariacją metody ANS jest biliniowa interpolacja odkształceń normalnych w kierunku grubości struktury mająca na celu likwidację sztucznych odkształceń E_{33}^u powstałych na skutek początkowej krzywizny struktury. O szczegółach powstającego w wyniku tej krzywizny zjawiska blokady, jak również o powodzie implementacji metody ANS do rozważanego elementu, zapobiegającej wpływowi jego na wyniki obliczeń, wspomniano w rozdziale opisującym ogólnie zjawiska blokady. Podobnie jak w części metody ANS, eliminującej poprzeczną blokadę ścinania, musimy wyznaczyć punkty kolokacyjne, rysunek 5.13 wskazuje te punkty, zdefiniowane na płaszczyźnie środkowej w narożnikach elementu ($\mathbf{1} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (-1, -1, 0)$, $\mathbf{2} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (+1, -1, 0)$, $\mathbf{3} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (+1, +1, 0)$ i $\mathbf{4} = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (-1, +1, 0)$). Schemat postępowania przy implementacji tej części metody ANS jest analogiczny jak w przypadku eliminacji blokady ścinania, co definiujemy w następujących po sobie zależnościach zapisanych poniżej.

$$E_{33}^{ANS} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} E_{33h}^{u1} \\ E_{33h}^{u2} \\ E_{33h}^{u3} \\ E_{33h}^{u4} \end{Bmatrix} \quad (5.134)$$

Zależność (5.134) obrazuje interpolację odkształceń E_{33h}^{uL} , gdzie $L = 1, 2, 3, 4$, co umożliwia wyznaczenie odkształcenia E_{33}^{ANS} wolnego od efektów blokady. Bilińowe funkcje kształtu mają

następującą postać:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_1(\Theta^1, \Theta^2, 0) = \frac{1}{4}(1 - \Theta^1)(1 - \Theta^2), \\
 N_2 &= N_2(\Theta^1, \Theta^2, 0) = \frac{1}{4}(1 + \Theta^1)(1 - \Theta^2), \\
 N_3 &= N_3(\Theta^1, \Theta^2, 0) = \frac{1}{4}(1 + \Theta^1)(1 + \Theta^2), \\
 N_4 &= N_4(\Theta^1, \Theta^2, 0) = \frac{1}{4}(1 - \Theta^1)(1 + \Theta^2).
 \end{aligned} \tag{5.135}$$

Faktycznie w praktycznym zastosowaniu tej metody zamieniamy odpowiednią część macierzy \mathbf{B} w związkach interpolujących odkształcenia bezpośrednio z przemieszczeń. To znaczy, że w miejsce zależności:

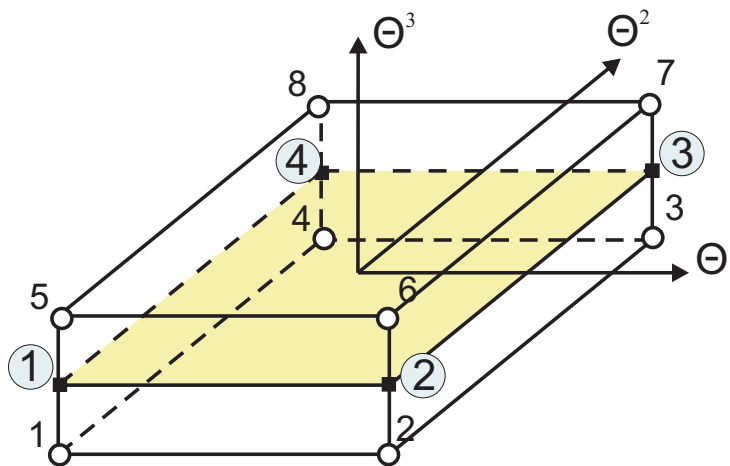
$$E_{ijh}^u(\mathbf{d}) = (\mathbf{X}^e + \frac{1}{2}\mathbf{d})^T \mathbf{B}_{ij} \mathbf{d}, \tag{5.136}$$

przy $ij = 33$, wstawiamy:

$$E_{ij}^{ANS}(\mathbf{d}) = (\mathbf{X}^e + \frac{1}{2}\mathbf{d})^T \bar{\mathbf{B}}_{ij} \mathbf{d}, \tag{5.137}$$

gdzie:

$$\bar{\mathbf{B}}_3 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \otimes [E_{22}] \otimes [E_3]. \tag{5.138}$$



Rysunek 5.13: Punkty kolokacyjne 1, 2, 3, 4 - ANS metoda redukcji 'locking-u' krzywizny

5.4.4 Metoda EAS (*Enhanced Assumed Strain*)

Praktycznie cały sens metody i jej związki zostały przedstawione w części poświęconej definicji elementu skończonego. W tej części pracy zapiszę jedynie postać macierzy \mathbf{M} , która została zaimplementowana do opisu prezentowanego elementu i wskażę, które elementy tej macierzy są odpowiedzialne za eliminację jakiej blokady. W literaturze znajdziemy wiele postaci macierzy funkcji kształtu \mathbf{M} , która prowadzi do „ulepszenia“ dyskretyzowanych odkształceń. Zróżnicowanie wyrażone jest przez ilości niezależnych parametrów będących współrzędnymi wektora α , co w efekcie prowadzi to różnego wymiaru macierzy \mathbf{M} zawierającej funkcje interpolacyjne. Funkcje te interpolują parametry wektora α , w zależności od ilości tychże parametrów, są one liniowe, biliniowe lub trójliniowe. Kompletnie ulepszenie wszystkich składowych wektora odkształceń, z założeniem, że macierz interpolacji \mathbf{M} zawiera kompletny zbiór funkcji interpolacyjnych do trójliniowego włączenie, jest zbiorem 30 parametrów „ulepszających“ [ANDELFINGER & RAMM 1993, VU-QUOC & TAN 2003]. Użycie tych 30 parametrów zwiększa ilość możliwych form rozpatrywanego elementu z 24 do 54, nie jest jednak efektywne ze względu na duży wysiłek obliczeniowy związany z odwróceniem macierzy o wymiarach 30 na 30. W celu redukcji kosztów obliczeniowych mniej istotne dodatkowe odkształcenia mogą być opuszczone. Prowadzi to do powstawania wersji metody EAS o mniejszej ilości parametrów. Różnice pomiędzy ilością parametrów badali w swoich pracach na pewnych charakterystycznych przypadkach np. [VU-QUOC & TAN 2003, KLINKEL et al. 2006]. W pracach [BISCHOFF & RAMM 1997, SCHLEBUSCH 2005] znajdziemy dokładny opis wpływu poszczególnych parametrów na odpowiadające im odkształcenia wraz z zapisem interpolacji owych parametrów. Na podstawie studiów literaturowych wraz z przykładami zastosowań zaimplementowałem do prezentowanego elementu pięcioparametrowy wektor α , który jest w pełni wystarczający wraz z metodą ANS do eliminacji, w pożądanym stopniu, blokad występujących w obliczanych w pracy zagadnieniach. Macierz interpolacji w przypadku zastosowanych pięciu parametrów ma postać;

$$\mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} 0 & \Theta^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta^2 & 0 & 0 \\ \Theta^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta^1 & \Theta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.139)$$

a wektor parametrów nią interpolowanych możemy zapisać;

$$\alpha = \{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \}^T. \quad (5.140)$$

Na koniec wyjaśnię jeszcze w dwóch słowach, które parametry odpowiadają za eliminację której blokady poprzez „ulepszenie“ odpowiednich, niedoskonałych odkształceń. Efekt blokady objętościowej jest eliminowany przez uzupełnienie odkształcenia E^u_{33} dodatkowym odpowiednio interpolowanym parametrem α_1 . „Ulepszenie“ odkształceń E^u_{11} i E^u_{22} prowadzi do eliminacji wpływu blokady membranowej, a E^u_{12} do eliminacji blokady ścinania. W dalszej części pracy zdefiniowany przestrzenno-powłokowy element, wzbogacony metodami ANS i EAS, posłuży do definiowania struktury warstwowej w zadaniach, w których ważnym elementem będzie uwzględnienia uszkodzenia powstałego na styku warstw - delaminacji i jej wpływu na stan konstrukcji. Wszystkie obliczenia przedstawione w dalszej części pracy są wykonane z wykorzystaniem systemu obliczeniowego ABAQUS®. Przedstawiony element skończony jest zdefiniowany jako zewnętrzna procedura napisana w języku programowania FORTRAN i dołączona do kodu ABAQUS®, jako element skończony użytkownika (*UEL). Dla elementu, w celu uproszczenia

zapisu i identyfikacji w przykładach, wprowadza się nazwę - EPP3D8EAS5. Całkowanie numeryczne w obrębie elementu odbywa się w 8 punktach całkowania GAUSS'A (2x2x2).

5.5 Modelowanie numeryczne kompozytów warstwowych

Jak już niejednokrotnie było wspomniane praca dotyczy nieliniowego modelowania cienkich, warstwowych konstrukcji kompozytowych ze szczególnym uwzględnieniem płyt. Rozdział ten jest poświęcony analizom numerycznym problemu brzegowego płyt z uwzględnieniem nieliniowego związku przemieszczenie-odkształcenie i propagacji uszkodzeń. W pierwszej części modelowane są płyty kompozytowe z wykorzystaniem dwuwymiarowych powłokowych elementów dostępnych w programie ABAQUS®. Płyty te są liczone z uwzględnieniem geometrycznej nieliniowości w ich zachowaniu pod obciążeniem. Właściwości materiałowe płyt zmieniają się wraz z pojawianiem się uszkodzeń. Zmiany te, jak również detekcja uszkodzeń sterowane są przez podprogramy zewnętrzne - użytkownika, napisane z wykorzystaniem języka programowania FORTRAN, a bazujące na kryteriach wytrzymałościowych zacytowanych i opisanych w rozdziale 5.2. Zastosowane dwuwymiarowe elementy są wystarczające do opisu globalnego zachowania się kompozytu warstwowego, ale nie wystarczająco efektywne w przypadku kiedy istotne dla wyników są naprężenia normalne w kierunku grubości warstwy (σ_{33}) i naprężenia styczne (σ_{13} i σ_{23}) na syku warstw. Ponieważ jednym z celów pracy jest również opis zjawiska delaminacji w strukturach warstwowych, druga część tego rozdziału traktuje o tym zjawisku, a warstwy laminatu są modelowane z wykorzystaniem elementu skończonego przestrzenno-powłokowego 3-D - EPP3D8EAS5. W rozdziale tym przytoczone są szczegóły metod umożliwiających detekcję i opis postępu uszkodzeń zarówno dla dwu- jak i trójwymiarowego podejścia. Przedstawione są algorytmy numeryczne, oraz krótkie opisy zastosowanych elementów skończonych i numerycznych metod obliczeniowych. Każda z dwóch poniższych części jest poparta przykładami numerycznymi przedstawionymi w rozdziale 5.6, w których analizowane są uprzednio opisane zjawiska. Wyniki analiz numerycznych porównane są z innymi badaniami numerycznymi bądź doświadczalnymi zaczerpniętymi z literatury.

5.5.1 Model numeryczny 2-D. Rozwój uszkodzeń w kompozycie warstwowym

Zastosowany w pracy model numeryczny służący do detekcji uszkodzeń i modelowania ich progresji aż do całkowitego zniszczenia struktury warstwowej bazuje na bardzo prostych założeniach i częściowo został już opisany we wcześniejszych częściach rozprawy. Punkt pierwszy modelowania polega na wykryciu miejsca i rodzaju pierwszego uszkodzenia które wystąpi w strukturze na skutek obciążenia. Do tego celu użyto, zaprezentowane w rozdziale 5.2, kryteria wytrzymałościowe TSAI-WU i HASHIN'A. Kryteria te są zdefiniowane w osobnych podprogramach napisanych w języku FORTRAN i łączą się z głównym procesem obliczeniowym realizowanym przez system ABAQUS® za pośrednictwem procedury *USEFLD. Jako informacje wejściowe do procedury zewnętrznej wprowadzane są składowe tensora naprężeń CAUCHY'EGO, w każdym punkcie całkowania, które są podstawiane do kryteriów wytrzymałościowych. Jeśli następuje przekroczenie wytrzymałości w danym punkcie GAUSS'A następuje zmiana parametrów materiałowych w tym punkcie według przyjętych założeń tzn. modyfikowane są sztywności związane z rodzajem uszkodzenia które powstaje w danym punkcie. Szczegóły modyfikacji zostaną przedstawione wraz z przykładem numerycznym, jako dane. Powstaje nowy materiał, który jest obciążany tym samym obciążeniem które spowodowało powstanie pierwszego uszkodzenia. Efektem tego podejścia jest wielokrotne poszukiwanie uszkodzenia, w kolejnych przyrostach obciążenia, a po wykryciu każdego z nich modyfikacja stanu materiału. Końcowym rezultatem tego procesu jest całkowite zniszczenie konstrukcji tzn. ostatnia warstwa kompozytu ulega modyfikacji i nie jest w stanie przenieść następnych przyrostów obciążenia. Zanim opiszę i zdefiniuję narzędzia numeryczne użyte do wyznaczenia stanu naprężenie w konstrukcji warstwowej powtórzę zależności opisujące kryteria

wytrzymałościowe ograniczając je jedynie do zadania płaskiego i nie definiując ponownie wielkości w nich występujących (rozdział 5.2):

Kryterium TSAI-WU:

$$F_{11}\sigma_{11} + F_{22}\sigma_{22} + F_{12}\sigma_{12} + 2F_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + F_{1111}\sigma_{11}^2 + F_{2222}\sigma_{22}^2 + F_{1212}\sigma_{12}^2 \geq 1 \quad (5.141)$$

Kryteria HASHIN'A:

Zerwanie włókien (rozciąganie):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma_{11} > 0, \quad (5.142)$$

Wyboczenie włókien (ściskanie):

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^c}\right) \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma_{11} \leq 0, \quad (5.143)$$

Uszkodzenie matrycy (rozciąganie):

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{R_{22}^t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma_{22} > 0, \quad (5.144)$$

Uszkodzenie matrycy (ściskanie):

$$\frac{1}{R_{22}^c} \left[\left(\frac{R_{22}^c}{2R_{12}}\right)^2 - 1 \right] \sigma_{22} + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{2R_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad \text{dla} \quad \sigma_{22} \leq 0. \quad (5.145)$$

Powyższe kryterium HASHIN'A związane z uszkodzeniem matrycy przy $\sigma_{22} \leq 0$ dla płaskiego stanu naprężenia jest zmodyfikowane w stosunku do ogólniejszego trójwymiarowego (5.16) sformułowania, założone jest, że wytrzymałości ścinające w płaszczyznach x_1x_2 i x_2x_3 są równe i są oznaczone jako R_{12} . W wyżej wymienionych kryteriach widać jedną zasadniczą różnicę, kryterium TSAI-WU wskazuje powstanie uszkodzenia ale nie wskazuje jego rodzaju w przeciwieństwie to kryterium HASHIN'A, a jak wcześniej wspomniałem informacja o rodzaju uszkodzenia jest niezbędna do odpowiedniej modyfikacji zhomogenizowanego stanu materiału uszkodzonego. W tym celu wzbogaca się kryterium TSAI-WU o tzw. wskaźniki formy uszkodzenia, które można zdefiniować za [REDDY 1997] w następujący sposób:

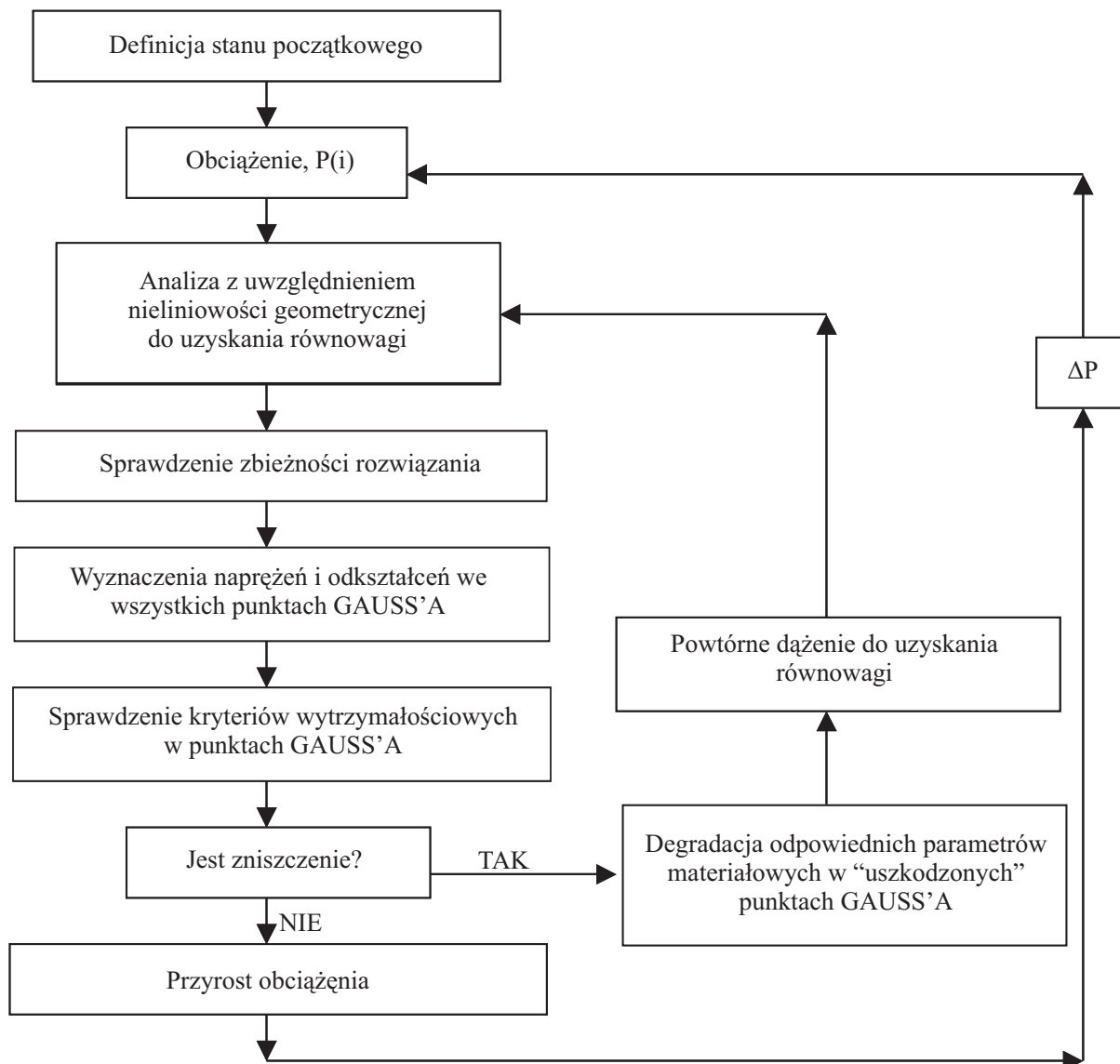
$$H_{11} = F_{11}\sigma_{11} + F_{1111}\sigma_{11}^2, \quad (5.146)$$

$$H_{22} = F_{22}\sigma_{22} + F_{2222}\sigma_{22}^2, \quad (5.147)$$

$$H_{12} = F_{1212}\sigma_{12}^2 \geq 1. \quad (5.148)$$

Wskaźnik o najwyższej wartości decyduje o rodzaju uszkodzenia i tak jeśli dominującym wskaźnikiem jest H_{11} oznacza to, że uszkodzenie nastąpiło na kierunku ułożenia zbrojenia czyli jest to zerwanie lub wyboczenie włókna, jeśli dominuje H_{22} uszkodzenia doznała matryca (powstanie rysy), a w przypadku dominacji H_{12} doszło do ścięcia warstwy. Typowe zadanie oszacowania powstawania i rozwoju uszkodzeń w kompozycie warstwowym z wykorzystaniem powyższego sposobu modelowania musi być rozważane przyrostowo, a na każdym przyroście obciążenia po

uzyskaniu zbieżności są wyznaczone naprężenia w globalnym układzie współrzędnych w każdej warstwie (na płaszczyźnie środkowej) i w każdym punkcie całkowania GAUSS'A. Następnie naprężenia są transformowane do lokalnych, materialnych układów współrzędnych poszczególnych warstw i dopiero te naprężenia są kontrolowane poprzez kryteria wytrzymałościowe i jeśli ich nie spełniają następuje uszkodzenie. Cały ten proces jest obrazowo przedstawiony w blokowym algorytmie postępowania, patrz rysunek 5.14. Na rysunku tym przez P oznaczono wektor obciążeń zewnętrznych, indeks i oznacza aktualną wartość obciążenia a ΔP przyrost obciążenia w kolejnym kroku.



Rysunek 5.14: Blokowy algorytm postępowania przy modelowaniu rozwoju uszkodzeń w kompozycie warstwowym

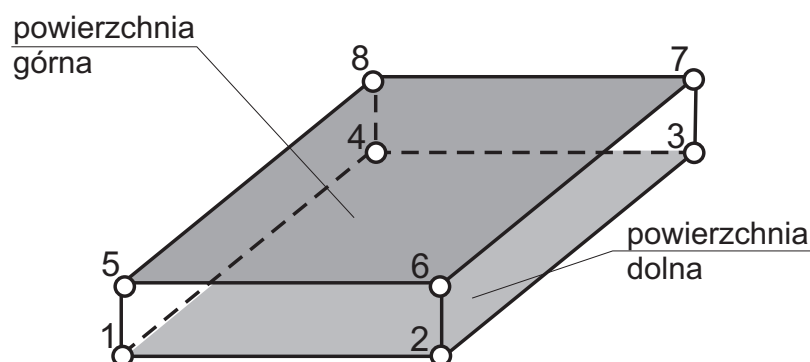
W przypadku płyt włóknokompozytowych o strukturze warstwowej, będących tematem rozprawy, uwzględniono w procesie obliczeniowym wpływ nieliniowości geometrycznej w sensie VON KARMANA, przy założeniu liniowych związków konstytutywnych. Użycie nieliniowych związków pomiędzy odkształceniem a przemieszczeniem jest konieczne w przypadku płyt z dużymi przemieszczeniami do poprawnego opisu zachowania się zginanej płyty kompozytowej, które jest w obszarze zainteresowania niniejszej pracy. Matematyczny zapis zastosowanego ujęcia geometrycznej

nieliniowości znajduje się w opisie teoretycznym do systemu obliczeniowego ABAQUS® [ABAQUS 2004]. Do modelowania poszczególnych warstw kompozytu użyto dwa elementy skończone dostępne w bibliotece systemu ABAQUS®. Są to jak wcześniej wspomniałem dwuwymiarowe elementy powłokowe, które w programie oznaczono jako S4 i S4R, gdzie R oznacza zredukowane całkowanie i jest to główna różnica pomiędzy zastosowanymi elementami. Liczba 4 wskazuje ilość węzłów w elemencie skończonym, a w każdym z węzłów jest 6 stopni swobody - 3 przemieszczenia i 3 obroty. Elementy te dają możliwość modelowania zarówno cienkich jak i grubych płyt przy wszystkich rodzajach obciążenia. W zależności od geometrii struktury jest ona liczona jako dźwigar powierzchniowy cienki zgodnie z założeniami klasycznej teorii KIRCHOFF'A, lub według teorii pierwszego rzędu dla dźwigarów grubych. W celu uniknięcia blokady ścinania zastosowane jest w przypadku elementu S4R zredukowane całkowanie, w przypadku S4 metoda ANS. Do rozwiązania układu równań na każdym kroku obciążenia jest zastosowana metoda NEWTONA-RAPHSON'A. W rozdziale 5.6 zaprezentowane są przykłady analizowane zgodnie z opisanym algorytmem.

5.5.2 Model numeryczny 3-D. Delaminacja

Podrozdział ten jest poświęcony opisowi modelu, który posłużył w niniejszej pracy do opisu detekcji i rozwoju, jednego z powszechniejszych i bardzo niebezpiecznych dla konstrukcji uszkodzeń, jakim jest delaminacja. W literaturze znajdziemy wiele metod pozwalających na opis tego zjawiska i jego rozwoju w konstrukcji, kilka z nich zostało wskazanych w opisie literatury związanej z uszkodzeniem kompozytów. Sama istota delaminacji wraz z czynnikami ją wywołującymi są jednym z przedmiotów rozdziału 5.1. Ta część pracy skupia się na przedstawieniu zastosowanego sposobu modelowania tego zjawiska.

Model, o którym mowa nazywany jest w literaturze angielskojęzycznej *cohesive zone technique* i bazuje na zastosowaniu na styku warstw struktury, w miejscu gdzie spodziewamy się delaminacji, specjalnie do tego celu sformułowanego elementu skończonego, który dzięki swym właściwościom umożliwia modelowanie zarówno powstawania jak i rozwoju delaminacji. Element ten dalej będziemy nazywać elementem kohezyjnym (w literaturze ang. *cohesive element*, *interface element*). W pracy zastosowany jest trójwymiarowy kohezyjny element o ustalonej grubości, który obrazuje warstwę adhezyjną w laminacie, np. klej epoksydowy spajający dwie sąsiednie warstwy. Element ten jest dostępny w bibliotece elementów systemu obliczeniowego ABAQUS® i nosi nazwę COH3D8, jest to element ośmiowęzłowy z trzema przemieszczeniowymi stopniami swobody w każdym z węzłów. Poprzez swoją strukturę zastosowany element kohezyjny w naturalny sposób jest łączony w układzie dyskretnym ze elementami skończonymi modelującymi poszczególne



Rysunek 5.15: Element Kohezyjny COH3D8

warstwy kompozytu. Warstwy kompozytu w przyjętym modelu są dyskretyzowane elementami przestrzenno-powłokowymi ze wzbogaceniami eliminującymi efekt blokad - opisanymi i zdefiniowanymi w rozdziale 5.4 .

W związku z specyfiką zjawiska delaminacji element kohezyjny użyty w pracy bazuje na odpowiednim zdefiniowaniu zależności pomiędzy naprężeniami a względnymi przemieszczeniami, ale jedynie tymi które są związane ze delaminacją. Mówiąc innymi słowy użycie elementu kohezyjnego w tym ujęciu daje nam odpowiedź jakie wartości mają względne przemieszczenia w kierunku normalnym do obszaru wzajemnego oddziaływania warstw oraz w dwóch kierunkach stycznych do tego obszaru. Drugim parametrem otrzymanym w wyniku obliczeń jako odpowiedź elementu kohezyjnego jest wektor naprężeń, ale jedynie trójskładowy tzn. współrzędnymi tego wektora są naprężenia odpowiadające kierunkom wcześniej opisanych przemieszczeń względnych. Tymi trzema komponentami wektora naprężeń są:

σ_{33} - naprężenie normalne w kierunku grubości struktury,

σ_{13} - naprężenie styczne w płaszczyźnie x_1, x_3 ,

σ_{23} - naprężenie styczne w płaszczyźnie x_2, x_3 .

Przez wcześniej wymienione względne przemieszczenia rozumiemy różnicę pomiędzy przemieszczeniami dolnej i górnej powierzchni elementu kohezyjnego. W efekcie przemieszczenia względne, zwane też separacją prowadzą do modelowego powstawania i rozwoju delaminacji. Definiując specyfikę skończonego elementu kohezyjnego możemy powiedzieć, że są to dwie płaszczyzny, połączone odpowiednio z sąsiednimi warstwami struktury warstwowej, o ustalonej odległości między sobą (grubość elementu kohezyjnego), a zmiana ich wzajemnego położenia, po przekroczeniu pewnych wartości granicznych, modeluje powstawanie nieciągłości pomiędzy warstwami w dyskretyzowanej konstrukcji warstwowej - delaminację. Oczywiście o poziomie obciążenia, które spowoduje powstanie delaminacji decydują w głównej mierze parametry charakteryzujące strefę kohezyjną, a konkretnie wytrzymałości najczęściej wyznaczone doświadczalnie dla kierunków odpowiadających naprężeniom związanym z powstawaniem tego uszkodzenia.

Detekcja delaminacji polega na podstawieniu odpowiednich wytrzymałości i naprężeń obliczeniowych w elemencie kohezyjnym do pewnych zależności matematycznych zwanych kryteriami wytrzymałościowymi. W modelu zastosowano naprężeniowe kryterium wytrzymałościowe HASHIN'A, które uwzględnia interakcję naprężeń w przypadku powstawania delaminacji, patrz rozdział 5.2.3. Zależność konstytutywna pomiędzy naprężeniem a odkształceniem w elemencie kohezyjnym do momentu powstania uszkodzenia jest sprężysta. Wektor odkształceń w tym modelu jest podobnie jak wektor naprężeń trójskładowy, a poszczególne jego składniki są to odpowiednie przemieszczenia względne, dzielone przez grubość elementu kohezyjnego. Zredukowane wektory odkształceń i przemieszczeń definiujemy:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad (5.149)$$

a liniowo-sprężyste równanie konstytutywne w zapisie macierzowym ma postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.150)$$

gdzie macierz sztywności ma współrzędne tylko na głównej przekątnej:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{33} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & 0 \\ 0 & 0 & K_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.151)$$

W modelu przyjęto, że sztywności elementu kohezyjnego są równe odpowiednim parametrom materiałowym (modułom sprężystym) charakteryzującym matrycę modelowanego kompozytu:

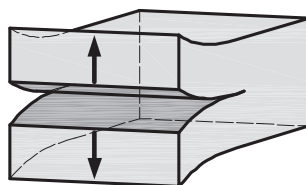
$$K_{33} = E_3 \quad , \quad K_{23} = 2G_{23} \quad \text{i} \quad K_{13} = 2G_{13}. \quad (5.152)$$

Założenie to jest uzasadnione ponieważ w rzeczywistych konstrukcjach warstwowych dochodzi do delaminacji na styku warstw gdzie spoiną jest najczęściej ten sam materiał który stanowi osnowę w warstwie. Często uwarstwienie spowodowane jest jedynie wynikiem procesu technologicznego - kolejne dokładanie rodzin włókien ciągłych i zatapianie ich w matrycy [MATTHEWS & RAWLINGS 1999, OCHELSKI 2004]. W przypadku łączenia dwóch różnych materiałów i określania delaminacji na ich styku, należy znać stałe materiałowe spoiwa. Następnym niezbędnym parametrem charakteryzującym element kohezyjny jest jego grubość.

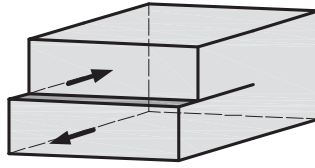
W wielu pracach autorzy definiują element kohezyjny jako element z zerową grubością [REMMERS & DE BORST 2003, ALFANO & CRISFIELD 2001, CAMANHO et al. 2002]. Bardziej naturalne wydaje się jednak założenie jakiejś grubości warstwy adhezyjnej, a co za tym idzie sformułowanie elementu kohezyjnego jako elementu z początkową, skończoną grubością. W miejscu tym pojawia się problem określenia tej grubości. W literaturze przyjmuje się, że stosunek grubości warstwy adhezyjnej do grubości warstwy kompozytu powinien być znacznie mniejszy od jeden [DAUDEVILLE et al. 1995]. W praktyce na podstawie testów numerycznych i ich porównań z doświadczeniami określono, że stosunek ten na poziomie 0.01, daje zadowalające wyniki [WAGNER et al. 2001]. Jak już wcześniej wspomniałem element kohezyjny pozwala zarówno przewidzieć powstanie jak i rozwój delaminacji dzięki zastosowanemu prawu konstytutywnemu bazującemu na mechanice niszczenia. Określenie poziomu naprężenia które spowoduje powstanie delaminacji polega na zastosowaniu odpowiedniego kryterium wytrzymałościowego, do tego czasu zachowanie elementu kohezyjnego jest sprężyste. Po przekroczeniu tej wielkości związki konstytutywne ulegają modyfikacji i następuje „słabnięcie” materiału. Parametrem który modyfikuje sztywność elementu jest tak zwany parametr uszkodzenia (ang. *damage parameter*). W modelu występuje pewne sprężenie na etapie przyrostu delaminacji pomiędzy założeniami mechaniki niszczenia (CDM) a mechaniki pęknięcia (FM) tzn. parametrem decydującym o przebiegu „słabnięcia” materiału jest tzw. energia pęknięcia G . W dalszej części tego rozdziału opisany jest zarówno sposób detekcji jaki i model rozwoju delaminacji zastosowane w pracy.

Inicjacja delaminacji

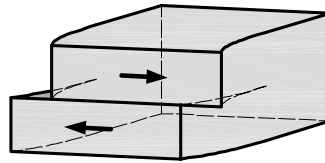
W przypadku rozpatrywanego w pracy trójwymiarowego problemu, przyjęty model bazujący na relacji pomiędzy naprężeniami a względnymi przemieszczeniami zakłada trzy różne typy separacji, tj normalna do płaszczyzny zespolenia oraz dwa rodzaje separacji styczne do tej płaszczyzny. Są to klasyczne dla mechaniki pęknięcia formy utraty ciągłości (pęknięcia) w materiale i graficznie są one przedstawione na poniższych rysunkach 5.16, 5.17 i 5.18.



Rysunek 5.16: Pęknięcie (delaminacja) w kierunku normalnym - forma I



Rysunek 5.17: Pęknięcie (delaminacja) w jednym z kierunków stycznych - forma II



Rysunek 5.18: Pęknięcie (delaminacja) w drugim kierunku stycznym - forma III

Delaminacja powstaje kiedy naprężenie pomiędzy warstwami osiągnie wartość wytrzymałości odpowiadającej temu naprężeniu. Do detekcji wartości naprężenia, przy którym nastąpi to zjawisko możemy użyć różnego rodzaju znane z literatury, a częściowo zaprezentowane w pracy kryteria wytrzymałości, patrz rozdział 5.2. Ważne jest tutaj żeby użyte kryterium dobrze odzwierciedlało rzeczywisty stan materiału tzn. w kryterium tym musi być zawarta wzajemna interakcja pomiędzy składowymi tensora naprężenia. Nie wystarczy więc porównać naprężenia z odpowiadającą mu wytrzymałością, należy to zrobić poprzez podstawienie wszystkich mających wpływ na dane zjawisko (np. delaminację) naprężeń do związku matematycznego (kryterium wytrzymałościowego), który pozwoli na uwzględnienie złożonego mechanizmu powstawania uszkodzenia. Dla pojedynczej czystej formy delaminacji *I*, *II* lub *III* wystarczające byłoby porównanie naprężenia z odpowiednią wytrzymałością, w pracy jednak jest rozważany ogólny przypadek delaminacji, która może być dowolną wariacją czystych form w zależności od obciążenia konstrukcji. W pracy zastosowana jest kwadratowa funkcja naprężeń zaproponowana przez HASHIN'A [HASHIN 1980]. Kryterium to możemy zapisać:

$$\left(\frac{\langle\sigma_{33}\rangle}{R_{33}^t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{R_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{R_{13}}\right)^2 \leq 1, \quad (5.153)$$

gdzie σ_{33} jest naprężeniem normalnym na styku warstw kompozytu (w elemencie kohezyjnym), a σ_{23} i σ_{13} są odpowiednimi naprężeniami stycznymi w elemencie kohezyjnym, patrz (5.149) i (5.150). Naprężenia te są wyznaczone w punktach całkowania elementu kohezyjnego, dla zastosowanego elementu są to cztery punkty leżące na płaszczyźnie środkowej elementu. Wielkości R_{33}^t , R_{13} i R_{23} są to odpowiednio wytrzymałość na rozciąganie w kierunku normalnym do powierzchni elementu kohezyjnego czy innymi słowy w kierunku grubości struktury warstwowej oraz wytrzymałości na ścinanie w płaszczyźnie styku warstw. Dla pełnej jasności w rozdziale 5.2.3 na rysunku 5.6 kryterium to jest przedstawione graficznie. Symbol $\langle\bullet\rangle$ oznacza nawias

MACAULAY'A co matematycznie możemy zapisać:

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{2}(|\bullet| + \bullet). \quad (5.154)$$

W efekcie oznacza to, że jedynie naprężenia rozciągające σ_{33} mają wpływ na powstawanie delaminacji, tj. są włączone do prezentowanego kryterium wytrzymałościowego. Wybór tego kryterium jest zasadny, ponieważ uwzględnia ono złożony mechanizm uszkodzenia na styku lamin, a jednocześnie wymaga jedynie trzech parametrów wytrzymałościowych do pełnej modelowej detekcji delaminacji, a co najważniejsze prowadzi to wyników zgodnych z doświadczalnymi. Parametry wytrzymałościowe łatwo wyznaczyć na drodze doświadczalnej z wykorzystaniem klasycznych eksperymentów dla poszczególnych form delaminacji ([BENZEGGAGH & KENANE 1996, PEREIRA & DE MORAIS 2006]).

Rozwój delaminacji

Rozwój delaminacji może być opisany z wykorzystaniem prawa ewolucji uszkodzenia. Prawo to wywodzi się z założeń mechaniki niszczenia i prowadzi do degradacji sztywności materiału związanych z uszkodzeniem, która zaistniała w danym punkcie materialnym, tzn. dla którego kryterium wytrzymałości zostało osiągnięte. Kluczowym parametrem ewolucji zniszczenia jest tak zwany parametr zniszczenia D , który w zależności od typu problemu może być wielkością skalarną lub tensorem [LEMAITRE & DESMORAT 2005]. W odniesieniu do rozważanego problemu delaminacji prawo ewolucji może być podzielone na trzy fazy. Fazy te można nazwać i zdefiniować w następujący sposób;

Faza liniowo-sprężysta: $\delta < \delta_0$, naprężenie w elemencie kohezyjnym (na styku elementów) wzrasta liniowo do osiągnięcia odpowiadającej mu wytrzymałości R . Odpowiednie przemieszczenie względne osiąga wartość δ_0 w momencie osiągnięcia przez naprężenie wartości granicznej (wytrzymałości). Relacja między przemieszczeniem względnym a naprężeniem do osiągnięcia wartości granicznych odpowiadających inicjacji delaminacji zapisujemy następującą zależnością:

$$\sigma = K \frac{\delta}{h_c}. \quad (5.155)$$

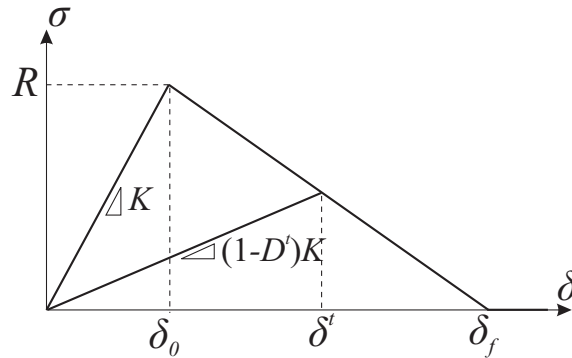
Faza osłabienia materiału: $\delta_0 \leq \delta \leq \delta_f$, naprężenie w elemencie kohezyjnym, którego wartość osiągnęła wartość dopuszczalną w fazie pierwszej zaczyna liniowo maleć wraz ze wzrostem względnego przemieszczenia aż do osiągnięcia zerowej wartości. Osiągnięcie wartości zerowej następuje w momencie odpowiadającym pełnej separacji dwóch sąsiednich warstw kompozytu w danym punkcie tj. osiągnięciu wartości przemieszczenia względnego δ_f . Akumulacja zniszczenia na styku warstw jest reprezentowana przez parametr zniszczenia D . Parametr ten jest równy zero kiedy w danym punkcie nie ma uszkodzenia i osiąga wartość jeden jeśli połączenie warstw ulega całkowitemu zniszczeniu. Proces ten jest sterowany przez następujący związek:

$$\sigma = (1 - D)K \frac{\delta}{h_c}. \quad (5.156)$$

Faza separacji: $\delta > \delta_f$, Naprężenie w elemencie kohezyjnym jest równe zero. Oznacza to, że sąsiednie warstwy są całkowicie rozseparowane i stanowią dwa osobne elementy konstrukcyjne:

$$\sigma = 0. \quad (5.157)$$

Dla lepszego rozpoznania opisywanego problemu na rysunku 5.19 przedstawiona jest zależność między względnym przemieszczeniem, a naprężeniem. Na rysunku wprowadzono dodatkowe oznaczenia w celu przedstawienia modyfikacji sztywności w chwili t odpowiadającej obciążeniu które powoduje słabnięcie materiału i tak δ^t oznacza względne przemieszczenie górnej i dolnej powierzchni elementu kohezyjnego a D^t jest parametrem zniszczenia, którego wartość zależy od δ^t i jest z przedziału liczb między zero a jeden.



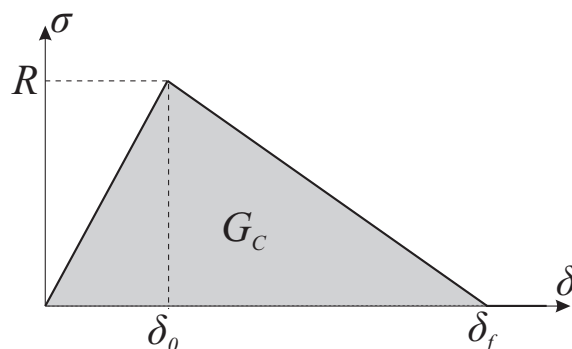
Rysunek 5.19: Ewolucja uszkodzenia - biliniowe prawo konstytutywne dla elementu kohezyjnego

W wyżej zdefiniowanych fazach h_c oznacza grubość warstwy kohezyjnej, a K jest początkową sztywnością. Powyższe zależności są zdefiniowane dla jednej, dowolnej formy pęknięcia i jedynie dla dodatnich naprężeń, a jak już wcześniej wspominałem mechanika pęknięcia rozróżnia trzy formy separacji. Pierwsza nazywana rozwarciem rysy (forma *I*), gdzie kierunek przemieszczenia jest prostopadły do planu rysy i dwie formy ścinania czy poślizgu (formy *II* i *III* - kierunki przemieszczeń względnych leżą na planie rysy, patrz rysunki 5.16, 5.17 i 5.18). W praktyce charakter delaminacji może być związany z jedną z tych form, ale może być też znacznie bardziej skomplikowany i zależeć od dwóch lub wszystkich trzech form. Dlatego równanie konstytutywne należy zapisać dla ogólnego przypadku:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - D_{33}) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - D_{23}) & 0 \\ 0 & 0 & (1 - D_{13}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{33} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & 0 \\ 0 & 0 & K_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & D_{23} & 0 \\ 0 & 0 & D_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{33} & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & 0 \\ 0 & 0 & K_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle -\varepsilon_{33} \rangle \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.158)$$

gdzie parametr zniszczenia D_{i3} zależy od relacji pomiędzy charakterystycznymi odkształceniami, ewentualnie względnymi przemieszczeniami – patrz rysunek 5.19, a aktualnymi odkształceniami w punkcie całkowania dla konkretnej formy delaminacji. W fazie sprężystej parametr zniszczenia D_{i3} jest równy zero, a od momentu osiągnięcia przez naprężenie w danym punkcie całkowania wartości odpowiadającej wytrzymałości materiału w odpowiednim kierunku parametr ten zaczyna się zwiększać aż osiągnie wartość jeden przy której materiał traci sztywność i następuje separacja dwóch sąsiednich warstw.

Kluczowym zadaniem jest opis zależności parametru zniszczenia od odkształcenia, czyli mówiąc innymi słowami odpowiedź na pytanie jaka funkcja opisuje zmianę tego parametru w przedziale od zera do jeden wraz z przyrostem odkształcenia. Faza ta nazywana często słabnięciem



Rysunek 5.20: Energia pękania - biliniowe prawo konstytutywne dla elementu kohezyjnego

materiału jest opisywana w wielu pracach, a w przypadku delaminacji funkcjami używanymi do opisu jej przebiegu są funkcje liniowe lub wykładnicze [ABAQUS 2004, TURON et al. 2004]. W pracy przyjęto funkcję liniową do opisu słabnięcia materiału, jako wystarczające uproszczenie - zgodność wyników numerycznych z doświadczeniem. Jako parametr sterujący prawem ewolucji uszkodzenia przyjęto energię pękania G_C . W miejscu tym następuje sprzężenie założeń mechaniki niszczenia i mechaniki pękania - rysunek 5.20. Energia dyssypacji odpowiada polu powierzchni pod biliniowym prawem konstytutywnym elementu kohezyjnego, rysunek 5.20. W pracy kryterium zastosowane do przewidzenia rozwoju delaminacji, z uwzględnieniem jej złożenia (ang. *mixed-mode*), bazuje na założeniach mechaniki pękania. Metoda ta zakłada, że uszkodzenie (delaminacja) rozwija się kiedy energia pękania G osiągnie wartość krytyczną G_C . Wartość krytyczną energii otrzymujemy z eksperymentów podobnie jak wytrzymałość w specjalnych próbach osobno dla poszczególnych form pękania. Interakcja form delaminacji może być uwzględniona w modelu poprzez różne zależności, które są przedmiotem badań wielu naukowców, kilka z nich znaleźć można np. w pracach [CAMANHO et al. 2002, TURON et al. 2004]. Najczęściej zależności te są zależnościami empirycznymi i są wyprowadzane przez badaczy na podstawie doświadczeń dla konkretnych materiałów. W pracy został przyjęty związek kwadratowy uwzględniający interakcje energii pękania poszczególnych form delaminacji. Związek ten wyraża się następującą zależnością [ALFANO & CRISFIELD 2001]:

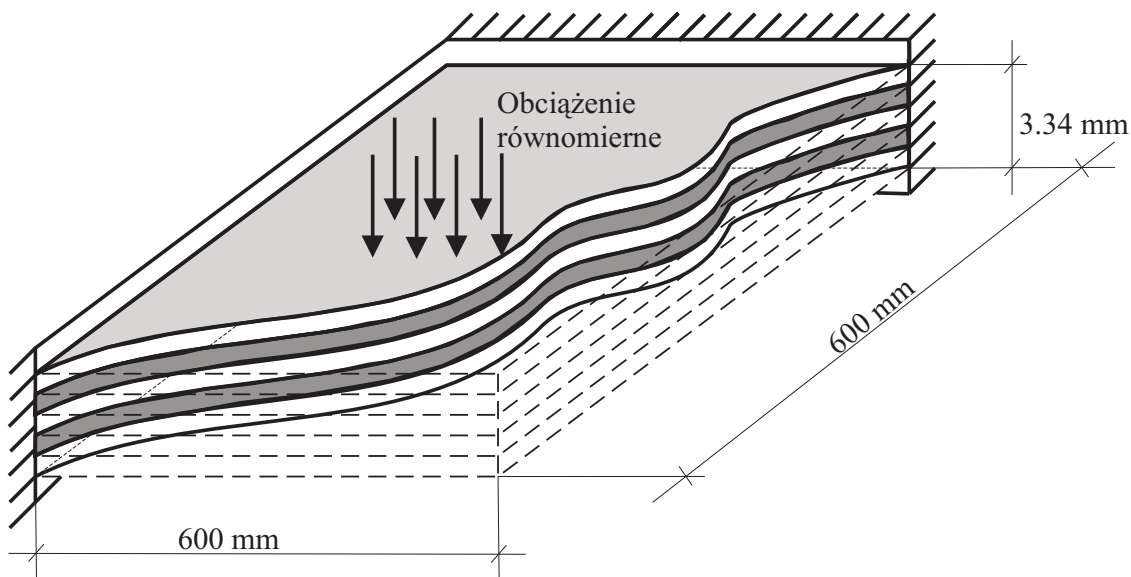
$$\left(\frac{G_I}{G_{I,C}}\right)^2 + \left(\frac{G_{II}}{G_{II,C}}\right)^2 + \left(\frac{G_{III}}{G_{III,C}}\right)^2 = 1, \quad (5.159)$$

gdzie G_I , G_{II} i G_{III} są to energie pękania związane z odpowiednimi formami delaminacji; odpowiednio rozwarciem rysy i poślizgami w dwóch kierunkach. Wartości w mianowniku są to krytyczne wartości energii pękania $G_{I,C}$, $G_{II,C}$ i $G_{III,C}$, po których osiągnięciu następuje postęp delaminacji w kierunku normalnym lub w jednym z kierunków stycznych, odpowiednio w zależności od formy pękania.

5.6 Wyniki analiz numerycznych

5.6.1 Zginana płyta warstwowa - rozwój uszkodzenia

Analiza numeryczna prezentowana w tym podrozdziale dotyczy detekcji i rozwoju uszkodzeń w zginanej płycie warstwowej poprzez użycie kryteriów wytrzymałościowych. Model użyty w przykładzie bazuje na prostych założeniach inżynierskich opisanych w rozdziale 5.5.1 i jest realizowany wg algorytmu zaprezentowanego na schemacie blokowym (rys. 5.14). Elementy skończone użyte do dyskretyzacji płyty kompozytowej w skrócie również są opisane w rozdziale 5.5.1, a szczegółowo w [ABAQUS 2004]. Rysunek 5.21 obrazuje geometrię, warunki brzegowe i rodzaj obciążenia poddanej badaniom numerycznym płyty. Jest to płyta kwadratowa i utwierdzona na całym obwodzie, a obciążenie powierzchniowe, równomiernie rozłożone, przyłożone jest do powierzchni górnej. Płyta składa się z pięciu warstw, a każda z nich jest jednokierunkowo zbrojona włóknami ciągłymi - szklanymi typu E zatopionymi w matrycy poliestrowej. Kąt pomiędzy materialnymi układami osi poszczególnych warstw, a układem globalnym płyty wskazany jest przez następujący zapis [0,45,90,-45,0]. Faza włóknista stanowi 41.5% w każdej warstwie. Parametry materiałowe warstwy zestawione są w tabeli 5.1. W tabeli 5.2 zestawione są wytrzymałości warstwy w odpowiednich kierunkach otrzymane z doświadczeń dla warstwy. Wyjaśnienie znaczenia poszczególnych symboli opisujących wytrzymałości znajdują się w rozdziale 5.2. Wszystkie parametry materiałowe oraz geometria płyty zaczerpnięte są z pracy [PADHI et al. 1998].



Rysunek 5.21: Płyta warstwowa - geometria, warunki brzegowe i obciążenia

Tablica 5.1: Stałe materiałowe dla warstwy ortotropowej wykonanej z matrycy poliestrowej i włókien szklanych ciągłych typu E

E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	G_{12} [MPa]	ν_{12}
23600.000	10000.00	1000.00	0.23

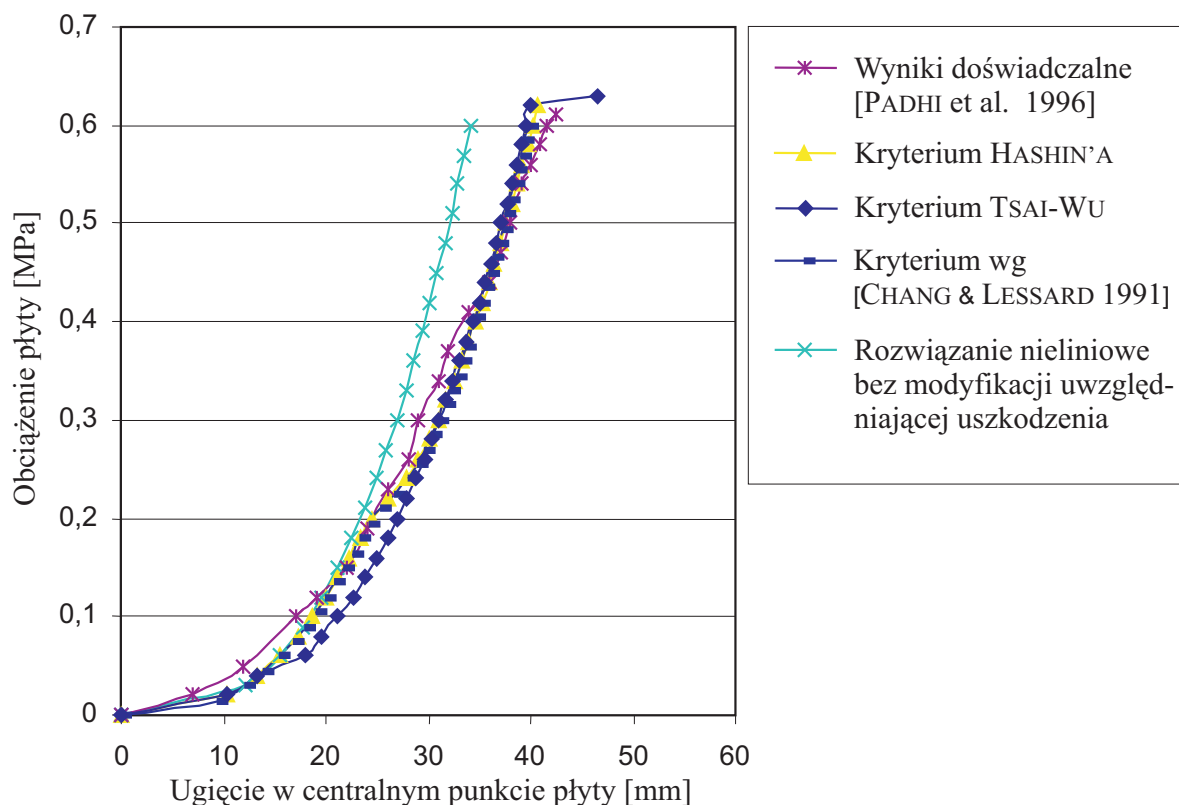
Tablica 5.2: Parametry wytrzymałościowe warstwy ortotropowej poliester - włókno szklane E

R_{11}^t [MPa]	R_{11}^c [MPa]	R_{22}^t [MPa]	R_{22}^c [MPa]	R_{12} [MPa]
735.00	600.00	45.00	100.00	45.00

Realizacja wyżej wspomnianego algorytmu numerycznego odbywa się z wykorzystaniem procesora ABAQUS\Standard. Obciążenie przykładane jest przyrostowo i po osiągnięciu zbieżności przemieszczeń w nieliniowo geometrycznej analizie na każdym przyroście wyznaczany jest tensor odkształceń i naprężeń w globalnym układzie współrzędnych w każdym punkcie GAUSS'A. Następnie naprężenia są transformowane do materialnego układu współrzędnych odpowiedniej warstwy i podstawiane do kryteriów wytrzymałościowych TSAI-WU lub HASHIN'A. Kryteria te są zdefiniowane w zewnętrznej procedurze użytkownika napisanej w języku skryptowym FORTRAN, a łączą się z procesorem ABAQUS\Standard dzięki komendzie *USER DEFINED FIELD. Jako dane wejściowe do procedury zewnętrznej wprowadzane są naprężenia w materialnym układzie współrzędnych warstwy w każdym punkcie GAUSS'A. Wewnątrz procedury następuje porównanie naprężeń z odpowiednimi wytrzymałościami z uwzględnieniem interakcji. W przypadku kryterium HASHIN'A (zależności 5.142-5.145) wraz ze stwierdzeniem uszkodzenia jako dana wyjściowa jest jego forma. Kryterium TSAI-WU (nierówność 5.141) pozwala stwierdzić jedynie powstanie uszkodzenia, więc dodatkowo w procedurze znajdują się zależności (5.146-5.147) umożliwiające określenie formy uszkodzenia. Jako informację wyjściową z procedury zewnętrznej procesor otrzymuje dla każdego punktu GAUSS'A trzy wielkości połowe FV1, FV2 i FV3, które przyjmują wartości; 0 - nie ma uszkodzenia (wartość początkowa), 1 - jest uszkodzenie. Jeśli jedna lub więcej z wielkości połowych osiągnie wartość 1 następuje modyfikacja parametrów sprężystości materiału w „uszkodzonym” punkcie całkowania. Należy tu dodać, że wielkość połowa FV1 związana jest z uszkodzeniem włókna, FV2 z uszkodzeniem matrycy, a FV3 ze ścięciem warstwy. Modyfikacja stałych sprężystości polega na przemnożeniu ich wartości wyjściowych przez mnożniki zestawione w tabeli 5.3. Np. w momencie kiedy wielkość FV2 osiąga wartość 1 (czyli wartości wielkości połowych są (0,1,0)), co oznacza, że wg procedur zawartych w procedurze

Tablica 5.3: Mnożniki redukcji parametrów materiałowych w punkcie całkowania po przekroczeniu odpowiedniego kryterium wytrzymałościowego stowarzyszonego z jedną z form uszkodzenia

ABAQUS® - dodatkowe wielkości połowe			Mnożniki redukcji dla każdego parametru sprężystości ortotropowej warstwy kompozytu			
FV1	FV2	FV3	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}
0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	10^{-6}	10^{-3}	10^{-3}	0
0	1	0	1	10^{-6}	1	0
0	0	1	1	1	10^{-6}	0
1	1	0	10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}	0
0	1	1	1	10^{-6}	10^{-6}	0
1	0	1	10^{-6}	10^{-3}	10^{-6}	0
1	1	1	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	0

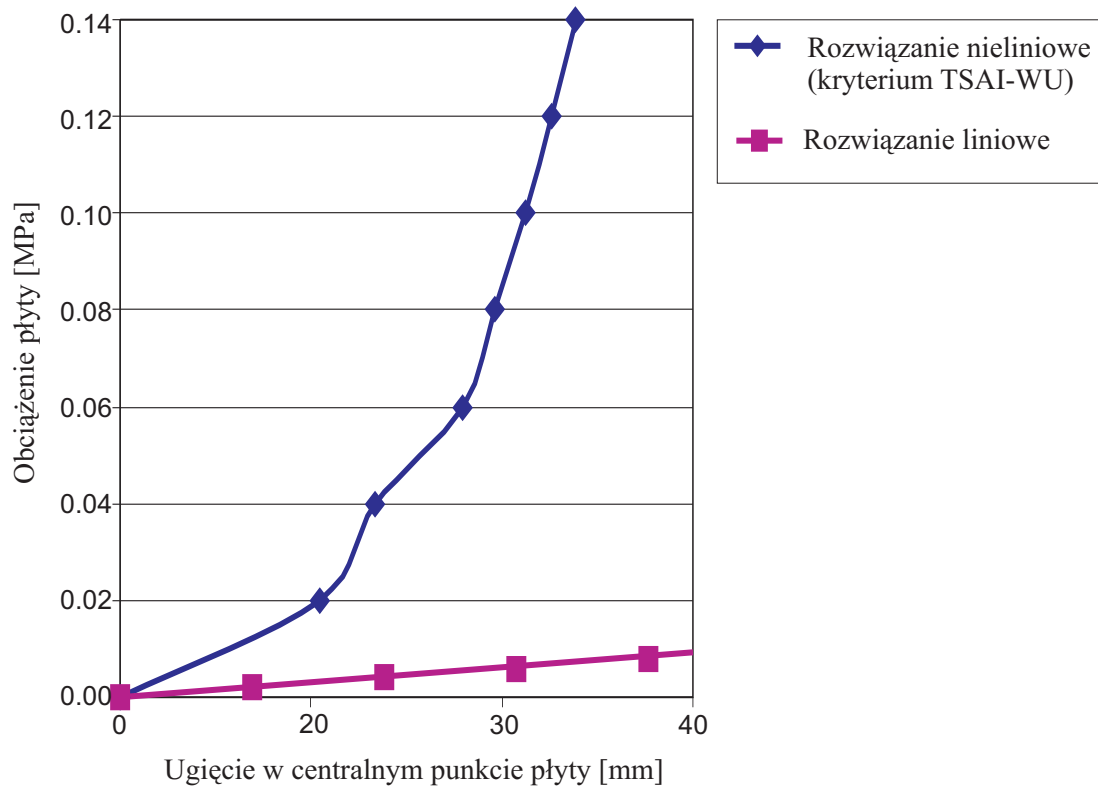


Rysunek 5.22: Wykres zależności przemieszczenie-obciążenie

zewnętrznej w danym punkcie powstało uszkodzenie matrycy, należy współczynnik POISSON'A (ν_{12}) wyzerować, a moduł YOUNG'A przemnożyć przez faktor 10^{-6} . Prowadzi to do przeddefiniowania macierzy sztywności całej konstrukcji. Po przeddefiniowaniu obliczenia restartowane są w tym samym kroku obciążenia. W momencie kiedy nie następuje uszkodzenie w konstrukcji przykładany jest następny przyrost obciążenia. Cała procedura jest powtarzana, aż do całkowitego zniszczenia kompozytu. Dla potwierdzenia własnych obliczeń wyniki zostały porównane z zamieszczonymi w pracy [PADHI et al. 1998] wynikami doświadczalnymi.

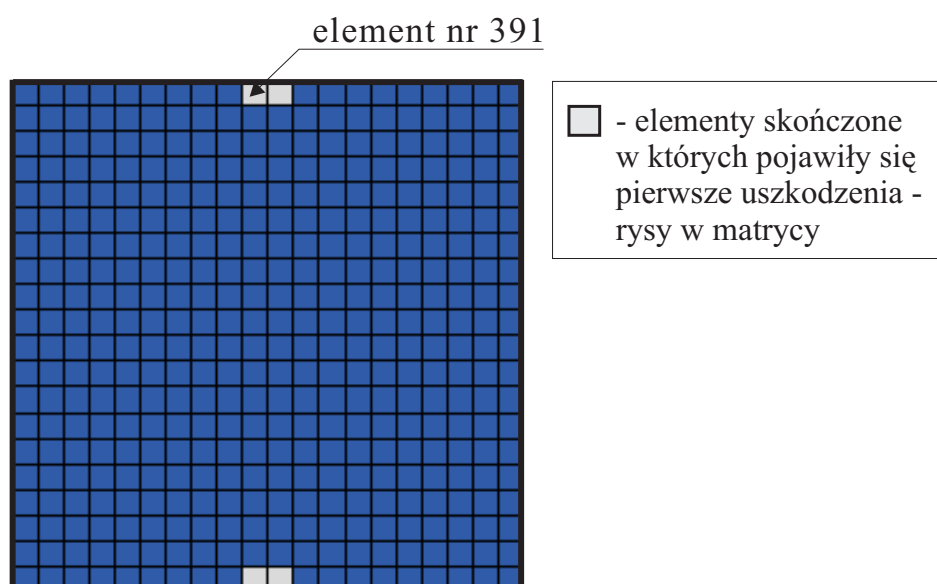
Pierwszym zaprezentowanym rezultatem jest wykres zależności pomiędzy przemieszczeniem w centralnym punkcie płyty a obciążeniem, zobacz rys. 5.22. Poszczególne krzywe obrazują tę zależność wyznaczoną na drodze eksperymentu i na drodze nieliniowych symulacji numerycznych z uwzględnieniem procesu niszczenia oraz bez uwzględniania degradacji materiału. Jak widać na wykresie symulacja która nie uwzględnia procesu powstawania uszkodzeń w konstrukcji a co za tym idzie modyfikacji materiału znacznie odbiega od wyniku eksperymentalnego, różnica ta uwidacznia się szczególnie w późniejszej fazie obciążenia, kiedy obszar uszkodzeń w płycie jest dość duży. Symulacje w których zostały uwzględnione procesy powstawania i rozwoju uszkodzeń i związana z tym degradacja materiału wykazują dobrą korelację z wynikami doświadczalnymi. Równocześnie widać, że przy tego rodzaju materiałach gdzie możemy mieć do czynienia z dużymi przemieszczeniami uwzględnienie nieliniowości geometrycznej jest niezbędne do uzyskania poprawnych wyników. Dodatkowo na wykresie 5.23 przedstawiona jest różnica pomiędzy rozwiązaniem liniowym i nieliniowym w zakresie stosunkowo niewielkich przemieszczeń.

W czasie symulacji dzięki wielkością polowym FV1, FV2 i FV3 można śledzić rozwój poszczególnych uszkodzeń począwszy od pierwszego uszkodzenia (*first ply failure*), a skończywszy na całkowitej utracie nośności przez płytę (*ultimate failure*). Rysunek 5.24 pokazuje mapę

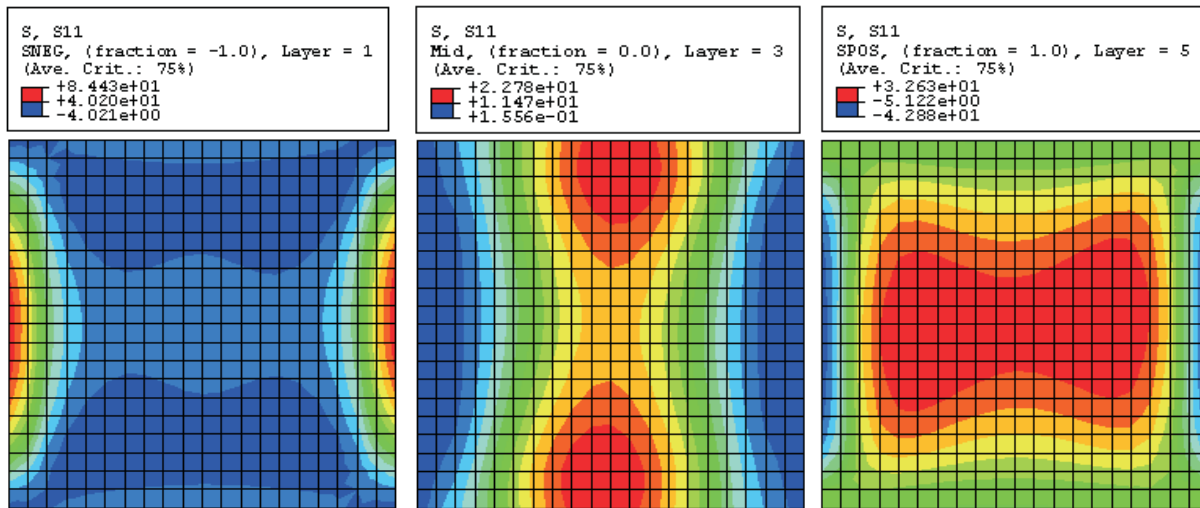


Rysunek 5.23: Wykres zależności przemieszczenie-obciążenie. Porównanie rozwiązania liniowego z nieliniowym.

wielkości FV2 w momencie powstania pierwszego uszkodzenia tj. przy obciążeniu równym $p = 0.022$ MPa w przypadku zastosowania kryterium TSAI-WU (pozostałe kryteria dają wynik nieznacznie różny, do 1%), gdzie kolorem białym zaznaczono elementy w których FV2=1



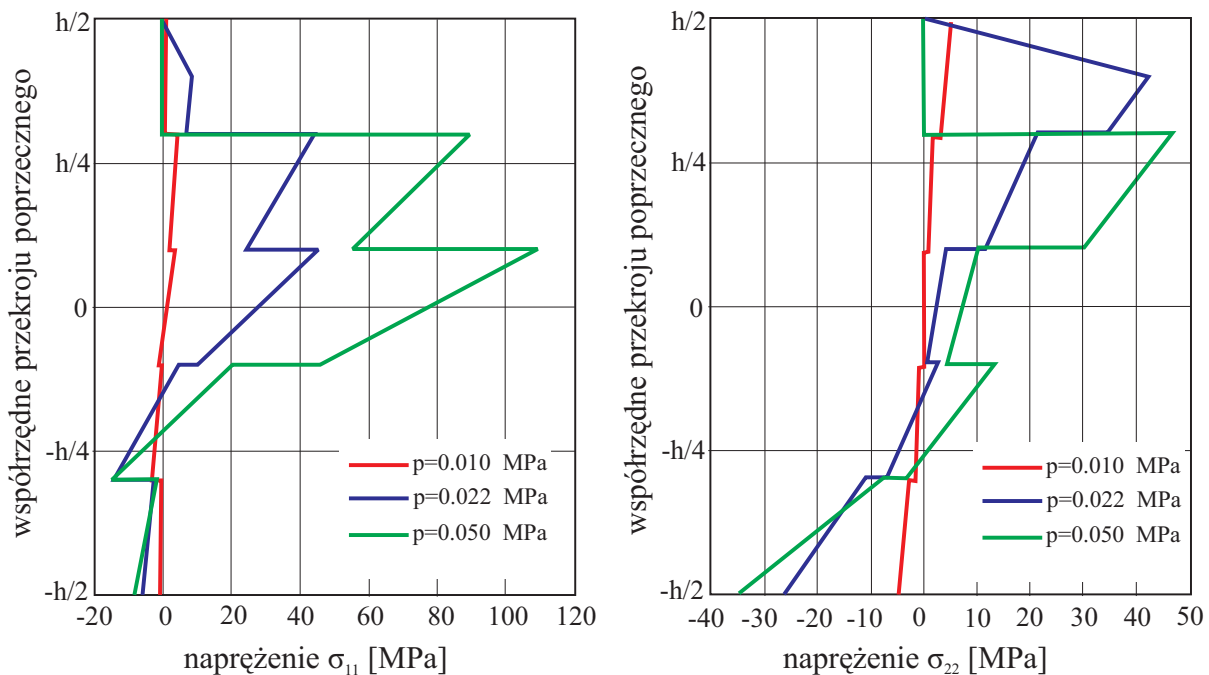
Rysunek 5.24: Mapa wielkości polowej FV2 na górnej powierzchni płyty - powstanie pierwszego uszkodzenia



Rysunek 5.26: Mapy naprężeń σ_{11} przy obciążeniu $p = 0.022$ MPa na górnej, środkowej i dolnej (odpowiednio) powierzchni analizowanej płyty

tzn. powstało zarysowanie matrycy, kolorem niebieskim oznaczone są elementy bez uszkodzenia (FV2=0).

Zaprezentowany wynik osiągnięty jest z wykorzystaniem elementu skończonego S4R dla siatki elementów 20×20 .



Rysunek 5.25: Wykresy naprężeń na wysokości całego przekroju płyty w centralnym punkcie (punkt GAUSS'A) elementu skończonego nr 391 na różnych poziomach obciążenia

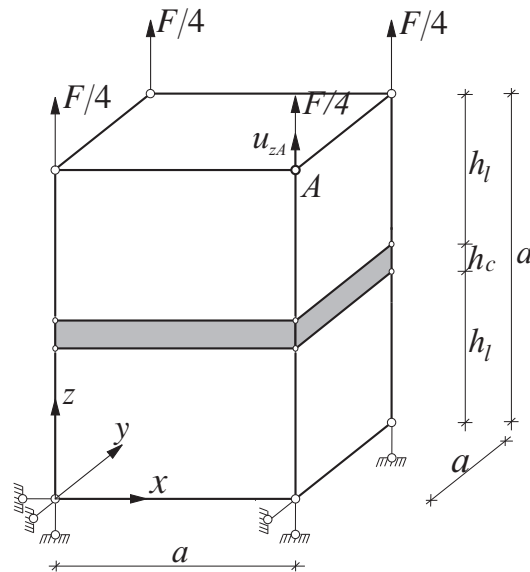
Rozwiązanie jest czułe na zmianę gęstości siatki elementów i wielkości przyrostu obciążenia. Testy numeryczne wykazały, że prezentowana gęstość dyskretyzacji jest wystarczająca, a wymagana wielkość przyrostu obciążenia dla uzyskania zbieżnego i poprawnego wyniku zależy od etapu

rozwoju uszkodzenia. W celu poprawnego wykrycia pierwszego uszkodzenia podział obciążenia na kroki powinien być możliwie gęsty, w pracy zastosowano 1% obciążenia powodującego pierwsze uszkodzenie. Następne przyrosty zależą od dokładności z jaką chcemy wyznaczyć mapy propagacji uszkodzeń, czasu jaki możemy przeznaczyć na obliczenia i procesora jakim dysponujemy. Na rysunku 5.25 zaprezentowany jest rozkład naprężeń na grubości płyty, naprężenia te obliczone są w centralnym punkcie elementu skończonego nr 391, czyli jednego z elementów w którym powstało pierwsze uszkodzenie. Zaprezentowane krzywe łamane obrazują wykres naprężeń przy różnym obciążeniu. Pierwsza prezentowana krzywa (kolor czerwony) obrazuje rozkład naprężenia przed pojawieniem się uszkodzenia, druga (kolor niebieski) odpowiada obciążeniu, które spowodowało powstanie pierwszej rysy, a ostatnia (zielona) obrazuje stan struktury w tym punkcie podczas propagacji uszkodzeń. Naprężenie na grubości płyty wyznaczone jest w trzech punktach całkowania dla każdej z warstw - na powierzchni górnej, środkowej i dolnej. Porównując wykresy naprężeń przy obciążeniu $p = 0.022$ MPa i $p = 0.05$ MPa można zauważyć jak rysa w warstwie górnej propaguje od powierzchni górnej do dolnej. Na kolejnych krokach obciążenia płyty w coraz większej ilości punktów całkowania kryteria wytrzymałościowe zostają przekraczane co wskazuje na propagację uszkodzeń na planie płyty. W czasie testu największa koncentracja uszkodzeń jest w dwóch warstwach górnych. Ostatecznie płyta traci zdolność przenoszenia obciążeń w momencie kiedy ponad 75% punktów materialnych wykazuje brak zdolności przenoszenia naprężeń prostopadłych do kierunku ułożenia włókien - matryca jest zarysowana i w ok. 5% punktów materialnych zostały uszkodzone włókna. Siła odpowiadająca całkowitemu zniszczeniu płyty jest równa 0.60 MPa dla kryterium wg [CHANG & LESSARD 1991], 0.603 MPa dla kryterium HASHIN'A i 0.608 MPa - TSAI-WU. Różnice te nie są znaczące, a wyniki są zgodne z wynikami doświadczalnymi zaprezentowanym przez [PADHI et al. 1998] - siła niszcząca wynosi 0.605 MPa.

Podstawowym wnioskiem z tego przykładu jest, że dzięki algorytmowi bazującemu na intuicyjnym założeniu inżynierskim (modyfikacja właściwości materiału w „uszkodzonych” punktach materialnych) jesteśmy w stanie modelować rozwój uszkodzeń w zginanej płycie kompozytowej. Niezbędna jest jednak analiza z uwzględnieniem nieliniowości związku przemieszczenie–odkształcenie.

5.6.2 Test elementu kohezyjnego - rozciąganie

Dla weryfikacji modelu, który został zaproponowany do obliczania powstawania i rozwoju delaminacji wykonany został prosty test numeryczny. Test ten ma głównie na celu sprawdzenie współdziałania własnego elementu skończonego EPP3D8EAS5, włączonego do systemu ABAQUS® jako procedury własnej napisanej w języku FORTRAN i łączącej się z głównym programem poprzez komendę *UEL, z dostępnym w bibliotece ABAQUS® kohezyjnym elementem COH3D8. Własny element jest szczegółowo opisany w rozdziale piątym, a testy numeryczne prezentujące jego możliwości znajdują się w dodatku B. Zadanie to polega na rozciąganiu systemu trzech elementów skończonych (rys. 5.27) z czego warstwę dolną i górną stanowią własne elementy EPP3D8EAS5, dla których właściwości materiałowe zaprezentowane są w tabeli 5.4, a pomiędzy nimi ułożony jest element kohezyjny COH3D8 modelujący ich zespolenie. Na skutek siły rozciągającej dochodzi do separacji warstw wg wcześniej zdefiniowanych zależności. Dane wytrzymałościowe dla warstwy kohezyjnej zestawione są w tabeli 5.5. Wszystkie dane dla kompozytu i połączenia są zaczerpnięte z pracy [ALFANO & CRISFIELD 2001]. Zadanie przedstawione na rysunku 5.27 to sześciąt o wymiarze boku $a = 1.00$ mm, a grubość warstwy kohezyjnej wynosi $h_c = 0.01$ mm.



Rysunek 5.27: Geometria prezentowanego testu numerycznego

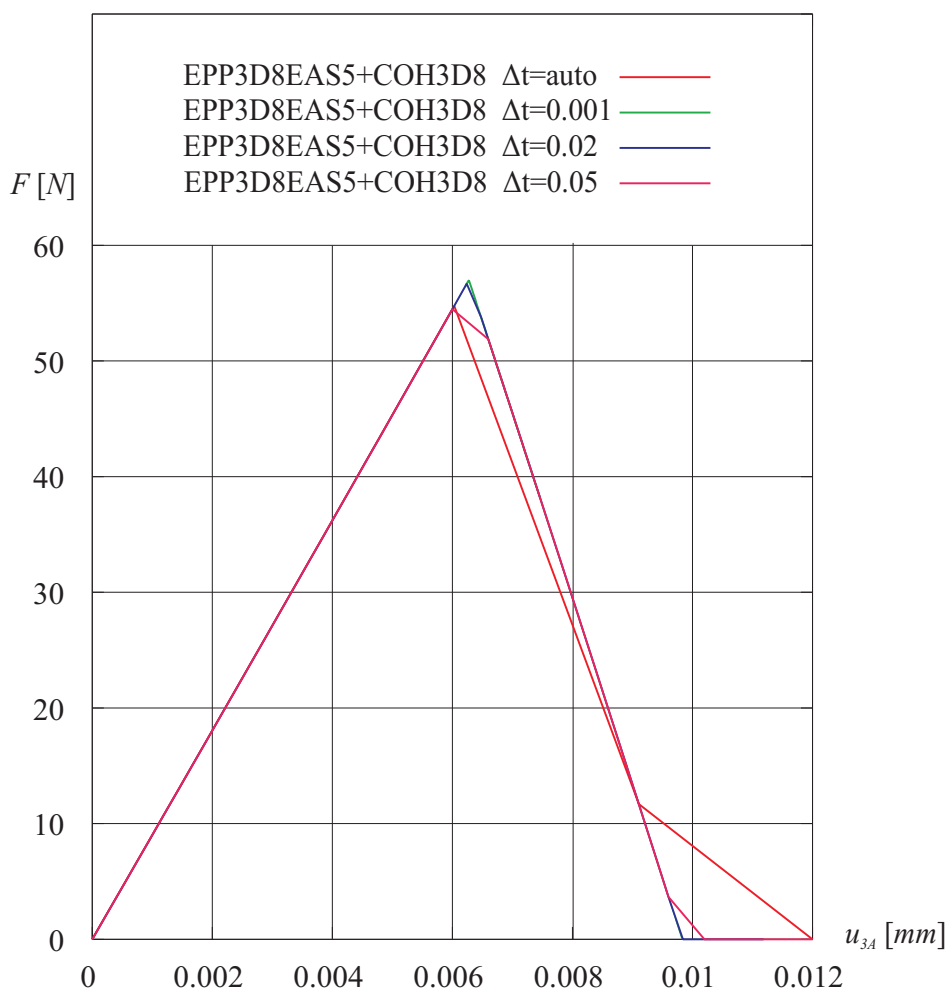
Tablica 5.4: Stałe sprężystości dla materiału kompozytowego

E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	E_3 [GPa]
135.3	9.0	9.0
G_{12} [GPa]	G_{13} [GPa]	G_{23} [GPa]
5.2	5.2	3.08
ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
0.24	0.24	0.46

Tablica 5.5: Parametry wytrzymałościowe dla warstwy kohezyjnej

G_C [Nmm ⁻¹]	R_{33} [MPa]
0.28	57.0

Na wykresie przedstawiona jest obliczona zależność między przemieszczeniem pionowym jednego z wierzchołków górnej powierzchni rozważanego systemu elementów, a siłą powodującą rozciąganie. Z zależności tej można odczytać zachowanie się elementu kohezyjnego, a konkretnie sposób w jaki element ten modeluje utratę spójności pomiędzy dwoma sąsiednimi elementami w wyniku rozciągania. Prezentowane kalkulacje prowadzone są przyrostowo (sterowanie przemieszczeniem) z wykorzystaniem metody NEWTONA-RAPHSON'A, a Δt definiuje wielkość przyrostu przemieszczenia w kroku. Wielkość przyrostu przemieszczenia jest równa iloczynowi maksymalnego przemieszczenia i ustalonej wartości Δt . Nasuwa się wniosek, że w tego rodzaju obliczeniach należy starannie dobierać wielkość przyrostu w celu poprawnego opisu zachowania się strefy kohezyjnej.



Rysunek 5.28: Zależność między siłą F a przemieszczeniem pionowym punktu A

5.6.3 Test na rozwój delaminacji - forma I - *Double Cantilever Beam* (DCB)

Standardowym testem dla czystej I formy delaminacji jest *Double Cantilever Beam* (DCB), który w niniejszym rozdziale jest rozważany jako test zaproponowanego modelu do detekcji i opisu postępu rysy na styku warstw kompozytu włóknistego. Test ten jest bardzo często stosowany w laboratoriach do szacowania ilościowej i jakościowej odporności materiałów na uszkodzenie jakim jest delaminacja. Na rysunku 5.29 pokazane jest zdjęcie wykonane podczas wykonywania takiego testu w laboratorium (źródło: Sandia National Laboratories - <http://www.sandia.gov/>). Geometria belki, warunki brzegowe i rodzaj obciążenia są przedstawione na rysunku 5.30.

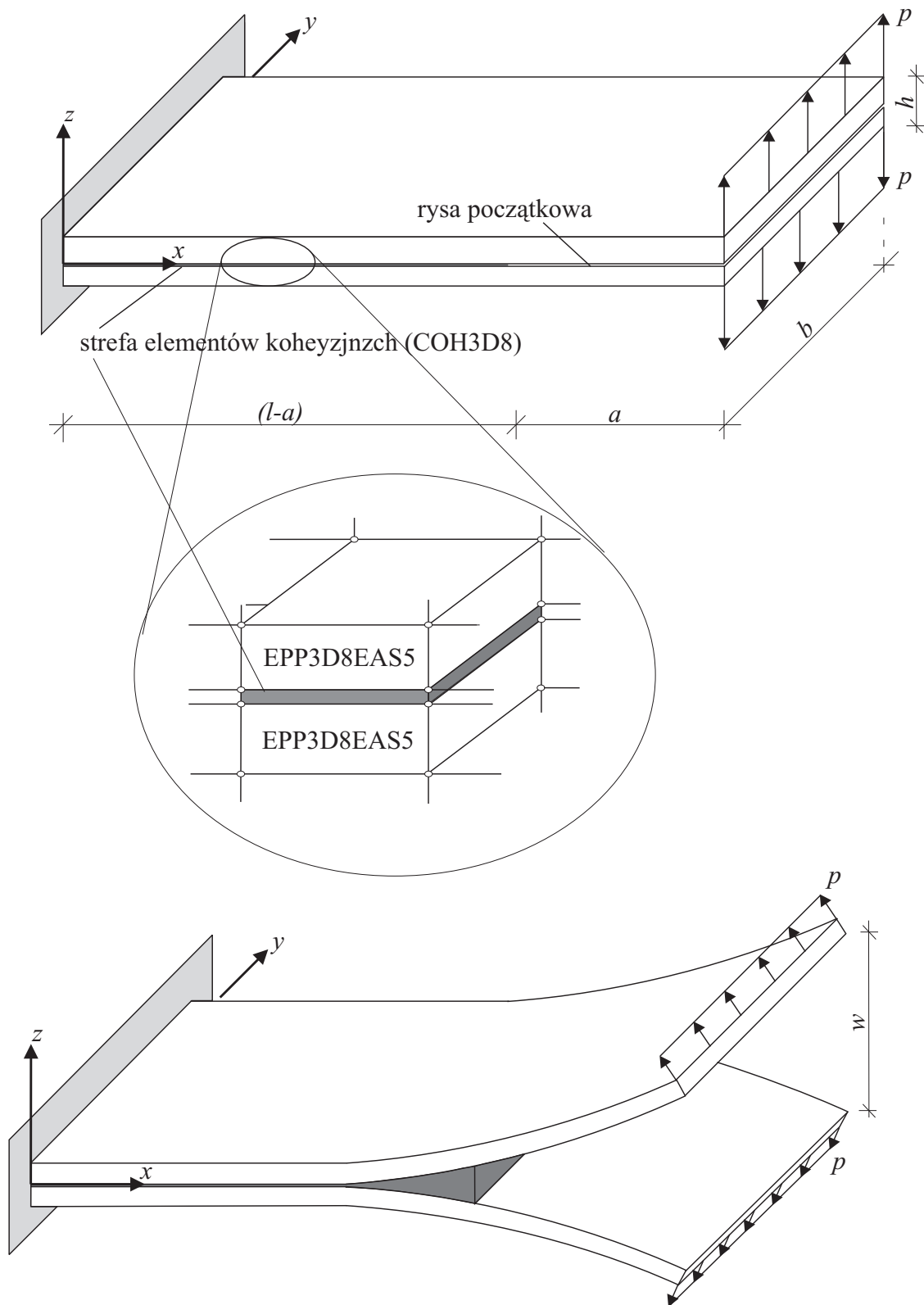
Belka jest utwierdzona na jednym końcu i ma początkową rysę, która zaczyna się na przeciwnym końcu belki. Początkowa rysa ulokowana jest w połowie wysokości belki na całej szerokości. Długość tej rysy wynosi $a = 30$ mm, a długość całej belki to $l = 100$ mm. Szerokość belki to $b = 20$ mm, a wysokość - $h = 3.01$ mm. Stałe sprężystości dla materiału z którego wykonane są warstwy belki zestawione są w tabeli 5.4. Belka wykonana jest z dwóch warstw kompozytu jednokierunkowo zbrojonego o grubości 1.5 mm, powyżej i poniżej początkowej rysy, orientacja włókien w obu warstwach jest taka sama - kąt pomiędzy lokalnym układem każdej warstwy a układem globalnym jest 0 stopni. Belka jest zdyskretyzowana elementami EPP3D8EAS5, a na przedłużeniu rysy początkowej, tam gdzie warstwy są połączone, wprowadzona jest strefa kohezyjna o długości $(l - a) = 70$ mm. Grubość strefy kohezyjnej założona jest $h_c = 0.01$ mm i jest

zdyskretyzowana elementami COH3D8. Delaminacja startuje od rysy początkowej i rozwija się w strefie kohezyjnej zgodnie z prezentowanym modelem. Dodatkowo potrzebne są pewne dane eksperymentalne dla bardziej realistycznego modelu. Konkretnie potrzebne są energia pęknięcia i wytrzymałość w kierunku normalnym do powierzchni kohezyjnej, które są dane w tabeli 5.5. Obciążenie wywołujące rozwój rysy przedstawione jest na rysunku 5.30, na rysunku tym jest również schematycznie przedstawione zachowanie się DCB podczas propagacji rysy.

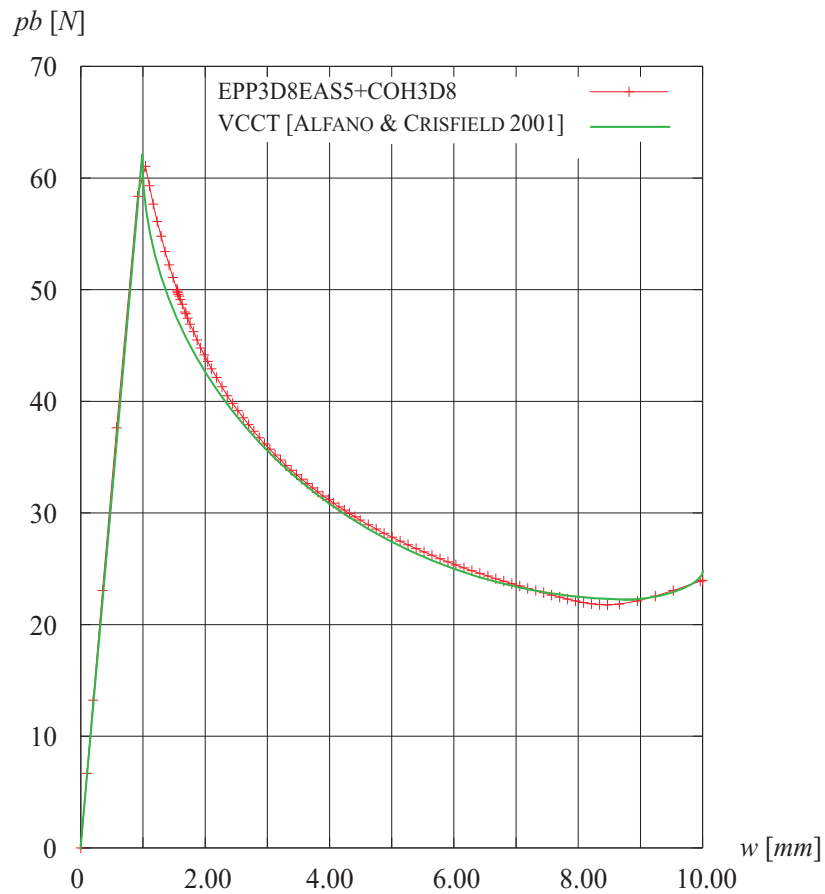


Rysunek 5.29: DCB - zdjęcie testu laboratoryjnego. Źródło: Sandia National Laboratories - <http://www.sandia.gov/>

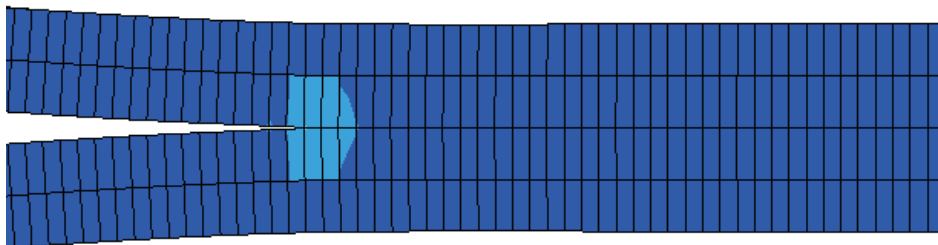
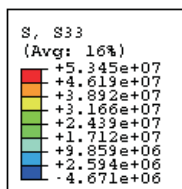
Wyniki symulacji numerycznych zaprezentowane są na rysunku 5.31 gdzie są porównane z wynikami zaczerpniętymi z pracy [ALFANO & CRISFIELD 2001], a otrzymanymi z wykorzystaniem techniki VCC (*virtual crack closure technique*). Należy dodać, że obliczenia są sterowane przemieszczeniami, a krzywa obrazuje zależność między pionową siłą P_b , a separacją warstw powyżej i poniżej początkowej rysy w - rozwarście rysy. Propagacja rysy startuje w momencie osiągnięcia przez odpowiednie naprężenia wytrzymałości na rozciąganie w kierunku poprzecznym do powierzchni kohezyjnej R_{33} . Prezentowane podejście prowadzi do rezultatów zgodnych z wynikami zamieszczonymi w pracy [ALFANO & CRISFIELD 2001] w obu fazach deformacji: sprężystej i słabnięcia. W obliczeniach numerycznych użyto 590 elementów skończonych w kierunku osi x dla każdej warstwy tj. 560 w obrębie strefy kohezyjnej i 30 w strefie rysy początkowej. W kierunku osi y (szerokość) jest użyty jeden element. Strefa kohezyjna jest modelowana przy pomocy 560 elementów kohezyjnych - COH3D8. Dla tak przyjętej siatki elementów skończonych otrzymane wyniki są zbieżne (rysunek 5.31). W przypadku rzadszych siatek elementów skończonych algorytm nie jest zbieżny, lub jest zbieżny ale otrzymane rozwiązanie w fazie słabnięcia ma postać zig-zag. Analiza przyrostowa sterowana przemieszczeniami realizowana jest przy pomocy metody NEWTONA-RAPHSON'A w systemie ABAQUS®. Dodatkowo dla prezentowanego rozwiązania na rysunkach 5.32 - 5.34 przedstawione są mapy naprężeń σ_{33} przy różnym poziomie separacji.



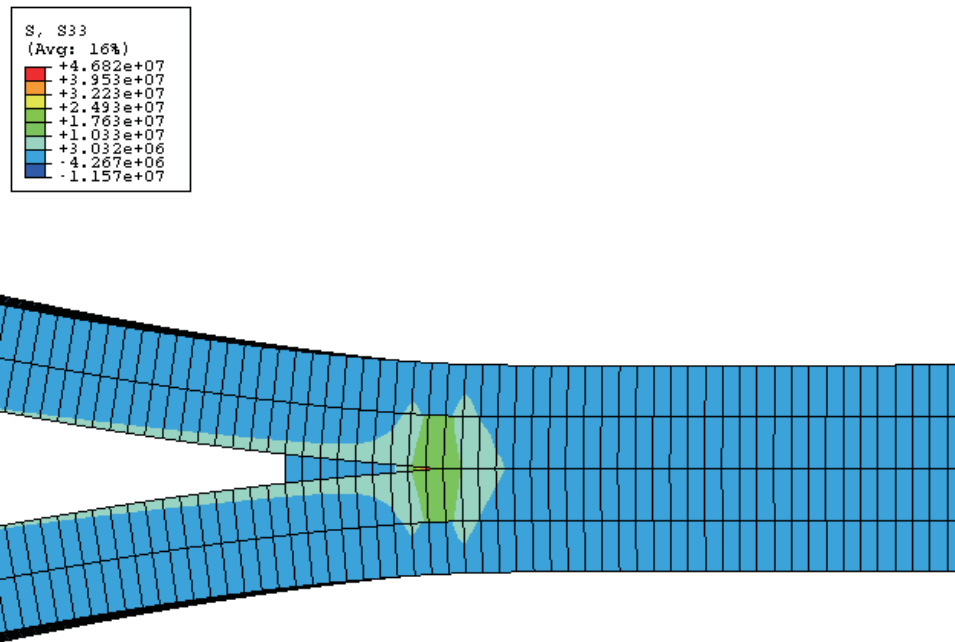
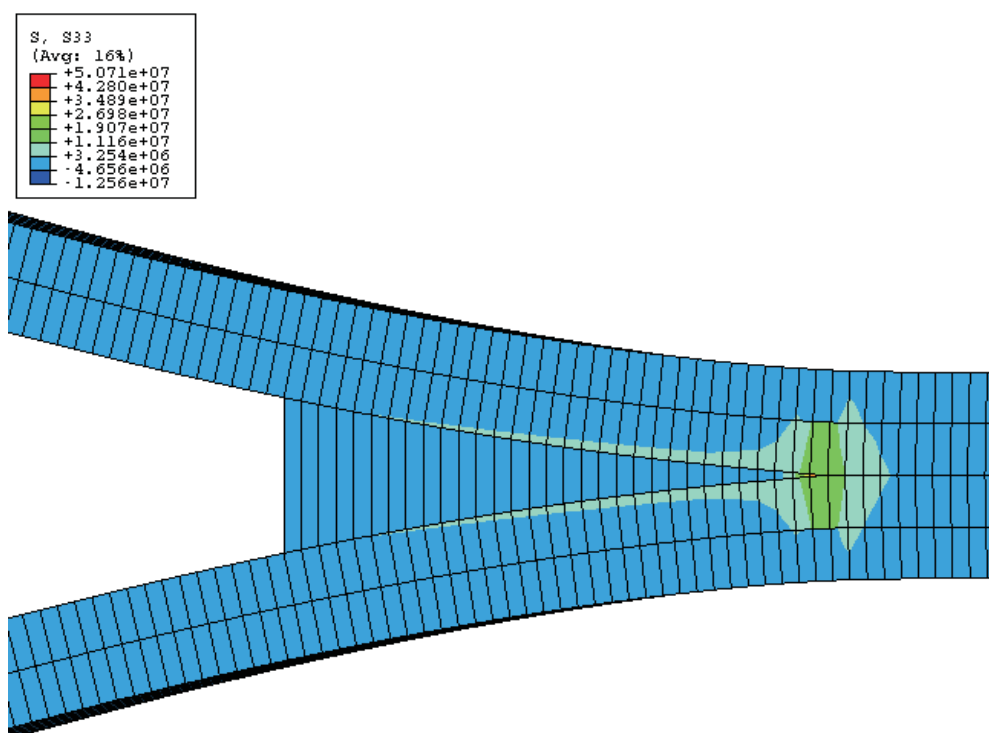
Rysunek 5.30: Dane geometryczne próbki DBC oraz model numeryczny przed i w czasie delaminacji



Rysunek 5.31: Zależność między siłą powodującą separację p , a odległością między warstwami - rozwarciem w



Rysunek 5.32: Naprężenia σ_{33} w DCB przed rozwojem delaminacji $w = 0.6$ mm

Rysunek 5.33: Naprężenia σ_{33} w DCB podczas progresji delaminacji $w = 1.6 \text{ mm}$ Rysunek 5.34: Naprężenia σ_{33} w DCB podczas progresji delaminacji $w = 2.0 \text{ mm}$

Wnioskiem z tego przykładu jest, że zaprezentowany model daje dobre rozwiązania dla standardowego testu rozwoju delaminacji - DCB. Model ten pozwala przewidzieć poziom obciążenia przy którym delaminacja się pojawia i jej rozwój. Rozwój ten jest jednak ograniczony do założonej strefy kohezynnej co wymaga od projektanta dodatkowej wiedzy, gdzie w konstrukcji może dojść do utraty ciągłości. Wiedza ta jest często intuicyjna w przypadku kompozytów warstwowych, ale może też stanowić temat dodatkowej analizy stanu naprężenia. Zaprezentowany przykład nie pokazuje pełnych możliwości prezentowanego modelu, eksponuje on jedynie pierwszą formę delaminacji i stanowi pierwszy krok w weryfikacji proponowanego modelu, który może być użyty także do symulacji problemów ze złożoną formą delaminacji.

6 Wnioski końcowe i kierunki dalszych badań

W pracy jest postawiony i przeanalizowany problem nieliniowego zachowania się struktur włókno-kompozytowych w fazie niszczenia. Jako wstęp do rozważań nad uszkodzeniami w kompozycie i ich rozwojem zostały w pracy poruszone pewne dodatkowe aspekty, ważne dla poprawnego modelowania tego rodzaju materiałów. Aspekty te to przede wszystkim odpowiedź na pytanie jak oszacować właściwości kompozytu i jaki wpływ mają niewielkie zmiany w budowie kompozytu (zmiana kąta usytuowania włókien w przekroju np. płyty) na wielkości statyczne. Rozważania te zostały przeprowadzone w zakresie sprężystym dla problemu brzegowego zginanych płyt włókno-kompozytowych z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Do analiz tych został opracowany własny program komputerowy w języku FORTRAN90, który do obliczania sztywności kompozytu wykorzystuje alternatywnie dwa bazujące na różnych podejściach modele.

Jednak głównym celem pracy była analiza kompozytów zorientowana na wykrycie i opisy rozwoju uszkodzeń struktury. Ze względu na specyfikę rozważanych materiałów kompozytowych w prezentowanej analizie szczególny nacisk w sformułowaniu problemu położony jest na uwzględnienie nieliniowej relacji między przemieszczeniem a odkształceniem. Związane to jest z dużymi przemieszczeniami jakie są dopuszczalne w elementach konstrukcyjnych (płytach) wykonanych z tych materiałów. Przed przystąpieniem do analizy uszkodzeń należało dobrać lub zaproponować takie narzędzia numeryczne, które umożliwią otrzymanie poprawnego stanu naprężenia obciążonej konstrukcji. W tym celu dla analizy dwuwymiarowej dobrano elementy skończone z biblioteki systemu obliczeniowego ABAQUS® rekomendowane do tego typu analiz przez twórców tego programu ([ABAQUS 2004]).

Dla analizy trójwymiarowej, niezbędnej do modelowania niektórych zjawisk w kompozytach, gdzie niezbędny jest pełen stan naprężenia, w pracy jest zaproponowany i zdefiniowany element skończony ze wzbogaceniami eliminującymi efekt blokady numerycznej. Własne elementy przestrzenno-powłokowe wykazują dobrą zbieżność wyników przy stosunkowo niewielkiej liczbie elementów. Jakość zdefiniowanego i użytego elementu skończonego wynika z zastosowania przy jego wyprowadzeniu trójpolowego sformułowania wariacyjnego HU-WASHIZU, które przystaje do nieliniowych problemów z jakimi mamy do czynienia w analizowanym zadaniu. Funkcjonal ten prowadzi do problemu dwupolowego, gdzie drugą niewiadomą wielkością polową obok przemieszczeń są rezydualne odkształcenia. Dodatkowo w definicji elementu, obok zastosowanej dodatkowej wielkości polowej (metoda EAS), wprowadzona jest specjalna interpolacja niektórych odkształceń (metoda ANS), które wspólnie eliminują większość niedoskonałości (blokady) czystej formy ośmiowęzłowego elementu przestrzennego z trój-liniowymi funkcjami kształtu. Możliwości tego elementu są na przykładzie zaprezentowane w pracy (dodatek B). W rozważaniach teoretycznych założony jest liniowy związek konstytutywny, co prowadzi do pewnych uproszczeń. Obliczenia z wykorzystaniem opisanego elementu były realizowane w programie ABAQUS®, a własny element dołączony jest jako procedura autorska zakodowana w języku FORTRAN77.

Wspomniane wyżej analizy dwu- i trójwymiarową miały na celu wykrycie i opis rozwoju uszkodzeń w kompozycie. W pracy sporo miejsca jest poświęcone na opis rodzajów uszkodzeń i kryteriom wytrzymałościowym, które służą do ich detekcji, na podstawie obszernej literatury światowej, co stanowi dodatkowy jej atut. Prowadzenie dwóch analiz w płaskim stanie naprężenia i analizy 3D jest związane ze specyfiką jednego z uszkodzeń, będącego w obszarze zainteresowania autora, jakim jest delaminacja. Poprawne modelowanie tego zjawiska wymaga informacji o pełnym stanie naprężenia w konstrukcji.

Do modelowania rozwoju pozostałych uszkodzeń zastosowano model 2D i prosty algorytm numeryczny bazujący na zmianie stanu materiału na skutek pojawiania się lokalnych uszkodzeń. Modyfikacja materiału odbywa się w miejscach, w których nastąpiło uszkodzenie. Miejsca i rodzaj

uszkodzenia, który decyduje o jakości modyfikacji, wykrywane są w zewnętrznych procedurach własnych łączących się z programem ABAQUS®, w którym odbywa się symulacja. Przykłady zamieszczone w pracy dla brzegowego problemu płyty zginanej wykazały, że wykorzystany model numeryczny prowadzi do wyników zgodnych z wynikami doświadczalnymi.

Model zastosowany w analizie trójwymiarowej do opisu delaminacji bazuje na tzw. strefie kohezyjnej, a równanie konstytutywne dla elementu kohezyjnego opiera się na założeniach mechaniki kontinuum niszczenia co umożliwia opis jej propagacji. Rozwój ten jednak może odbywać się tylko we wcześniej zdefiniowanej w zadaniu dyskretnym strefie kohezyjnej, która ulokowana jest na styku warstw kompozytu. Proste przypadki delaminacji testowane na przykładach wykazały zgodność przyjętego modelu z wynikami dostępnymi w literaturze.

Proponowane kierunki dalszych badań.

W pracy wiele aspektów związanych z uszkodzeniem kompozytu bazuje jeszcze na kilku uproszczeniach modelowych. Dalsze badania powinny zmierzać do eliminacji tych uproszczeń i rozbudowy modelu. Pierwszym krokiem w tym kierunku powinno być uwzględnienie nieliniowości fizycznej materiału składowych kompozytu.

W kontekście uszkodzeń nasuwa się pytanie o możliwości szacowania parametrów wytrzymałościowych; w pracy parametry są dobierane z literatury, w której najczęściej ich pochodzenie nie jest wyjaśniane, lub jest wynikiem eksperymentów. Drugim ważnym kierunkiem badań powinno być zbudowanie pełnego modelu trójwymiarowego, który umożliwi detekcję i symulację rozwoju wszystkich uszkodzeń występujących w kompozycie. Jest to szczególnie ważne ponieważ często jedno uszkodzenie są efektem rozwoju innych np. rysa poprzeczna może generować delaminację. Planowane są również w niedalekiej przyszłości własne badania eksperymentalne, które pozwolą zweryfikować proponowane modele na konkretnych, własnych doświadczeniach.

Dodatek**A Macierz sztywności elementu skończonego PIQ4**

W załączniku tym zestawione są funkcje kształtu dla użytego w rozdziale 4 płytowego elementu skończonego PIQ4 (patrz rys. 4.4) oraz macierz sztywności tego elementu z uwzględnieniem anizotropii dyskretyzowanej z jego wykorzystaniem płyty.

Funkcje kształtu dla elementu skończonego PIQ4:

$$N_1 = -\frac{1}{8} \frac{-2a^3b^3 + 3xa^2b^3 + 3ya^3b^2 - 4xya^2b^2 - x^3b^3 - y^3a^3 + x^3yb^2 + xy^3a^2}{a^3b^3}$$

$$N_2 = \frac{1}{8} \frac{-ab^3 + xb^3 + yab^2 - xyb^2 + y^2ab - xy^2b - y^3a + xy^3}{ab^2}$$

$$N_3 = -\frac{1}{8} \frac{-a^3b + xa^2b + ya^3 + x^2ab - xya^2 - x^3b - x^2ya + x^3y}{a^2b}$$

$$N_4 = \frac{1}{8} \frac{2a^3b^3 + 3xa^2b^3 - 3ya^3b^2 - 4xya^2b^2 - x^3b^3 + y^3a^3 + x^3yb^2 + xy^3a^2}{a^3b^3}$$

$$N_5 = -\frac{1}{8} \frac{ab^3 + xb^3 - yab^2 - xyb^2 - y^2ab - xy^2b + y^3a + xy^3}{ab^2}$$

$$N_6 = -\frac{1}{8} \frac{a^3b + xa^2b - ya^3 - x^2ab - xya^2 - x^3b + x^2ya + x^3y}{a^2b}$$

$$N_7 = -\frac{1}{8} \frac{-2a^3b^3 - 3xa^2b^3 - 3ya^3b^2 - 4xya^2b^2 + x^3b^3 + y^3a^3 + x^3yb^2 + xy^3a^2}{a^3b^3}$$

$$N_8 = -\frac{1}{8} \frac{-ab^3 - xb^3 - yab^2 - xyb^2 + y^2ab + xy^2b + y^3a + xy^3}{ab^2}$$

$$N_9 = \frac{1}{8} \frac{-a^3b - xa^2b - ya^3 + x^2ab - xya^2 + x^3b + x^2ya + x^3y}{a^2b}$$

$$N_{10} = \frac{1}{8} \frac{2a^3b^3 - 3xa^2b^3 + 3ya^3b^2 - 4xya^2b^2 + x^3b^3 - y^3a^3 + x^3yb^2 + xy^3a^2}{a^3b^3}$$

$$N_{11} = \frac{1}{8} \frac{ab^3 - xb^3 + yab^2 - xyb^2 - y^2ab + xy^2b - y^3a + xy^3}{ab^2}$$

$$N_{12} = \frac{1}{8} \frac{a^3b - xa^2b + ya^3 - x^2ab - xya^2 + x^3b - x^2ya + x^3y}{a^2b}$$

Elementy macierzy sztywności elementu ($K_{ji} = K_{ij}$) [KUCZMA & KULA 2003b]:

$$K_{11} = \frac{1}{a^3b^3}(1.4D_{66}a^2b^2 + D_{11}b^4 + D_{22}a^4 + 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{12} = \frac{1}{ab^2}(0.2b^2D_{66} + 0.5b^2D_{12} + D_{22}a^2)$$

$$K_{13} = -\frac{1}{a^2b}(0.2a^2D_{66} + D_{11}b^2 + 0.5a^2D_{12})$$

$$K_{14} = \frac{1}{a^3b^3}(-1.4D_{66}a^2b^2 - D_{11}b^4 + 0.5D_{22}a^4 - 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{15} = \frac{1}{ab^2}(-0.2b^2D_{66} - D_{26}ab - 0.5b^2D_{12} + 0.5D_{22}a^2)$$

$$K_{16} = -\frac{1}{a^2b}(0.2a^2D_{66} + D_{11}b^2)$$

$$K_{17} = -\frac{1}{a^3b^3}(-1.4D_{66}a^2b^2 + 0.5D_{11}b^4 + 0.5D_{22}a^4 - 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{18} = \frac{1}{ab^2}(-0.2b^2D_{66} + D_{26}ab + 0.5D_{22}a^2)$$

$$K_{19} = \frac{1}{a^2b}(-D_{16}ab + 0.2a^2D_{66} - 0.5D_{11}b^2)$$

$$K_{1,10} = -\frac{1}{a^3b^3}(1.4D_{66}a^2b^2 - 0.5D_{11}b^4 + D_{22}a^4 + 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{1,11} = \frac{1}{ab^2}(0.2b^2D_{66} + D_{22}a^2)$$

$$K_{1,12} = \frac{1}{a^2b}(D_{16}ab + 0.2a^2D_{66} - 0.5D_{11}b^2 + 0.5a^2D_{12})$$

$$K_{22} = \frac{1}{15ab}(15D_{26}ab + 20D_{22}a^2 + 8b^2D_{66})$$

$$K_{23} = -\frac{1}{6ab}(6D_{12}ab + D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{24} = \frac{1}{b^2 a} (D_{26} ab - 0.5b^2 D_{12} + 0.5D_{22} a^2 - 0.2b^2 D_{66})$$

$$K_{25} = \frac{2}{15ab} (5D_{22} a^2 - 4b^2 D_{66})$$

$$K_{26} = \frac{1}{6ab} (D_{26} a^2 + D_{16} b^2)$$

$$K_{27} = -\frac{1}{ab^2} (-0.2b^2 D_{66} + D_{26} ab + 0.5D_{22} a^2)$$

$$K_{28} = \frac{1}{15ab} (15D_{26} ab + 5D_{22} a^2 + 2b^2 D_{66})$$

$$K_{29} = -\frac{1}{6ab} (D_{26} a^2 + D_{16} b^2)$$

$$K_{2,10} = -\frac{1}{ab^2} (0.2b^2 D_{66} + D_{22} a^2)$$

$$K_{2,11} = \frac{2}{15ab} (5D_{22} a^2 - b^2 D_{66})$$

$$K_{2,12} = \frac{1}{6ab} (D_{26} a^2 + D_{16} b^2)$$

$$K_{33} = \frac{1}{15ab} (20D_{11} b^2 + 15D_{16} ab + 8a^2 D_{66})$$

$$K_{34} = \frac{1}{a^2 b} (0.2a^2 D_{66} + D_{11} b^2)$$

$$K_{35} = \frac{1}{6ab} (D_{26} a^2 + D_{16} b^2)$$

$$K_{36} = -\frac{2}{15ab} (-5D_{11} b^2 + a^2 D_{66})$$

$$K_{37} = -\frac{1}{a^2 b} (-D_{16} ab + 0.2a^2 D_{66} - 0.5D_{11} b^2)$$

$$K_{38} = -\frac{1}{6ab} (D_{26} a^2 + D_{16} b^2)$$

$$K_{39} = \frac{1}{15ab}(5D_{11}b^2 + 15D_{16}ab + 2a^2D_{66})$$

$$K_{3,10} = \frac{1}{a^2b}(-D_{16}ab - 0.5D_{11}b^2 + 0.5a^2D_{12} + 0.2a^2D_{66})$$

$$K_{3,11} = \frac{1}{6ab}(D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{3,12} = -\frac{2}{15ab}(-5D_{11}b^2 + 4a^2D_{66})$$

$$K_{44} = \frac{1}{a^3b^3}(1.4D_{66}a^2b^2 + D_{11}b^4 + D_{22}a^4 + 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{45} = \frac{1}{ab^2}(0.2b^2D_{66} + 0.5b^2D_{12} + D_{22}a^2)$$

$$K_{46} = \frac{1}{a^2b}(0.2a^2D_{66} + D_{11}b^2 + 0.5a^2D_{12})$$

$$K_{47} = -\frac{1}{a^3b^3}(1.4D_{66}a^2b^2 - 0.5D_{11}b^4 + D_{22}a^4 + 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{48} = \frac{1}{ab^2}(0.2b^2D_{66} + D_{22}a^2)$$

$$K_{49} = -\frac{1}{a^2b}(-D_{16}ab - 0.5D_{11}b^2 + 0.5a^2D_{12} + 0.2a^2D_{66})$$

$$K_{4,10} = -\frac{1}{a^3b^3}(-1.4D_{66}a^2b^2 + 0.5D_{11}b^4 + 0.5D_{22}a^4 - 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{4,11} = \frac{1}{ab^2}(-0.2b^2D_{66} - D_{26}ab + 0.5D_{22}a^2)$$

$$K_{4,12} = -\frac{1}{a^2b}(D_{16}ab + 0.2a^2D_{66} - 0.5D_{11}b^2)$$

$$K_{55} = \frac{1}{15ab}(-15D_{26}ab + 20D_{22}a^2 + 8b^2D_{66})$$

$$K_{56} = -\frac{1}{6ab}(-6D_{12}ab + D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{57} = -\frac{1}{ab^2}(0.2b^2D_{66} + D_{22}a^2)$$

$$K_{58} = \frac{2}{15ab}(5D_{22}a^2 - b^2D_{66})$$

$$K_{59} = \frac{1}{6ab}(D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{5,10} = -\frac{1}{ab^2}(-0.2b^2D_{66} - D_{26}ab + 0.5D_{22}a^2)$$

$$K_{5,11} = \frac{1}{15ab}(-15D_{26}ab + 5D_{22}a^2 + 2b^2D_{66})$$

$$K_{5,12} = -\frac{1}{6ab}(D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{66} = \frac{1}{15ab}(20D_{11}b^2 - 15D_{16}ab + 8a^2D_{66})$$

$$K_{67} = -\frac{1}{a^2b}(D_{16}ab + 0.2a^2D_{66} - 0.5D_{11}b^2 + 0.5a^2D_{12})$$

$$K_{68} = \frac{1}{6ab}(D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{69} = -\frac{2}{15ab}(-5D_{11}b^2 + 4a^2D_{66})$$

$$K_{6,10} = \frac{1}{a^2b}(D_{16}ab + 0.2a^2D_{66} - 0.5D_{11}b^2)$$

$$K_{6,11} = -\frac{1}{6ab}(D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{6,12} = \frac{1}{15ab}(5D_{11}b^2 - 15D_{16}ab + 2a^2D_{66})$$

$$K_{77} = \frac{1}{a^3b^3}(1.4D_{66}a^2b^2 + D_{11}b^4 + D_{22}a^4 + 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{78} = -\frac{1}{ab^2}(0.2b^2D_{66} + 0.5b^2D_{12} + D_{22}a^2)$$

$$K_{7,9} = \frac{1}{a^2b}(0.2a^2D_{66} + D_{11}b^2 + 0.5a^2D_{12})$$

$$K_{7,10} = \frac{1}{a^3b^3}(-1.4D_{66}a^2b^2 - D_{11}b^4 + 0.5D_{22}a^4 - 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{7,11} = -\frac{1}{ab^2}(-0.2b^2D_{66} - D_{26}ab - 0.5b^2D_{12} + 0.5D_{22}a^2)$$

$$K_{7,12} = \frac{1}{a^2b}(0.2a^2D_{66} + D_{11}b^2)$$

$$K_{8,8} = \frac{1}{15ab}(15D_{26}ab + 20D_{22}a^2 + 8b^2D_{66})$$

$$K_{8,9} = -\frac{1}{6ab}(6D_{12}ab + D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{8,10} = -\frac{1}{b^2a}(D_{26}ab - 0.5b^2D_{12} + 0.5D_{22}a^2 - 0.2b^2D_{66})$$

$$K_{8,11} = \frac{2}{15ab}(5D_{22}a^2 - 4b^2D_{66})$$

$$K_{8,12} = 16ab(D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{9,9} = \frac{1}{15ab}(20D_{11}b^2 + 15D_{16}ab + 8a^2D_{66})$$

$$K_{9,10} = -\frac{1}{a^2b}(0.2a^2D_{66} + D_{11}b^2)$$

$$K_{9,11} = \frac{1}{6ab}(D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

$$K_{9,12} = -\frac{2}{15ab}(-5D_{11}b^2 + a^2D_{66})$$

$$K_{10,10} = \frac{1}{a^3b^3}(1.4D_{66}a^2b^2 + D_{11}b^4 + D_{22}a^4 + 0.5b^2a^2D_{12})$$

$$K_{10,11} = -\frac{1}{ab^2}(0.2b^2D_{66} + 0.5b^2D_{12} + D_{22}a^2)$$

$$K_{10,12} = -\frac{1}{a^2b}(0.2a^2D_{66} + D_{11}b^2 + 0.5a^2D_{12})$$

$$K_{11,11} = \frac{1}{15ab}(-15D_{26}ab + 20D_{22}a^2 + 8b^2D_{66})$$

$$K_{11,12} = -\frac{1}{6ab}(-6D_{12}ab + D_{26}a^2 + D_{16}b^2)$$

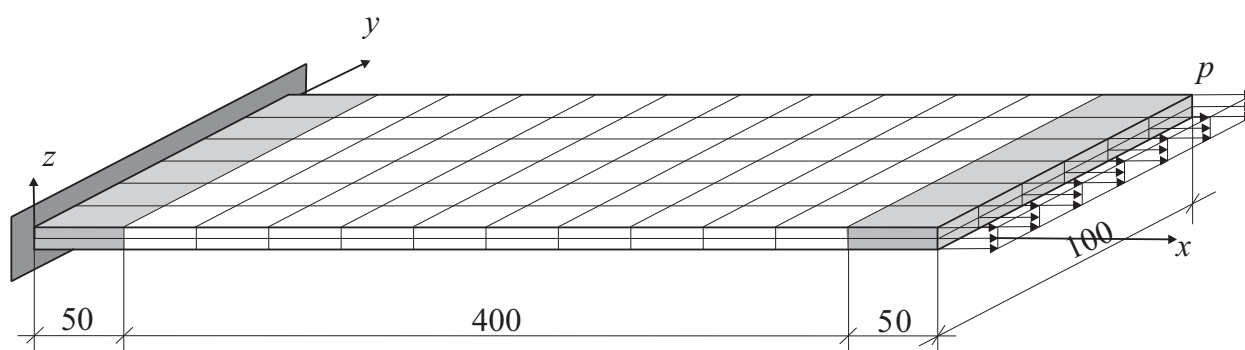
$$K_{12,12} = \frac{1}{15ab}(20D_{11}b^2 - 15D_{16}ab + 8a^2D_{66})$$

Uwaga: W powyższej definicji macierzy sztywności jest zastosowany dwuwskaznikowy zapis elementów macierzy \mathbf{D} , patrz np. [WOŹNIAK(RED.) 2001]. W celu poprawnej identyfikacji poszczególnych sztywności płyty w stosunku do rozważań prowadzonych w rozdziale 4 możemy zapisać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2212} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

B Test numeryczny powłokowo-przestrzennego elementu skończonego

W dodatku przedstawiony jest klasyczny przykład antysymetrycznej płyty warstwowej wykonanej z dwóch warstw żywicy zbrojonej włóknami ciągłymi. Wszelkie dane do przykładu zaczerpnięte są z pracy [SCHLEBUSCH 2005]. Przykład ten ma na celu przetestowanie zaproponowanego i zdefiniowanego w pracy elementu skończonego EPP3D8EAS5. Element ten jest wygodny do dyskretyzacji struktur kompozytowych w zadaniach wymagających uwzględnienia trójwymiarowego stanu naprężenia. Na przykładzie tym są zobrazowane zginanie i skręcanie (odpowiednio) płyty zbrojonej dwoma rodzinami włókien ułożonymi antysymetrycznie względem powierzchni środkowej na skutek rozciągania. Są to dobrze znane efekty wynikające ze struktury płyty. Oczywiście w celu zaprezentowania obu tych zjawisk i jakości elementu w ich kontekście należy zdefiniować dwa warianty zadania. Dla obu wariantów geometria próbki rozciąganej pozostaje bez zmian, podobnie obciążenie, warunki brzegowe i parametry materiałowe. Zmienny jest jedynie kąt ułożenia włókien w poszczególnych warstwach. Geometria, warunki brzegowe i sposób obciążenia zaprezentowane są na rysunku B.1.

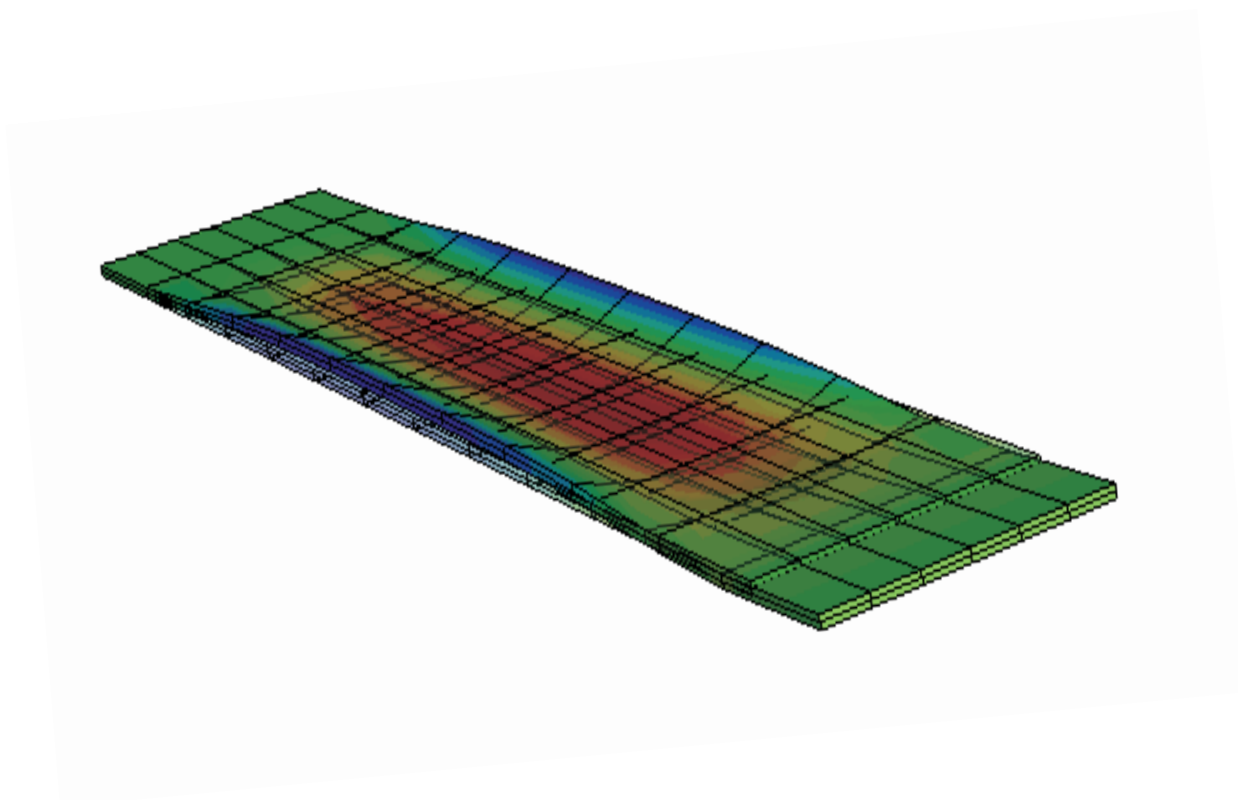


Rysunek B.1: Wykresy naprężeń na wysokości całego przekroju płyty w centralnym punkcie (punkt GAUSSA) elementu skończonego nr 391 na różnych poziomach obciążenia

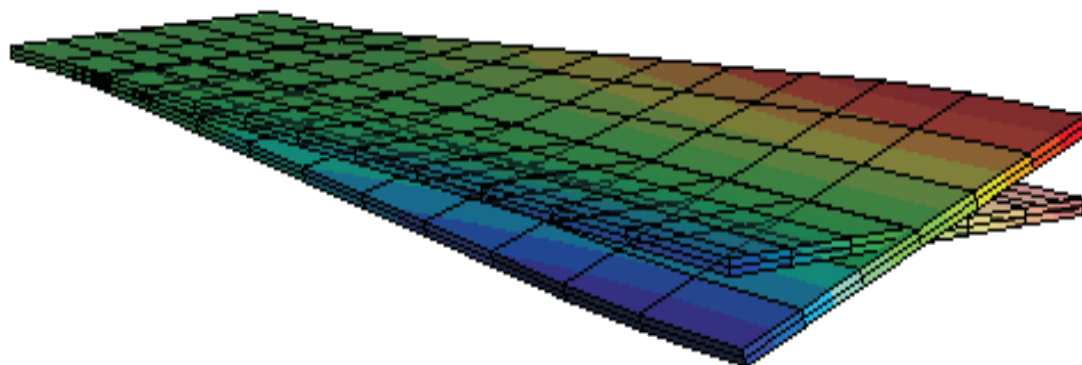
Długość próbki wynosi $l = 400$ mm, a szerokość $b = 100$ mm, grubość całkowita próbki to $h = 3.2$ mm. Dodatkowe rzędy elementów skończonych zaznaczone na rysunku B.1 kolorem szarym obrazują szczęki maszyny laboratoryjnej. Wprowadzono je dla pełniejszego modelu testu laboratoryjnego przy czym założono, że pasma te są bardzo sztywne i są wykonane z liniowo-sprężystego izotropowego materiału, dla którego moduł sprężystości YOUNG'A wynosi $E = 10^{10}$ MPa, a współczynnik POISSON'A $\nu = 0.0$. Siła, dla której w dalszej części tego rozdziału są zaprezentowane wyniki, wynosi $F = 2phb = 10000$ N. Płyta jest podzielona na relatywnie małą liczbę elementów skończonych - 12 pasm w kierunku długości, 6 w kierunku szerokości i 2 na grubości próbki. Stałe sprężystości dla zhomogenizowanego materiału kompozytowego, z którego wykonana jest próbka, zestawione są w tabeli B.1.

Tablica B.1: Parametry wytrzymałościowe dla warstwy kohezyjnej

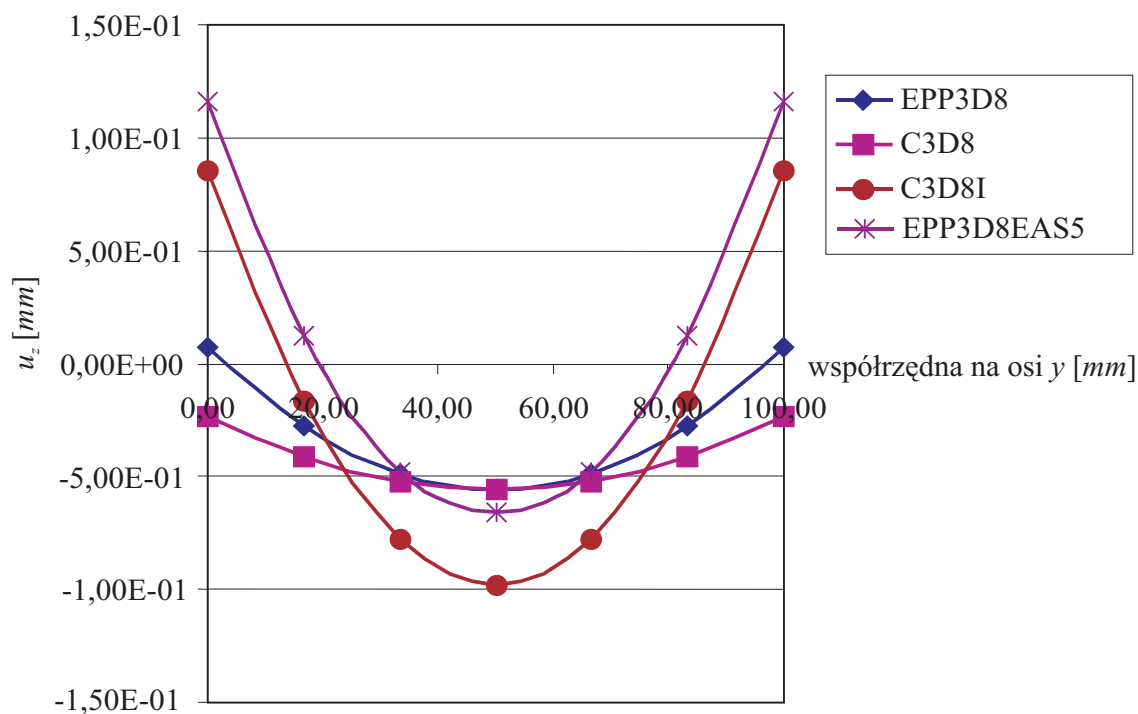
E_1 [MPa]	$E_2 = E_3$ [MPa]	$G_{12} = G_{13}$ [MPa]	G_{23} [MPa]	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}
31100	7600	2900	2600	0.303	0.46



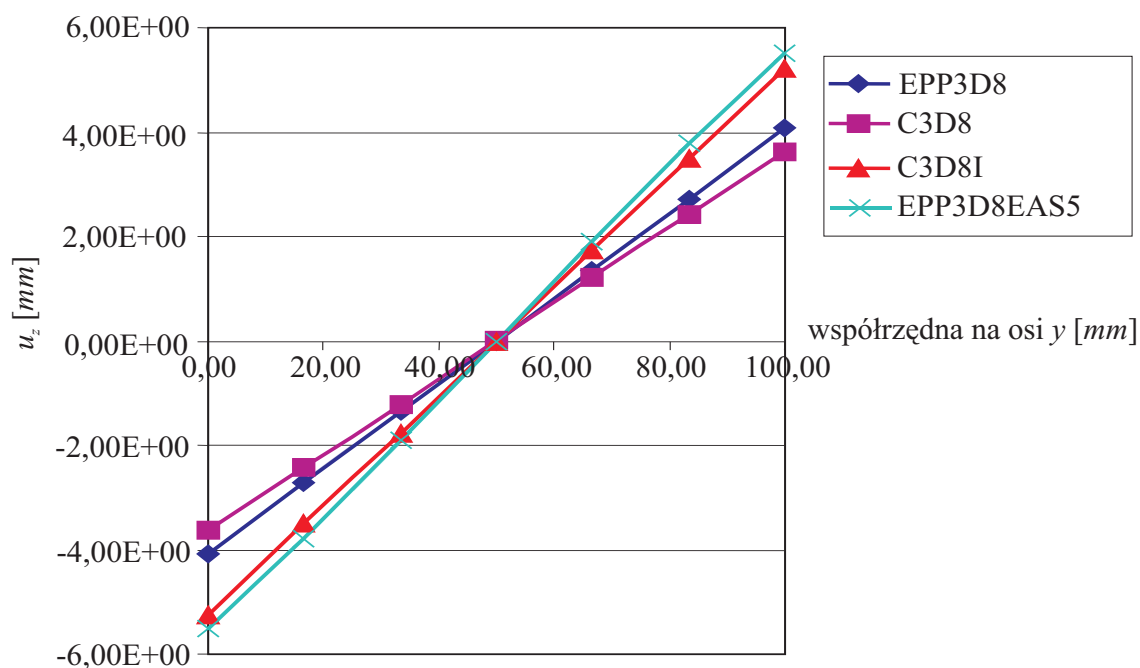
Rysunek B.2: Przeskalowana (50 x) deformacja próbki [0/90] wraz z konfiguracją początkową i poglądową mapą rozkładu przemieszczeń w kierunku osi z



Rysunek B.3: Przeskalowana (5 x) deformacja próbki [45/-45] wraz z konfiguracją początkową i poglądową mapą rozkładu przemieszczeń w kierunku osi z



Rysunek B.4: Wykres przemieszczeń w przekroju poprzecznym próbki [0/90] w kierunku osi y odpowiadający współrzędnej $x = 250 \text{ mm}$ dla różnych elementów skończonych przy tym samej gęstości siatki elementów



Rysunek B.5: Wykres przemieszczeń w przekroju poprzecznym próbki [0/90] w kierunku osi y odpowiadający współrzędnej $x = 250 \text{ mm}$ dla różnych elementów skończonych przy tym samej gęstości siatki elementów

Obie rozważane antysymetryczne próbki są rozróżniane dzięki innej orientacji włókien w warstwie dolnej i górnej. Każda z warstw ma grubość $h_l = 1.6$ mm i jest zbrojona ciągłymi włóknami ułożonymi w ściśle określonym kierunku. Kąt usytuowania włókien jest to kąt zawarty między materialnym układem współrzędnych warstwy a układem globalnym w jakim rozważana jest płyta. Konkretnie ułożenie włókien dla obu próbek możemy zapisać stosując klasyczną dla laminatów konwencję:

- orientacja zbrojenia w pierwszej próbce – [0/90],
- orientacja zbrojenia w drugiej próbce – [45/-45].

Rysunki B.2 i B.3 obrazują, odpowiednio, przeskalowaną deformację obu próbek poddanych maksymalnemu obciążeniu. Na wykresach przedstawionych na rysunkach B.4 i B.5 pokazane są przemieszczenia powierzchni środkowej płyty w przekroju poprzecznym w kierunku osi y , odpowiednio, dla płyty [0/90] zlokalizowanym w połowie jej rozpiętości ($x = 250$ mm), a dla próbki [45/-45] zlokalizowanym na obciążonym końcu ($x = 450$ mm). Wykresy te są wykonane dla różnych elementów skończonych przy tej samej gęstości siatki. Obliczenia są wykonane w systemie ABAQUS®, a nieliniowa analiza jest przeprowadzona przyrostowo metodą NEWTON-RAPHSONA. Wszystkie te elementy są zdefiniowane z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej i bazują na zależnościach mechaniki kontinuum. Są to elementy ośmiowęzłowe i mają jedynie przemieszczeniowe stopnie swobody. Dwa z nich C3D8 i C3D8I są to elementy dostępne w bibliotece systemu ABAQUS®, przy czym element C3D8 jest to wersja „czysta”, a element C3D8I jest wzbogacony o niekompatybilne formy (ang. *incompatible modes*) polepszające jego zachowanie w zginaniu. Pozostałe elementy to elementy własne włączone do systemu ABAQUS® jako procedury własne. Element EPP3D8, jest to „czysta” wersja opisywanego i definiowanego w rozdziale 5 elementu, „czysta” oznacza, że nie jest on wzbogacony metodami eliminującymi blokady - ANS i EAS. Element EPP3D8EAS5 jest element z 5 parametrami ulepszającymi EAS i z pełną modyfikacją ANS. Zaprezentowane rezultaty pokazują widoczną różnicę w wartościach przemieszczeń dla wyżej wymienionych elementów, szczególnie w przypadku [0/90] gdzie jest duży udział deformacji giętej. W przypadku elementów w wersji „czystej” niedoskonałość wyników przy tak rzadkim podziale na elementy skończone jest zrozumiałe (efekty blokady), zastanawiająca jest jedynie różnica dla elementów C3D8 i EPP3D8. Inne testy numeryczne, nie prezentowane w pracy, wykazały, że C3D8 w prostych testach numerycznych uwzględniających nieliniowość geometryczną daje gorsze wyniki w stosunku do EPP3D8. W przypadku elementów ulepszonych wyniki są znacznie lepsze przy tej gęstości podziału na elementy skończone, ale dość znacznie odbiegają od siebie w przypadku próbki [0/90]. Element C3D8I wykazuje zbyt duże przemieszczenie w środkowej części przekroju. Element własny EPP3D8EAS5 daje rezultaty zgodne z dostępnymi w literaturze [HÖRMANN 2002, SCHLEBUSCH 2005], gdzie są one porównane z rezultatami doświadczalnymi, z którymi są zgodne. Przykład ten prezentuje zasadność stosowania w konstrukcjach kompozytowych zaproponowanego w pracy elementu skończonego EPP3D8EAS5, jako elementu numerycznie wydajnego o wysokiej niezawodności.

Bibliografia

- ABAQUS (2004). *User's Manual, version 6.5*. Hibbitt, Karlson and Sorensen, Inc
- ABOUDI, J. (1981). *Generalized Effective Stiffness Theory for the Modelling of Fibre-reinforced Composites*. International Journal of Solids and Structures, 17:1005–1018
- ABOUDI, J.; BENVENISTE, Y. (1981). *An Average Theory for Dynamic Behaviour of a Laminated Elastic-viscoplastic Medium under General Loading*. International Journal of Solids and Structures, 17:69–81
- ABOUDI, J. J. (1991). *Mechanics of composite materials: a unified micromechanical approach*. Elsevier, Amsterdam
- ALFANO, G.; CRISFIELD, M. A. (2001). *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50:1701–1736
- ALFANO, G.; SACCO, E. *Combining interface damage and friction in a cohesive-zone model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering (in press), in press
- ALLIX, O.; BLANCHARD, L. (2006). *Mesomodeling of delamination: towards industrial applications*. Composites Science and Technology, 66:731–744
- ALTENBACH, H.; ALTENBACH, J.; KISSING, W. (2004). *Mechanics of composite structural elements*. Springer
- ANDELFINGER, U.; RAMM, E. (1993). *EAS-Elements for Two-Dimensional, Three-Dimensional Plate and Shell Structures and their Equivalence to HR-elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36:1311–1337
- BAŞAR, Y.; ITSKOV, M.; ECKSTEIN, A. (2000). *Composite Laminates: Nonlinear Interlaminar Stress Analysis by Multi-Layer Shell Elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 185:367–397
- BAŞAR, Y.; WEICHERT, D. (2000). *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts*. Springer=Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- BATHE, K. J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- BENZEGGAGH, M. L.; KENANE, M. (1996). *Measurement of Mixed-mode Delamination Fracture Toughness of Unidirectional Glass/Epoxy Composites with Mixed-mode Bending Apparatus*. Composites Science and Technology, 56:439—449
- BENZEGGAGH, M. L.; KHELLIL, K.; CHOTARD, T. (1995). *Exparimental determination of Tsai failure tensorial terms F_{ij} for unidirectional composite materials*. Composites Science and Technology, 55:145—156
- BETSCH, P.; STEIN, E. (1995). *An Assumed Strain Approach Avoiding Artificial Thickness Straining for Non-Linear 4-Node Shell Element*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 11:899–909
- BISCHOFF, M. (2005). *Advanced Finite Element Methods*. źródło: <http://www.st.bv.tum.de>
- BISCHOFF, M.; WALL, W. A.; BLETZINGER, K.-U.; RAMM, E. (2004). *Models and finite elements for thin-walled structures*. In: STEIN, E.; DE BORST, R.; HUGHES, T. J. R. (eds.): *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 2, pp. 1–80
- BISCHOFF, M.; KOSCHNICK, F.; BLETZINGER, K.-U. (2003). *Stabilized DSG Elements – A New Paradigm in Finite Element Technology*. In: CURBACH, M. (ed.): *Proceedings of the 4th European LS-DYNA Users Conference, 22 – 23 May 2003*
- BISCHOFF, M.; RAMM, E. (1997). *Shear Deformable Shell Elements for Large Strains and Rotations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:1–23

- BISCHOFF, M.; RAMM, E.; BRAESS, D. (1999). *A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements*. Computational Mechanics, 22:443–449
- BOLOTIN, V. V. (1966). *Delamination in composite structures: its origin, buckling, growth and stability*. Composites, 6:129–145
- BOLOTIN, V. V. (2001). *Mechanics of delaminations in laminate composite structures*. Mechanics of Composite Materials, 37:367–380
- BOSE, P.; REDDY, J. N. (1998a). *Analysis of composite plates using various plate theories Part1: Formulation and analytical solutions*. Structural Engineering and Mechanics, 6:583–612
- BOSE, P.; REDDY, J. N. (1998b). *Analysis of composite plates using various plate theories Part2: Finite element model and numerical results*. Structural Engineering and Mechanics, 6:727–746
- BRUNO, D.; GRECO, F.; LONETTI, P. (2005). *A 3D delamination modelling technique based on plate and interface theories for laminated structures*. European Journal of Mechanics A/Solids, 24:127–149
- BUI, V. Q.; MARECHAL, E.; NGUYEN-DANG, H. (2000). *Imperfect interlaminar interfaces in laminated composites: interlaminar stresses and strain-energy release rates*. Composites Science and Technology, 60:131–143
- CAMANHO, P. P.; DAVILA, C. G.; AMBUR, D. R. (2001). *Numerical simulation of delamination growth in composite materials*. In: NASA/TP-2001-211041
- CAMANHO, P. P.; DAVILA, C. G.; AMBUR, D. R. (2002). *Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials*. In: NASA/TM-2002-211737
- CHANG, F.-K.; LESSARD, L. B. (1991). *Damage tolerance of laminated composites containing an open hole and subjected to compressive loadings: Part I-Analysis*. Journal of Composite Materials, 25:2–43
- CHANG, T. Y.; SAWAMIPHAKDI, K. (1981). *Large deformation analysis of laminated shell by finite element method*. Computer and Structures, 13:331–340
- CHEN, J.; CRISFIELD, M.; KINLOCH, A. J.; MATTHEWS, E. L.; QIU, Y. (1999). *Predicting Progressive delamination of composite material specimens via interface element*. Mechanics Composite Materials and Structures, 6:301–317
- CHRISTENSEN, R. M. (1979). *Mechanics of composite materials*. John Wiley and Sons, New York
- CORIGLIANO, A.; ALLIX, O. (2000). *Some aspects of interlaminar degradation in composites*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 185:203–224
- CORNEC, A.; SCHEIDER, I.; SCHWALBE, K.-H. (2003). *On the practical application of the cohesive model*. Engineering Fracture Mechanics, 70:1963—1987
- CRISFIELD, M. A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley, London
- DATOO, M. H. (1991). *Mechanics of fibrous composites*. Elsevier
- DAUDEVILLE, L.; ALLIX, O.; LADEVEZE, P. (1995). *Delamination Analysis by Damage Mechanics: Some Applications*. Composite Engineering, 5:17–24
- DVORAK, G. J.; BAHEI-EL-DIN, Y. A. (1979). *Elastic-plastic Behavior of Fibrous Composites*. Journal Mech. Phys. Solids, 27:51–72
- DVORKIN, E. N.; BATHE, K.-J. (1984). *A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis*. Engineering Computations, 1:77–88
- GANAPATHY, S.; TRIPATHY, B.; RAO, K. P. (1995). *Damage and its growth in laminated composite circular/rectangular plater undergoing large deformations*. Composite Structures, 32:367–373

- GERMAN, J. (1996). *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*. Politechnika Krakowska, Kraków
- GOYAL, V. K.; JAUNKY, N. R.; JOHNSON, E. R.; AMBUR, D. R. (2004a). *Intralaminar and interlaminar progressive failure analyses of composite panels with circular cutouts*. *Composite Structures*, 64:91—105
- GOYAL, V. K.; JOHNSON, E. R.; DAVILA, C. G. (2004b). *Irreversible constitutive law for modeling the delamination process using interfacial surface discontinuities*. *Composite Structures*, 65:289—305
- GÜRDAL, Z.; HAFTKA, R. T.; HAJELA, P. (1999). *Design and optimization of laminated composite materials*. John Wiley and Sons
- HASHIN, Z. (1980). *Failure criteria for unidirectional composites*. *Journal for Applied Mechanics*, 47:329–334
- HASHIN, Z. (1990). *Composite materials with interphase: Thermoelastic and inelastic effects*. In: DVORAK, G. J. (ed.): *Inelastic Deformation of Composite Materials, IUTAM symposium Troy/New York*, pp. 3–34
- HINTON, M.; SODEN, P.; KADDOUR, A.-S. (2004). *Failure Criteria in Fibre-Reinforced-Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise*. Elsevier
- HÖRMANN, M. (2002). *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*. Institut für Baustatik, Stuttgart. Dissertation, Universität Stuttgart
- HU, H. (1955). *On some variational methods on the theory of elasticity and the theory of plasticity*. *Scientia Sinica*, 4(1):33–54
- HUGHES, T. J. R.; TEZDUYAR, T. (1981). *Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Mode Isoparametric Element*. *Journal of Applied Mechanics*, 48:587–596
- HYLA, I. (1995). *Elementy mechaniki kompozytów*. Politechnika Śląska, Gliwice
- IMIELIŃSKA, K. (2005). *Degradation and damage of advanced laminate polymer composites due to environmental effects and low velocity impact*. Politechnika Gdańska, Gdańsk
- JONES, R. M. (1999). *Mechanics of composite materials*. Taylor and Francis
- KAM, T. Y.; JAN, T. B. (1995). *First-ply analysis of laminated composite plates based on layer-wise linear displacement theory*. *Composite Structures*, 32:583–591
- KLINKEL, S.; GRUTTMANN, F.; WAGNER, W. (2006). *A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:179–201
- KOPALIŃSKI, W. (1999). *Słownik wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych z almanachem*. Muza SA, Warszawa
- KUCZMA, M. S. (1991). *Problem jednostronnego kontaktu belek i płyt na podłożu lepkosprężystym*. Rozprawy 255, Poznań
- KUCZMA, M. S.; KULA, K. (2003a). *Analysis of the elastic composite plates by the finite elements method*. In: *Effective use of building materials : workshop*, pp. 135–138. Gdańsk, Sopot
- KUCZMA, M. S.; KULA, K. (2003b). *Zastosowanie metody elementów skończonych w mechanice płyt włóknokompozytowych*. In: *Problemy budownictwa. (Księga pamiątkowa z okazji 70-lecia prof. T.Bilińskiego)*, pp. 349–369. Zielona Góra
- KUCZMA, M. S.; KULA, K. (2005). *Elastic analysis of thin fiber-reinforced plates*. *Civil and Environmental Engineering Reports*, 1:117–134
- KUCZMA, M. S.; KULA, K. (2006). *Modelling of composite plates including damage*. *PAMM Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 6:175–176

- KUCZMA, M. S.; STEIN, E. (1994). *On nonconvex problems in the theory of plasticity*. *Archiwum Mechaniki*, 46:505–529
- KULA, K. (1999). *Analiza parametryczna płyt włóknokompozytowych*. Praca magisterska, Zielona Góra
- KULA, K. (2004). *Analiza płyt warstwowych z zastosowaniem MES*. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej - (Budownictwo z.102)*, 1644:241–248
- LADVEZE, P. (1992). *A damage computational method for composite structures*. *Computer and Structures*, 44:79–87
- LEE, J. D. (1982). *Three dimensional finite element analysis of damage accumulation in composite laminate*. *Composite and Structures*, 15:335–350
- LEMAITRE, J. (1996). *A course on damage mechanics*. Springer
- LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. (2005). *Engineering damage mechanics. Ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer
- LEWIŃSKI, T.; TELEGA, J. J. (1999). *Plates, laminates and shells*. World Scientific, Singapore
- ŁODYGOWSKI, T.; OLESZKIEWICZ, E. (1999). *Metal matrix composites under static, dynamic and thermal loading*. In: *ECCMM 99*, pp. 728–751. Monachium
- MAIRE, J. F.; CHABOCHE, J. L. (1997). *A New Formulation of Continuum Damage Mechanics (CDM) for Composite Materials*. *Aerospace Science and Technology*, 4:247–257
- MALLIK, P. K. (1988). *Fiber-reinforced composites: materials, manufacturing, and design*. Marcel Dekker
- MATHEAS, J. (2005). *Entwicklung von Finiten Schalenelementen zur Berechnung von Verstärkungen aus Textilbeton bei Flächentragwerken*. TUD, Dresden. Dissertation, Technische Universität Dresden
- MATTHEWS, F. L.; RAWLINGS, R. D. (1999). *Composite materials: engineering and science*. Woodhead Publishing Ltd
- MEO, M.; THIEULOT, E. (2005). *Delamination modelling in a double cantilever beam*. *Composite Structures*, 71:429–434
- MRÓZ, Z.; SHAMIEV, F. G. (1979). *Simplified yield conditions for fibre-reinforced plates and shells*. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 3:463–476
- OCHELSKI, S. (2004). *Metody doświadczalne mechaniki kompozytów konstrukcyjnych*. WNT, Warszawa
- OCHOA, O. O.; REDDY, J. N. (1992). *Finite element analysis of composite laminates*. Kluwer, Dordrecht
- OLESZKIEWICZ, E. (2004). *Analiza numeryczna nośności kompozytów włóknistych o osnowie metalowej*. Rozprawa doktorska, Poznań
- PADHI, G. S.; SHENOI, R. A.; MOY, S. S. J.; HAWKINS, G. L. (1998). *Progressive failure and ultimate collapse of laminated composite plates in bending*. *Composite Structures*, 40:277–291
- PEREIRA, A. B.; DE MORAIS, A. B. (2006). *Mixed mode I + II interlaminar fracture of glass/epoxy multidirectional laminates – Part 2: Experiments*. *Composites Science and Technology*, 66:1896–1902
- PRADHAN, S. C.; TAY, T. E. (1998). *Three-dimensional finite element modelling of delamination growth in notched composite laminates under compression*. *Engineering Fracture Mechanics*, 60:157–171
- PUCK, A.; SCHUERMAN, H. (1998). *Failure Analysis of Frp Laminates by Means of Physically Based Phenomenological Models*. *Composites Science and Technology*, 58:1045–1067

- RAMM, E. (1977). *A plate/shell element for large deflections and rotations*. In: BATHE, K. J. (ed.): *Formulations and algorithms in finite element analysis*. M.I.T. Press, Massachusetts
- REDDY, J. N. (1997). *Mechanics of laminated composite plates. Theory and analysis*. CRC Press
- REDDY, J. N.; CHANDRSHEKHARA, K. (1987). *Recent advances in the nonlinear analysis of laminated composite plates and shells*. Shock Vibr. Dig., 19:3–9
- REMMERS, J. J. C.; DE BORST, R. (2002). *Delamination buckling of fibre-metal laminates under compressive and shear loadings*
- REMMERS, J. J. C.; DE BORST, R. (2003). *A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51:2013–2040
- RYBICKI, E. F.; KANNINEN, M. F. (1977). *A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral*. Engineering Fracture Mechanics, 9:931–938
- RYMARZ, C. (1993). *Mechanika ośrodków ciągłych*. PWN, Warszawa
- SCHLEBUSCH, R. (2005). *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. TUD, Dresden. Dissertation, Technische Universität Dresden
- SCIUVA, M. D.; ICARDI, U.; VILLANI, M. (1998). *Failure analysis of composite laminates under large deflection*. Composite Structures, 40:239–255
- SIMO, J.-C.; RIFAI, M. S. (1990). *A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 29:1595–1638
- ŚWITKA, R. (1992). *Equations of the fibre composite plates*. Engineering Transactions, 40:187–201
- ŚWITKA, R. (2004). *O pewnej koncepcji teorii płyt włóknokompozytowych*. In: *III Sympozjum: Kompozyty. Konstrukcje warstwowe*, pp. 149–156. Wrocław-Karpacz
- ŚWITKA, R.; KUCZMA, M. S.; KULA, K. (2002). *Analiza sprężystych płyt włóknokompozytowych metodą elementów skończonych*. In: *VI Konferencja Naukowa Konstrukcje Zespólone*, vol. 1, pp. 195–204. Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
- TSAI, S. W.; WU, E. M. (1971). *A general theory of strength for anisotropic materials*. Journal of Composite Materials, 5:58–80
- TURON, A.; CAMANHO, P. P.; COSTA, J.; DAVILA, C. G. (2004). *An interface damage model for the simulation of delamination under variable-mode ratio in composite materials*. In: *NASA/TM-2004-213277*
- VU-QUOC, L.; TAN, X. G. (2003). *Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192:975–1016
- WAGNER, W.; GRUTTMANN, F.; SPRENGER, W. (2001). *A finite element formulation for the simulation of propagating delaminations in layered composite structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51:1337–1359
- WASHIZU, K. (1955). *On the variational principles of elasticity and plasticity*. In: *Technical Report 25-18, Aeroelastic and Structures Research Laboratory*.
- WIĘCKOWSKI, Z. (1995). *Dual finite element methods in mechanics of composite materials*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 33:233–252
- WILCZYŃSKI, A. P. (1996). *Polimerowe kompozyty włókniste*. WNT, Warszawa
- WOŹNIAK(RED.), C. (2001). *Mechanika sprężystych płyt i powłok*. PWN, Warszawa

- ZASTRAU, B. W.; SCHLEBUSCH, R.; MATHEAS, J. (2000). *Surface-related Shell Theories for the Treatment of Composites and Contact Problems*. In: PAPADRAKAKIS, M.; SAMARTIN, A.; OÑATE, E. (eds.): *Proceedings of the Fourth Colloquium on Computation of Shells & Spatial Structures, Chania (Crete), Greece, CD-ROM Proceedings*, pp. 1–18. IASS–IACM, ISASR–NTUA, Athen, Greece
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1972). *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. (2000). *The finite element method*. Butterworth Heinemann
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; TOO, J. M. (1971). *Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3:275–290
- ZOU, Z.; REID, S. R.; LI, S. (2003). *A continuum damage model for delaminations in laminated composites*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:333–356
- ZOU, Z.; REID, S. R.; LI, S.; SODEN, P. D. (2002). *Application of a delamination model to laminated composite structures*. *Composite Structures*, 56:375–389

Krzysztof Kula

NONLINEAR ANALYSIS OF FIBRE-COMPOSITE PLATES

The work is concerned with the modelling and numerical simulation of fibre-composite plates in the nonlinear range due to large displacements and damage.

In the beginning of the work (see Chapter 4) is considered the bending problem of a fibre-composite plate in the elastic range. Within the classical KIRCHHOFF plate theory, two approaches are utilized. In the model due to ŚWITKA, the fibre-composite plate is treated as a homogeneous medium with a number of embedded families of fibres, while in the second model the plate is considered as a system of orthotropic layers (the layer-wise model). The bending problem is formulated in classical and variational forms and solved by finite element method. We have developed our own computer code and numerically compared predictions of the two models and other models available in the program ABAQUS[®] on test examples. Numerical results illustrating influence of the placement of fibres on the quantities of interest are also included.

The next part (see Chapter 5) deals with failure analysis. The failure analysis of the composite structure is the main goal of the work. Two finite element models are done for prediction and description of the failure progression. The first is based upon the stress failure criteria. The layer-wise approach is applied. Each layer is treated as elastic-brittle and assumed to be orthotropic in the local material coordinate system. The appearance of damage is controlled according to the failure criteria. When the failure condition is satisfied, the mechanical properties of the material are modified appropriately, depending on the type of damage (fibre breakage, matrix crack, fibre-matrix shear). The model is programmed as a user subroutine within the ABAQUS[®] environment for different failure criteria. For the discretisation of the plates are used the shell elements based upon the first order shear deformation theory which are able to describe the global behaviour sufficiently. Especially in the composite structures can occur the interlaminar failure is usually called *delamination*. To study the problem the complicated 3-D-stress state has to be taken into consideration. The laminated structure is modeled by a solid-shell finite element. The utilized solid-shell finite element based upon a three-dimensional continuum mechanics formulation is defined. The pure displacement finite element is improved by the locking avoiding methods: ANS (Assumed Natural Strain) and EAS (Enhanced Assumed Strain). The mechanical modelling of delamination onset and propagation is based upon a cohesive zone model implemented into a cohesive element located between laminae of a composite structure. The onset of delamination is predicted by the stress-based HASHIN criterion. The condition of delamination propagation is based on a critical energy release rate (a fracture energy). The numerical calculations are realized within the commercial software package ABAQUS[®] by implementing own user-written finite element procedures (*UEL). Finally the numerical results for some typical benchmarks are presented and discussed. The part of the results are compared with experimental results from literature.

Key words: fibre-composite material, layered plate, bending of anisotropic plate, failure criteria, damage, delamination, solid-shell finite element, cohesive element