Funkcje arytmetyczne i specjalne ciągi liczbowe

Barbara Mędryk

11 grudnia 2006 roku

Spis treści

Wstęp

Pierwszy rozdział pracy poświęcony został badaniu pewnych własności funkcji arytmetycznych, które są ważne zarówno w teorii liczb jak też w innych dziedzinach matematyki. Rozważane funkcje związane są głównie z podzielnością liczb oraz rozkładem liczb na czynniki. Niektóre z nich mają już trwałą terminologię i oznaczenia, na przykład funkcja Eulera $\varphi(n)$, funkcja $d(n)$ równa liczbie wszystkich naturalnych dzielników liczby n, funkcja $\sigma(n)$ równa sumie tych dzielników, funkcja $\sigma_j(n)$ równa sumie j-tych potęg tych dzielników, funkcja $\omega(n)$ równa liczbie różnych dzielników pierwszych liczby n, funkcja $\Omega(n)$ równa liczbie czynników w rozkładzie liczby n na iloczyn czynników pierwszych.

Funkcję o wartościach zespolonych, określoną na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ lub $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazywamy *funkcją arytmetyczną.*

Zbiór wszystkich funkcji arytmetycznych określonych na $\mathbb{N}$ tworzy pierścień ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem funkcji jako działaniami. Można także, zachowując zwykłe dodawanie, wprowadzić w tym zbiorze inne mnożenie i znowu otrzymać pierścień. Przykładem takiego działania jest splot Dirichleta funkcji arytmetycznych określony wzorem:

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2).$$

Funkcje arytmetyczne można podzielić na dwie ważne klasy, a mianowicie *funkcje addytywne i multyplikatywne.*

Jeśli funkcja f określona na zbiorze liczb naturalnych spełnia dla wszystkich względnie pierwszych liczb m, n warunek:

$$f(mn) = f(m) + f(n),$$

to mówimy, że f jest *funkcją addytywną.* Jeśli ten warunek jest spełniony dla wszystkich bez wyjątku liczb m, n, to f nazywa się *funkcją całkowicie addytywną* lub *w pełni addytywną.* Podobnie, jeśli funkcja f, która nie jest tożsamościowo równa zeru, spełnia dla wszystkich względnie pierwszych liczb m, n warunek:

$$f(mn) = f(m)f(n),$$

to mówimy, że f jest *funkcją multyplikatywną.* Analogicznie, jeśli powyższy warunek jest spełniony dla wszystkich m, n, to f nazywa się *funkcją całkowicie (w pełni) multyplikatywną.*

Z wymienionych powyżej funkcji arytmetycznych funkcje $\varphi(n)$, $d(n)$, $\sigma(n)$, $\sigma_j(n)$ są multyplikatywne, natomiast funkcje $\omega(n)$ i $\Omega(n)$ są addytywne.

W pierwszym paragrafie badany jest ciąg liczb naturalnych postaci $n - \varphi(n)$. W 1959 roku W. Sierpiński postawił problem dotyczący istnienia nieskończenie wielu liczb naturalnych, które nie są wyrazami ciągu $n - \varphi(n)$ ([43]). Przyjmujemy, że liczby naturalne, które spełniają ten warunek należą do ciągu liczb Sierpińskiego. J. Browkin i A. Schinzel w 1995 roku udzielili pozytywnej odpowiedzi na pytanie postawione przez W. Sierpińskiego ([1]). Dowiedli oni, że żadna z liczb postaci $(2^k p_0)_{k \geqslant 1}$, gdzie $p_0 = 509203$ jest liczbą pierwszą, nie jest wyrazem ciągu $n - \varphi(n)$. W twierdzeniu 4 podajemy kryterium na to, aby ciąg liczb postaci $(2^k p)_{k \geqslant 1}$, gdzie p jest liczbą pierwszą, był ciągiem Sierpińskiego. Kolejne twierdzenie, a mianowicie twierdzenie 5 orzeka, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych w postępie arytmetycznym $m \prod_{j=1}^{6} q_j + p_0$, gdzie $p_0 = 509203$, zaś $\prod_{j=1}^{6} q_j = 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 241$.
W twierdzeniu 8 podajemy kryterium na to, aby liczba $2p$, gdzie p jest liczbą pierwszą nieparzystą, była postaci $n - \varphi(n)$.

Druga część pierwszego rozdziału dotyczy pewnych oszacowań funkcji sumy dzielników $\sigma(n)$. W twierdzeniu 9 znajdujemy następujące oszacowanie dolne tej funkcji. Mianowicie,

$$\sigma(n) > (\sqrt[r]{n} + \sqrt[r]{n_0})^r \geqslant (\sqrt[k]{n} + \sqrt[k]{n_0})^k,$$

gdzie $n_0 = \frac{n}{s(n)}$, $s(n)$ oznacza bezkwadratowe jądro argumentu n, $r = \omega(n)$, $2 \leqslant k \leqslant r$.

Jako wniosek z powyższej nierówności, wynika następująca nierówność:

$$\sigma(n) > (\sqrt[r]{n}+1)^r \geqslant n + 2\sqrt{n} + 1,$$

która jest lepsza od klasycznej, znanej nierówności $\sigma(n) > n + \sqrt{n}$ podanej w monografii W. Sierpińskiego ([43]). Kolejne twierdzenie (twierdzenie 11) tej części pracy jest ściśle związane z nierozstrzygniętą dotychczas hipotezą Riemanna. Dowodzimy tu, że dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność:

$$\sigma(n) > \frac{6}{\pi^2} e^{\gamma} n \log\log n,$$

gdzie γ jest stałą Eulera.

Trzeci paragraf tej części pracy związany jest ze znanym problemem istnienia liczb doskonałych nieparzystych, to znaczy liczb naturalnych n, dla których spełnione jest równanie $\sigma(n) = 2n$. Podajemy krótki przegląd oszacowań dla liczb doskonałych nieparzystych. W lematach i twierdzeniu 17 korzystamy z klasycznego rezultatu Eulera, to znaczy, że jeśli n jest liczbą doskonałą nieparzystą, to $n = p^{\alpha} m^2$, gdzie $p \equiv \alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4), p \nmid m, p$ jest liczbą pierwszą i α liczbą całkowitą dodatnią. Podajemy tu dolne oszacowania związane z kryterium A. Grytczuka w 2004 roku ([16]).

W drugim rozdziale pracy zajmujemy się uogólnionymi ciągami liczb Fermata postaci $F_n(a) = a^{2^n} + 1$, gdzie $a \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą całkowitą parzystą, zaś $n = 0, 1, 2, \ldots$ Podajemy oszacowania od dołu dla największego dzielnika pierwszego uogólnionych liczb Fermata $F_n(a)$, który oznaczamy przez $P(F_n(a))$. W twierdzeniu 25 podajemy następujące oszacowanie:

$$P(F_n(a)) > \frac{2^{n+2}(n+1)\log 2}{\log a} + 1.$$

Ostatni rozdział pracy został poświęcony specjalnym typom funkcji arytmetycznych określonych na półgrupie ideałów całkowitych $G_{\mathcal{K}}$, gdzie $\mathcal{K}$ oznacza ciało liczb algebraicznych stopnia n nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Twierdzenie 30 zawiera dalsze rozszerzenie wyniku A. Grytczuka z 1980 roku ([11]). W dowodzie tego twierdzenia korzystamy z własności funkcji

dzeta Dedekinda. Ponadto, wyznaczamy gęstość d_0 wszystkich całkowitych bezkwadratowych ideałów półgrupy $G_{\mathcal{K}}$, związanych z wcześniej określonymi funkcjami arytmetycznymi.
W szczególności otrzymujemy, że $d_0 = \frac{\chi h}{\zeta_{\mathcal{K}}(2)}$. W przypadku gdy $G_{\mathcal{K}} = \mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{N}$ jest multyplikatywną półgrupą liczb naturalnych, rezultat ten implikuje klasyczną formułę
A. Rényi'ego z 1955 roku ([38]) oraz, że gęstość liczb naturalnych bezkwadratowych wynosi $d_0 = \frac{6}{\pi^2}$.

Część wyników zawartych w tej rozprawie została opublikowana w pracach [17], [19], [20] i [31]. Praca zawierająca rezultaty dotyczące oszacowań związanych z istnieniem liczb doskonałych nieparzystych jest przygotowana do druku.

Rozdział 1

Funkcja arytmetyczna Eulera i funkcja sumy dzielników

1.1 Problem Sierpińskiego związany z funkcją Eulera

Funkcję $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taką, że dla każdej liczby naturalnej n spełniony jest warunek:

$$\varphi(n) = card\{1 \leqslant k \leqslant n : \gcd(k, n) = 1\}$$

nazywamy *funkcją Eulera*.

Przykład. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2, \ldots$

Ważnymi własnościami tej funkcji są:

1. funkcja Eulera jest funkcją multyplikatywną, to znaczy

$$\underset{m,n \in \mathbb{N}}{\forall} \gcd(m, n) = 1 \Rightarrow \varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n),$$

2. $\varphi(p) = p - 1$, gdzie p jest liczbą pierwszą,

3. $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$, gdzie p jest liczbą pierwszą, natomiast α dowolną liczbą naturalną,

4. $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą dla $n \geqslant 3$.

W 1959 roku W. Sierpiński ([43]) postawił następujący problem:

Czy istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, które nie są wyrazami ciągu $n - \varphi(n)$, $n \geqslant 1$.

Mówimy, że liczba naturalna m spełnia *warunek Sierpińskiego*, jeśli $m \neq n - \varphi(n)$.

Ciągiem Sierpińskiego będziemy nazywać ciąg liczb naturalnych spełniających warunek Sierpińskiego.

Używając wyniku H. Riesela z 1956 roku ([28]), że wszystkie liczby postaci $2^k p_0 - 1$, gdzie $p_0 = 509203$ jest liczbą pierwszą, są złożone dla $k \geqslant 1$, w 1995 roku J. Browkin i A. Schinzel ([1]) dowiedli, że istnieje nieskończenie wiele liczb, które nie są wyrazami ciągu $n - \varphi(n)$.

Udowodnili oni następujące twierdzenie, które daje pozytywną odpowiedź na pytanie postawione przez W. Sierpińskiego.

Twierdzenie 1 *Żadna z liczb ciągu* $(2^k \cdot 509203)$, *dla* $k \geqslant 1$ *nie jest postaci* $n - \varphi(n)$.

W kolejnych twierdzeniach wykorzystujemy *liczby Mersenne'a*: $M_n = 2^n - 1$, gdzie n jest liczbą naturalną i $n \geqslant 2$. Wiadomo ([43]), że jeśli M_n jest liczbą pierwszą, to n też musi być liczbą pierwszą, ale nie na odwrót. *Liczby pierwsze Mersenne'a* oznaczamy przez $M_p = 2^p - 1$.

W 2000 roku A. Flammenkamp i F. Luca ([10]) rozszerzyli powyższy wynik, dowodząc następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2 *Niech p będzie liczbą naturalną, spełniającą następujące warunki:*

1. *p jest liczbą pierwszą nieparzystą,*

2. *p nie jest liczbą pierwszą Mersenne'a,*

3. $2^k p - 1$ *jest liczbą złożoną dla wszystkich całkowitych* $k \geqslant 1$,

4. $2p \neq n - \varphi(n)$.

Wtedy ciąg $(2^k p)_{k \geqslant 1}$ *jest ciągiem Sierpińskiego.*

Podali również ogólną metodę znajdowania liczb m, dla których ciąg $(2^k m)_{k \geqslant 1}$ jest ciągiem Sierpińskiego. Udowodnili także następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3 *Niech* $k \geqslant 1$ *będzie liczbą naturalną i niech*

$$m \in \{509203, 2554843, 9203917, 9545351, 10645867, 11942443, 6548763\}.$$

Wtedy ciąg $(2^k m)_{k \geqslant 1}$ *jest ciągiem Sierpińskiego.*

Można więc postawić następujący problem:

Dla jakich liczb pierwszych p *ciąg* $(2^k p)_{k \geqslant 1}$ *jest ciągiem Sierpińskiego?*

Udowodnimy teraz następujące kryterium na to, aby ciąg postaci $(2^k p)_{k \geqslant 1}$ był ciągiem Sierpińskiego.

Twierdzenie 4 *Niech* p *będzie liczbą pierwszą nieparzystą. Ciąg* $(2^k p)_{k \geqslant 1}$ *jest ciągiem Sierpińskiego wtedy i tylko wtedy gdy,*

1^0 $2p \neq n - \varphi(n)$,

2^0 p *nie jest liczbą pierwszą Mersenne'a,*

3^0 $2^k p - 1$ *jest liczbą złożoną dla każdej liczby naturalnej* $k \geqslant 1$.

Dowód. Warunek dostateczny udowodnimy przez indukcję. Zakładamy najpierw, że warunki $1^0 - 3^0$ są spełnione. Pierwszy krok indukcji wynika z 1^0. Dalej załóżmy, że ciąg $(2^{k-1}p)$ jest ciągiem Sierpińskiego. Przypuśćmy, że ciąg $(2^k p)$ nie jest ciągiem Sierpińskiego.

Wówczas dla pewnej liczby naturalnej n_k mamy

$$2^k p = n_k - \varphi(n_k). \tag{1.1}$$

Ponieważ $\varphi(n_k) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ lub $\varphi(n_k) \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$, więc analizując równanie (1.1) mamy $n_k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ lub $n_k = 2q^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, gdzie q jest liczbą pierwszą nieparzystą. Jeśli $n_k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, to $\frac{\varphi(n_k)}{2} = \varphi\left(\frac{n_k}{2}\right)$ i ze wzoru (1.1) wynika, że

$$2^{k-1} p = \frac{n_k}{2} - \varphi\left(\frac{n_k}{2}\right). \tag{1.2}$$

Równość (1.2) przeczy założeniu indukcyjnemu, co kończy dowód dostateczności kryterium.

Niech teraz $\varphi(n_k) \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$. Wtedy wobec tego, że $n_k = 2q^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, q jest liczbą pierwszą nieparzystą, mamy

$$2^k p = 2q^\alpha - \varphi(2q^\alpha) = q^{\alpha-1}(q+1). \tag{1.3}$$

Jeśli $\alpha = 1$ to z (1.3) wynika, że $2^k p - 1 = q$, co daje nam sprzeczność z warunkiem 3^0. Zatem $\alpha > 1$ i z (1.3) mamy

$$q^{\alpha-1} \mid p. \tag{1.4}$$

Ponieważ q, p są liczbami pierwszymi, więc z (1.4) wynika, że $\alpha = 2$ i $q = p$. Natomiast dla $q = p$ z (1.3) wynika, że $2^k - 1 = p$, co przeczy warunkowi 2^0.

Udowodnimy teraz konieczność warunków $1^0 - 3^0$. Zakładamy, że ciąg $(2^k p)_{k \geqslant 1}$ jest ciągiem Sierpińskiego. Warunek 1^0 dostajemy natychmiast dla $k = 1$. Warunki 2^0 i 3^0 otrzymamy przez kontrapozycję. Rzeczywiście zakładając, że dla pewnej liczby naturalnej $k > 1$ mamy $2^k - 1 = p$ lub $2^k p - 1 = q$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi nieparzystymi i przyjmując $n = 2p^2$ dostaniemy

$$n - \varphi(n) = 2p^2 - \varphi(2p^2) = 2p^2 - p(p-1) = p(p+1). \tag{1.5}$$

Dla $p = 2^k - 1$, z (1.5) wynika, że $n - \varphi(n) = 2^k p$.

W podobny sposób otrzymujemy sprzeczność w drugim przypadku, gdy $2^k p - 1 = q$.

Przyjmując teraz $n = 2q$ otrzymujemy

$$n - \varphi(n) = 2q - \varphi(2q) = 2q - (q-1) = q + 1 = 2^k p,$$

co kończy dowód twierdzenia 4. ■

W twierdzeniu 5 dowodzimy, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p, spełniających warunki 2^0 i 3^0 oraz, że liczby te są efektywnie wyznaczone przez postęp arytmetyczny.

Twierdzenie 5 *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p w postępie arytmetycznym $m \prod_{j=1}^{6} q_j + p_0$, gdzie $p_0 = 509203$ jest liczbą pierwszą, zaś $\prod_{j=1}^{6} q_j = 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 241$, takich, że*

1^0 $2^k p - 1$ jest liczbą złożoną dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 1$,

2^0 p nie jest liczbą pierwszą Mersenne'a.

W dowodzie tego twierdzenia korzystamy z następującego lematu ([20]), który wynika bezpośrednio z dowodu podanego w pracy J. Browkina i A. Schinzla ([1]):

Lemat 6 *Niech $p_0 = 509203$. Wtedy dla $j = 1, 2, \ldots, 6$ mamy*

$$p_0 \equiv 2^{a_j} (\operatorname{mod} q_j), \tag{1.6}$$

$$2^k p_0 \equiv 1 (\operatorname{mod} q_j), \tag{1.7}$$

gdzie

$$\langle q_j, a_j \rangle = \{\langle 3, 0\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 7, 1\rangle, \langle 13, 5\rangle, \langle 17, 1\rangle, \langle 241, 21\rangle\} \tag{1.8}$$

oraz liczba całkowita k spełnia kongruencję

$$k \equiv -a_j (\operatorname{mod} m_j) \tag{1.9}$$

dla $m_j = 2, 4, 3, 12, 8, 24$ odpowiednio.

W dowodzie twierdzenia 5, korzystamy również z twierdzenia Dirichleta:

Twierdzenie 7 (Dirichleta) *([29]) Niech $b \geqslant 2$ i $a \neq 0$ będą liczbami całkowitymi takimi, że* $\gcd(a, b) = 1$. *Wtedy postęp arytmetyczny*

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$$

zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Równoważnie, zbiór

$$S = \{p \in P : p \equiv a (\operatorname{mod} b)\},$$

gdzie P oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych, jest nieskończonej mocy.

Ponadto, gęstość zbioru S w zbiorze liczb pierwszych wynosi $\frac{1}{\varphi(b)}$, gdzie φ jest funkcją Eulera, to znaczy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{card\{p \in P: \ p \equiv a (\operatorname{mod} b), \ p \leqslant x\}}{card\{p \in P: \ p \leqslant x\}} = \frac{1}{\varphi(b)}.$$

Podamy teraz dowód twierdzenia 5.

Dowód. Rozpatrzmy następujący postęp arytmetyczny

$$m\prod_{j=1}^{6} q_j + p_0, \ \prod_{j=1}^{6} q_j = 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 241. \tag{1.10}$$

Z (1.7) wynika, że $\gcd\left(p_0, \prod_{j=1}^{6} q_j\right) = 1$. Zatem na mocy twierdzenia Dirichleta o postępach arytmetycznych dostajemy, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p w postępie arytmetycznym określonym wzorem (1.10).

Pokażemy teraz, że ciąg $(2^k p)_{k\geqslant 1}$ jest ciągiem Sierpińskiego, dla każdej liczby pierwszej p należącej do postępu arytmetycznego (1.10). Niech $p = m\prod_{j=1}^{6} q_j + p_0$ będzie jedną z tych liczb pierwszych. Wtedy mamy

$$2^k p - 1 = 2^k \left(m \prod_{j=1}^{6} q_j + p_0 \right) - 1 = 2^k m \prod_{j=1}^{6} q_j + 2^k p_0 - 1. \tag{1.11}$$

Ze wzorów (1.11) i (1.7) dostajemy

$$2^k p - 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} q_j).$$

Oznacza to, że wszystkie liczby postaci $2^k p - 1$ są złożone.

Dla drugiej części dowodu załóżmy, że liczba pierwsza $p = m \prod_{j=1}^{6} q_j + p_0$ jest liczbą pierwszą Mersenne'a. Zatem dla pewnej liczby naturalnej k mamy

$$p = m \prod_{j=1}^{6} q_j + p_0 = 2^k - 1. \tag{1.12}$$

Z (1.12) wynika, że

$$q_j \mid 2^k - 1 - p_0, \tag{1.13}$$

dla pewnego $q_j = 3, 5, 7, 13, 17, 241$.

Dalej z (1.13) mamy

$$q_j \mid p_0(2^k - 1 - p_0) = 2^k p_0 - p_0(p_0 + 1) + 1 - 1. \tag{1.14}$$

Ponieważ $q_j \mid 2^k p_0 - 1$, więc z (1.7) i (1.14) otrzymujemy

$$q_j \mid p_0(p_0 + 1) - 1. \tag{1.15}$$

Stosując do (1.15) podstawienie $p_0 = 509203$, dostajemy rozkład na czynniki pierwsze postaci

$$p_0(p_0 + 1) - 1 = 509203 \times 509204 - 1 = 59 \times 71 \times 809 \times 76511. \tag{1.16}$$

Z (1.16) wynika, że żadna z liczb pierwszych $q_j = 3, 5, 7, 13, 17, 241$ nie spełnia warunku (1.15). ■

Kolejne twierdzenie zawiera kryterium na to, aby liczba $2p$ była postaci $n - \varphi(n)$.

Twierdzenie 8 *Liczba $2p$, gdzie p jest liczbą pierwszą nieparzystą, jest postaci $n - \varphi(n)$ wtedy i tylko wtedy gdy, istnieją różne liczby pierwsze nieparzyste p_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, $r \geqslant 1$ takie, że*

$$p = p_1 p_2 \ldots p_r - \frac{1}{2}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_r - 1). \tag{1.17}$$

Dowód. Zakładamy, że dla pewnej liczby naturalnej n, liczba $2p$ jest postaci

$$2p = n - \varphi(n). \tag{1.18}$$

Niech $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, gdzie p_j są różnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi, dla $j = 1, 2, \ldots, r$, $r \geqslant 1$. Wtedy z własności funkcji Eulera otrzymujemy, że $\varphi(n) = \varphi(2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = 2^{\alpha-1} p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots p_r^{\alpha_r - 1}(p_1 - 1) \ldots (p_r - 1)$.

Z (1.18) mamy

$$2p = 2^{\alpha-1} p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots p_r^{\alpha_r - 1}(2p_1 \ldots p_r - (p_1 - 1) \ldots (p_r - 1)). \tag{1.19}$$

Jeśli $\alpha \geqslant 2$, to reprezentacja (1.19) jest niemożliwa, gdyż lewa strona (1.19) jest liczbą pierwszą nieparzystą, a prawa strona jest liczbą całkowitą parzystą. Dlatego $\alpha = 1$ i z (1.19) dostajemy, że $\alpha_j = 1$ dla $j = 1, 2, \ldots, r$ i ponownie z (1.19) wynika, że

$$p = p_1 p_2 \ldots p_r - \frac{1}{2}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_r - 1). \tag{1.20}$$

Załóżmy teraz, że zachodzi wzór (1.20). Kładąc $n = 2p_1 \ldots p_r$ mamy

$$\varphi(n) = (p_1 - 1) \ldots (p_r - 1).$$

Ze wzoru (1.20) wynika, że $2p = n - \varphi(n)$, co kończy dowód twierdzenia 8. ■

Wyniki zawarte w twierdzeniach 4, 5 i 8 zostały opublikowane w 2005 roku we wspólnej pracy z A. Grytczukiem ([20]), (por. MR2177025).

1.2 Pewne oszacowania funkcji sumy dzielników związanych z hipotezą Riemanna

Funkcję $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, która dla każdej liczby naturalnej n określona jest wzorem:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

nazywamy *funkcją sumy dzielników.*

Przykład. $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 7$, $\sigma(5) = 6$, $\sigma(6) = 12, \ldots$

Istotnymi własnościami tej funkcji są:

1. Funkcja sumy dzielników jest funkcją multyplikatywną, to znaczy

$$\underset{a,b\in\mathbb{N}}{\forall} \gcd(a, b) = 1 \Rightarrow \sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b).$$

2. Suma $\sigma(n)$ wszystkich dzielników liczby naturalnej $n > 1$ wyraża się wzorem: $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{s} \frac{q_i^{\alpha_i+1}-1}{q_i-1}$.
3. Dla każdej liczby naturalnej n, równość $\sigma(n) = n + 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

W tej części pracy podajemy pewne oszacowania funkcji $\sigma(n)$ z dołu. Jedno z tych oszacowań jest związane z nierozstrzygniętą dotychczas i bardzo ważną hipotezą Riemanna.

W trakcie badania rozmaitych zagadnień arytmetycznych, teoretycy liczb i geometrzy stwierdzili dużą przydatność pewnych funkcji zmiennej zespolonej zwanych L-funkcjami lub funkcjami typu dzeta. Historycznie pierwszym takim przykładem była funkcja dzeta Riemanna $\zeta(s)$, która pojawiła się w słynnej pracy B. Riemanna z 1859 roku ([41]). Podstawowym wnioskiem z tej pracy było stwierdzenie, że zbadanie analitycznych własności tej funkcji stanowi klucz do zrozumienia podstawowych faktów dotyczących rozmieszczenia liczb pierwszych. Badania, które trwają nieprzerwanie od niemal 150 lat, dostarczają licznych dowodów prawdziwości tej tezy. Dziś jest oczywiste, że funkcja dzeta Riemanna oraz jej liczne uogólnienia mają zasadnicze znaczenie dla teorii liczb. Mimo wspaniałych postępów w badaniu tych niezwykle interesujących funkcji, jesteśmy jeszcze daleko od zadowalającego opisu ich własności.

Najpierw zdefiniujemy funkcję dzeta Riemanna.

Zmienną zespoloną oznaczamy przez $s = \sigma + it$, gdzie σ i t są rzeczywiste. W półpłaszczyźnie $\sigma > 1$ *funkcję dzeta Riemanna* definiujemy następująco:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Powyższy szereg jest bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny, a więc funkcja ζ jest funkcją holomorficzną dla $\sigma > 1$.

Z pracy B. Riemanna ([41]) wynika, że funkcja dzeta Riemanna ma przedłużenie analityczne na całej płaszczyźnie zespolonej. Jej jedyną osobliwością jest biegun pojedynczy w punkcie $s = 1$ z residuum równym 1.

Równanie funkcyjne funkcji dzeta Riemanna ma postać:

$$\xi(s) = \xi(1 - s),$$

gdzie $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$, natomiast Γ oznacza funkcję gamma Eulera.

Z równania funkcyjnego funkcji dzeta Riemanna można uzyskać między innymi, że $\zeta(-2k) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Są to tak zwane trywialne zera funkcji dzeta Riemanna. Oprócz nich ζ posiada nieskończenie wiele zer zespolonych, które znajdują się w tak zwanym pasie krytycznym $0 < \sigma < 1$. Nietrywialne zera zespolone leżą symetrycznie względem prostej $\sigma = \frac{1}{2}$, którą nazywamy prostą krytyczną, oraz względem osi rzeczywistej.

Praca Riemanna zawiera sformułowanie słynnej hipotezy, znanej powszechnie jako *hipoteza Riemanna.*

Wszystkie nietrywialne zera leżą na prostej krytycznej, to znaczy na prostej o równaniu

$$\sigma = \frac{1}{2}.$$

Czy hipoteza Riemanna jest prawdziwa? Tego nadal nie wiemy. Pewne jest to, że dziś istnieje więcej argumentów za niż przeciw. Poważnym argumentem za prawdziwością hipotezy Riemanna są obliczenia numeryczne, ponieważ znane są części urojone pierwszych stu nietrywialnych zer.

W związku z tym ciekawym problemem, zwanym czwartym problemem milenijnym, udowodniono wiele interesujących twierdzeń równoważnych z hipotezą Riemanna ([6]). Skoncentrujemy się na wynikach związanych z oszacowaniami funkcji sumy dzielników $\sigma(n)$.

W 1984 roku G. Robin udowodnił, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n, \tag{R}$$

dla każdego $n \geqslant 5041$, gdzie $\gamma \approx 0,57721$ jest stałą Eulera ([42]).

Niech $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ oznacza n-tą sumę częściową szeregu harmonicznego.

W 2000 roku J. Lagarias pokazał, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sigma(n) < H_n + \exp(H_n)\log(H_n),$$

dla każdego $n > 1$.

Zajmujemy się teraz oszacowaniami funkcji sumy dzielników $\sigma(n)$.

Udowodnimy mianowicie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9 *Niech n będzie liczbą naturalną złożoną i niech $r = \omega(n)$ będzie liczbą* *wszystkich różnych dzielników pierwszych liczby n. Ponadto, niech $s(n)$ będzie jądrem bezkwadratowym argumentu n. Wtedy dla każdego k takiego, że $2 \leqslant k \leqslant r$ mamy*

$$\sigma(n) > \left(\sqrt[r]{n} + \sqrt[r]{n_0}\right)^r \geqslant \left(\sqrt[k]{n} + \sqrt[k]{n_0}\right)^k, \tag{1.21}$$

gdzie $n_0 = \frac{n}{s(n)}$.

W dowodzie powyższego twierdzenia wykorzystujemy specjalną wersję nierówności Minkowskiego ([3]), a mianowicie

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + x_i) \geqslant \left(1 + \sqrt[k]{x_1 \dots x_k}\right)^k, \tag{M}$$

gdzie $x_i \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, \dots, k$.

Nierówność ta została wykorzystana również przez A. Grytczuka i M. Wójtowicza w dowodzie następującego oszacowania z góry funkcji Eulera ([18]):

$$\varphi(n) < (\sqrt[r]{n} - \sqrt[r]{n_0})^r \leqslant (\sqrt[k]{n} - \sqrt[k]{n_0})^k,$$

gdzie n, $k = 1, 2, \dots$ oraz $r = \omega(n)$ są liczbami opisanymi w powyższym twierdzeniu.

Przedstawimy teraz dowód twierdzenia 9.

Dowód. Niech $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Wtedy mamy

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{1+\alpha_i} - 1}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{\alpha_i} + p_i^{\alpha_i - 1} + \dots + p_i + 1\right). \tag{1.22}$$

Z (1.22) dostajemy

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right). \tag{1.23}$$

Ze wzoru (1.23) wynika, że

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_i}\right). \tag{1.24}$$

Niech $x_i = \frac{1}{p_i}$ w nierówności Minkowskiego (M). Wtedy z (1.24) dostajemy

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt[r]{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}}\right)^r. \tag{1.25}$$

Ponieważ $s(n) = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i$ i $n_0 = \frac{n}{s(n)}$, więc z (1.25) wynika, że

$$\sigma(n) > \left(\sqrt[r]{n} + \sqrt[r]{n_0}\right)^r. \tag{1.26}$$

Oszacowanie (1.26) daje nam pierwszą nierówność z twierdzenia 9.

Dla drugiej części dowodu nierówności (1.21) rozważamy funkcję $t \to \left(1+\xi a^{\frac{1}{t}}\right)^t$ określoną na $[1,+\infty)$ dla $a \in (0,1)$. Łatwo zauważyć, że funkcja ta jest rosnąca dla $\xi = 1$. Korzystając z tego faktu dostajemy drugą nierówność z (1.21). ■

Z twierdzenia 9 natychmiast wynika następujący wniosek:

Wniosek 10 *Jeśli* $r = \omega(n) \geqslant 2$, *to*

$$\sigma(n) > \left(\sqrt[r]{n} + 1\right)^r \geqslant n + 2\sqrt{n} + 1. \tag{1.27}$$

Nierówność (1.27) jest lepsza od znanej klasycznej nierówności $\sigma(n) > n + \sqrt{n}$, podanej w monografii W. Sierpińskiego ([43]).

Twierdzenie 11 zawiera oszacowanie z dołu funkcji sumy dzielników $\sigma(n)$, które jest związane z hipotezą Riemanna.

Głównym tematem pracy B. Riemanna ([41]) było wykazanie związku między funkcją ζ a liczbami pierwszymi. Jednakże warto zwrócić uwagę na wcześniejsze prace Eulera, któremu zawdzięczamy dowód następującej formuły zwanej obecnie *iloczynem Eulera,* która jest punktem wyjścia wszelkich zastosowań funkcji dzeta Riemanna w teorii liczb pierwszych. Mamy mianowicie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{E}$$

gdzie P oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych. Formuła ta jest prawdziwa dla liczb zespolonych $s = \sigma + it$, $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Iloczyn Eulera (E) był punktem wyjścia badań Czebyszewa nad liczbami pierwszymi.

Twierdzenie 11 *Niech $\sigma(n)$ będzie funkcją sumy dzielników. Wtedy dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n mamy*

$$\sigma(n) > \frac{6}{\pi^2} e^{\gamma} n \log\log n. \tag{1.28}$$

Dowód. Dla dowodu tego twierdzenia razważamy iloraz

$$\frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2}, \tag{1.29}$$

gdzie $\sigma(n) = \sum\limits_{d|n} d$ i $\varphi(n)$ jest funkcją Eulera.

Niech $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Wtedy mamy

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{1+\alpha_i} - 1}{p_i - 1} = \frac{n \prod\limits_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i^{1+\alpha_i}}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)}, \tag{1.30}$$

natomiast

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \tag{1.31}$$

Z (1.30) i (1.31) dostajemy

$$\frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2} = \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i^{1+\alpha_i}}\right). \tag{1.32}$$

Z (1.32) mamy, że

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{n}{\varphi(n)}\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i^{1+\alpha_i}}\right). \tag{1.33}$$

Ponieważ $\alpha_i \geqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, r$, więc

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i^{1+\alpha_i}}\right) \geqslant \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right). \tag{1.34}$$

Dalej, jeśli P oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych, to z (1.34) wynika, że

$$\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) > \prod_{p\in P}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \tag{1.35}$$

Z drugiej strony wiemy, że

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \prod_{p\in P}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}. \tag{1.36}$$

Z (1.34)-(1.36) i z (1.33) wynika, że

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{n}{\varphi(n)}. \tag{1.37}$$

Stosując do (1.37) wynik J. L. Nicolasa ([34]), że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n postaci $n = 2p_1p_2\ldots p_k$, gdzie p_j są kolejnymi liczbami pierwszymi dla $j = 1, 2, \ldots, k$ zachodzi nierówność

$$\frac{n}{\varphi(n)} > e^{\gamma}\log\log n,$$

otrzymujemy nierówność

$$\sigma(n) > \frac{6}{\pi^2} e^{\gamma} n \log\log n,$$

co kończy dowód twierdzenia 11. ■

Twierdzenie 9, wniosek 10 i twierdzenie 11 zostały opublikowane w 2005 roku ([31]).

1.3 Oszacowania związane z problemem istnienia liczb doskonałych nieparzystych

Liczbę naturalną n nazywamy *doskonałą*, jeśli $\sigma(n) = 2n$.

Przykład. Jeśli $n = 6$, to $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 2\cdot 6$, a więc 6 jest liczbą doskonałą parzystą. Kolejną liczbą doskonałą parzystą jest $n = 28$, ponieważ $\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28$.

Nie wiadomo czy istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, takich że $\sigma(n) = 2n$.

Wiadomo natomiast, że wszystkie znane dotąd liczby doskonałe są parzyste. Znane są również metody ich wyznaczania, a wśród nich następujące kryterium Euklidesa-Eulera:

Twierdzenie 12 *([43]) Na to, żeby liczba naturalna parzysta n była liczbą doskonałą potrzeba i wystarcza, by była postaci $2^{s-1}(2^s - 1)$, gdzie s i $2^s - 1$ są liczbami pierwszymi.*

Tematem wielu prac są liczby doskonałe nieparzyste. Znane są górne oszacowania dla tych liczb.

1. W 1994 roku D. R. Heath-Brown ([24]) pokazał, że jeśli n jest pewną liczbą doskonałą nieparzystą, to $n < 4^{4^k}$, gdzie $k = \omega(n)$, natomiast $\omega(n)$ jest liczbą różnych dzielników pierwszych liczby naturalnej n.

2. W 1999 roku R. Cook ([5]) udowodnił, że $n < D^{4^k}$ dla $D = \sqrt[7]{195} = 2,123\ldots$

3. W 2003 roku P. P. Nielsen ([35]) pokazał, że $n < 2^{4^k}$.

Oczywiście badania dotyczyły również dolnych oszacowań liczby doskonałej nieparzystej.

1. W 1991 roku R. P. Brent, G. L. Cohen i H. J. J. te Riele ([2]), udowodnili , że jeśli n jest liczbą doskonałą nieparzystą, to $+n > 10^{300}$.

2. W 1980 roku P. Hagis pokazał ([22]) , że jeśli n jest pewną liczbą doskonałą nieparzystą, to $\omega(n) \geqslant 8$, gdzie $\omega(n)$ jest liczbą różnych dzielników pierwszych liczby naturalnej n.

3. W 1998 roku P. Hagis wraz z G. L. Cohenem ([23]) udowodnili, że liczba doskonała nieparzysta n posiada czynnik pierwszy większy niż 10^6.
4. W 2003 roku P. M. Jenkins ([26]) poprawił ten wynik do 10^7.
5. W 1999 roku A. Grytczuk i M. Wójtowicz ([14]) pokazali, że jeśli n jest pewną liczbą doskonałą nieparzystą, to prawdziwe jest oszacowanie postaci: $n > C \times g(\omega(n))$, gdzie $C = 1,9 \times 10^{2550}$ i g jest funkcją rzędu k^{2k}, $k = \omega(n)$, przy hipotetycznym założeniu, że dzielnik pierwszy takiej liczby nie należy do zbioru $X = \{3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43, 61, 127, 131, 1093\}$.

Klasyczny wynik Eulera, dotyczący liczb doskonałych nieparzystych można sformułować następująco:

Twierdzenie 13 (Eulera) *([43]) Jeśli n jest liczbą doskonałą nieparzystą, to $n = p^\alpha m^2$, gdzie $p \equiv \alpha \equiv 1 (\bmod 4)$, $p \nmid m$, p jest liczbą pierwszą i α jest liczbą całkowitą dodatnią.*

Liczby naturalne n, spełniające ten warunek nazywamy *liczbami Eulera.*

W 2004 roku A. Grytczuk ([16]) podał kryterium na to, żeby liczba Eulera była liczbą doskonałą nieparzystą. Uzyskał równie

Podamy teraz to kryterium.

Twierdzenie 14 *Liczba $n = p^\alpha m^2$, gdzie $p \equiv \alpha \equiv 1 (\bmod 4), p \nmid m$, p jest liczbą pierwszą i α jest liczbą całkowitą dodatnią jest nieparzystą liczbą doskonałą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją całkowite dodatnie liczby A, B, k, r i r_1 takie, że*

$$\begin{aligned} \sigma(m^2) &= m^2 + r,\ m = kAB,\ \gcd(A, B) = 1 \\ r &= kA^2 r_1,\ 2 \mid r_1,\ 1 \leqslant r \leqslant m^2. \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$kB^2 + r_1 = p^\alpha,\ kB^2 - r_1 = \frac{p^\alpha - 1}{p - 1}, \tag{1.39}$$

gdzie $\sigma(m)$ jest sumą wszystkich dzielników liczby naturalnej m.

W dalszej części pracy wykorzystujemy kryterium podane w twierdzeniu 14 i następujące lematy:

Lemat 15 *Jeśli* $n = p^\alpha m^2$, $\alpha \geqslant 1$, $p \nmid m$, *gdzie* p *jest liczbą pierwszą, jest liczbą doskonałą nieparzystą, to*

$$\sigma(m^2) = m^2 + r,\ \ r < m^2 \tag{1.40}$$

$$r > \frac{p-2}{p} m^2. \tag{1.41}$$

Dowód. Równość (1.40) wynika natychmiast z twierdzenia 14. Dla dowodu (1.41) zauważmy, że z założenia lematu 15 mamy

$$\sigma(p^\alpha m^2) = \sigma(p^\alpha) \cdot \sigma(m^2) = 2p^\alpha m^2. \tag{1.42}$$

Z (1.42) i (1.40) wynika, że

$$\sigma(p^\alpha)\left(m^2 + r\right) = 2p^\alpha m^2. \tag{1.43}$$

Ze wzoru (1.43) i wobec tego, że $\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$, otrzymujemy

$$r = \left(1 - \frac{2\,(p^\alpha - 1)}{p^{\alpha+1} - 1}\right) m^2. \tag{1.44}$$

Ponieważ

$$1 - \frac{2\,(p^\alpha - 1)}{p^{\alpha+1} - 1} < 1 - \frac{2}{p}, \tag{1.45}$$

więc z (1.44) i (1.45) dostajemy, że

$$r > \frac{p-2}{p} m^2, \tag{1.46}$$

co kończy dowód lematu 15. ■

Lemat 16 *Jeśli* $n = p^\alpha m^2$, $\alpha \geqslant 1$, $p \equiv \alpha \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, $p \nmid m$, *gdzie* p *jest liczbą pierwszą, jest liczbą doskonałą nieparzystą, to*

$$\frac{1}{2}\frac{p-2}{p-1}p^\alpha < r_1 < \frac{1}{2}\frac{p-1}{p}p^\alpha. \tag{1.47}$$

Dowód. Z twierdzenia 14 wynika, że

$$r = kA^2 r_1,\ m = kAB,\ \gcd(A,B) = 1,\ k \geqslant 1,\ 2 \mid r_1. \tag{1.48}$$

Z (1.41) i (1.48) otrzymujemy

$$r_1 > \frac{p-2}{p}kB^2. \tag{1.49}$$

Z warunku (1.39) twierdzenia 14 oraz z (1.49) mamy

$$kB^2 < \frac{p}{p-2}r_1.$$

Zatem dostajemy

$$p^\alpha = kB^2 + r_1 < r_1 + \frac{p}{p-2}r_1 = r_1\left(1 + \frac{p}{p-2}\right) = r_1\frac{2\,(p-1)}{p-2}. \tag{1.50}$$

Z (1.50) otrzymujemy więc

$$r_1 > \frac{1}{2}\frac{p-2}{p-1}p^\alpha. \tag{1.51}$$

Z drugiej strony z (1.39) wynika, że

$$\begin{aligned} 2r_1 &= p^\alpha - \frac{p^\alpha - 1}{p-1} = \frac{p^\alpha\,(p-1) - (p^\alpha - 1)}{p-1} = \frac{p^\alpha\,(p-1) - (p-1)\,(p^{\alpha-1} + p^{\alpha-2} + \ldots + 1)}{p-1} = \\ & p^\alpha - \left(p^{\alpha-1} + p^{\alpha-2} + \ldots + p + 1\right). \end{aligned} \tag{1.52}$$

Z (1.52) mamy również

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(p^\alpha - p^{\alpha-1} - p^{\alpha-2} - \ldots - p - 1\right) < \frac{1}{2}p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{1.53}$$

Z (1.53) wynika, że

$$r_1 < \frac{1}{2}\frac{p-1}{p}p^\alpha. \tag{1.54}$$

Ostatecznie z (1.54) i (1.51) otrzymujemy, że

$$\frac{1}{2}\frac{p-2}{p-1}p^\alpha < r_1 < \frac{1}{2}\frac{p-1}{p}p^\alpha,$$

co kończy dowód lematu 16. ■

Twierdzenie 17 *Jeśli $n = p^\alpha m^2$, $\alpha \geqslant 1$, $p \equiv \alpha \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, $p \nmid m$, gdzie p jest liczbą pierwszą, jest liczbą doskonałą nieparzystą, to*

$$\sigma(m^2) = m^2 + r, \tag{1.55}$$

$$\frac{p-2}{p}m^2 < r < \frac{p-1}{p}m^2. \tag{1.56}$$

Dowód. Z lematu 15 wynika, że lewa strona nierówności (1.56) jest spełniona. Dla dowodu prawej strony, załóżmy, że zachodzi nierówność

$$r \geqslant \frac{p-1}{p}m^2. \tag{1.57}$$

Ponieważ, z twierdzenia 14, $r = kA^2 r_1$ oraz $m = kAB$, więc z (1.57) wynika, że

$$r_1 \geqslant \frac{p-1}{p}kB^2. \tag{1.58}$$

Z nierówności (1.58) otrzymujemy następujące oszacowanie

$$kB^2 \leqslant \frac{p}{p-1} r_1. \tag{1.59}$$

Teraz z (1.59) oraz z warunku (1.39) mamy, że

$$p^\alpha = kB^2 + r_1 \leqslant \frac{p}{p-1} r_1 + r_1 < r_1 \left(\frac{p}{p-1} + 1 \right) = r_1 \frac{2p-1}{p-1}. \tag{1.60}$$

Ze wzoru (1.60) wynika więc

$$r_1 \geqslant \frac{p-1}{2p-1} p^\alpha > \frac{p-1}{2p} p^\alpha = \frac{1}{2} \frac{p-1}{p} p^\alpha. \tag{1.61}$$

Nierówność (1.61) daje nam sprzeczność z nierównością (1.47), a tym samym dowodzi twierdzenie 17. ■

Rozdział 2

Uogólnione ciągi liczb Fermata

Liczbami Fermata nazywamy liczby naturalne postaci

$$F_n = 2^{2^n} + 1,$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$

Jeśli F_n jest liczbą pierwszą, to mówimy, że F_n jest *liczbą pierwszą Fermata.*

Pierre de Fermat przypuszczał i próbował udowodnić, że wszystkie liczby Fermata są pierwsze. Istotnie, takimi są liczby F_n dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Mamy bowiem, że

$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$.

Jednakże w 1732 roku L. Euler pokazał, że $F_5 = 641 \cdot 6700417$, co obalało przypuszczenie Fermata. Dalej w 1880 roku F. Landry odkrył, że $F_6 = 274177 \cdot 67280421310721$. Kolejna liczba Fermata została rozłożona na czynniki w roku 1970 przez M. A. Morrisona i J. Brillharta. W 1980 roku R. P. Brent i J. M. Pollard podali rozkład dla F_8. Badania dotyczące poszukiwań rozkładów dla liczb Fermata trwały nieprzerwanie i wiadomo, że największą złożoną liczbą Fermata, znalezioną do 2001 roku jest F_{382447}, natomiast największą znaną liczbą pierwszą Fermata jest $F_4 = 65537$. W związku z poszukiwaniem rozkładów dla liczb Fermata, zajmowano się dzielnikami pierwszymi tych liczb.

Liczby Fermata są szczególnym przypadkiem liczb postaci $a^{2^n} + 1$, gdzie $a > 1$ jest liczbą naturalną.

Uogólnione liczby Fermata są to liczby naturalne postaci

$$F_n(a) = a^{2^n} + 1,$$

gdzie $a \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą całkowitą parzystą. Oczywiście, jeśli $a = 2$, wtedy otrzymujemy klasyczne liczby Fermata F_n.

Skoncentrujemy się na dolnych oszacowaniach największego dzielnika pierwszego liczb Fermata, jak i dla uogólnionych liczb Fermata.

Oznaczamy przez $P(k)$ *największy dzielnik pierwszy* k.

Przypomnijmy teraz, wraz z dowodami, ważne wyniki dotyczące liczb Fermata i ich dzielników.

Lemat 18 *([29]) Wzór*

$$F_n = F_0 F_1 \dots F_{n-1} + 2 \tag{2.1}$$

jest prawdziwy dla każdego $n \geqslant 1$.

Dowód. Dla $n \geqslant 1$, używając równości $2^{2^n} - 1 = F_0 F_1 \dots F_{n-1}$, dostaniemy $F_n - 2 = (2^{2^n} + 1) - 2 = 2^{2^n} - 1 = F_0 F_1 \dots F_{n-1}$. ■

Zauważmy, że z lematu 18 wynika, że $F_n - 2$ dla $n \geqslant 1$ jest podzielne przez każdą mniejszą liczbę Fermata, to znaczy

$$F_k \mid F_n - 2$$

dla każdego $k = 0, 1, \dots, n-1$ lub równoważnie

$$F_n \equiv 2 (\operatorname{mod} F_k) \tag{2.2}$$

dla każdego $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Lemat 19 *([29]) Nie ma dwóch różnych liczb Fermata, których największy wspólny dzielnik byłby większy od* 1.

Dowód. Załóżmy, że

$$q \mid F_n \text{ i } q \mid F_{n-k} \tag{2.3}$$

dla $n \geqslant k \geqslant 1$. Teraz ze wzoru (2.2) dostajemy, że $q \mid F_n - 2$. Stąd, przyjmując (2.3) widzimy, że $q \mid 2$. Ponieważ F_n jest liczbą nieparzystą, więc $q = 1$. ■

Lemat 20 *([43]) Niech $F_n(a) = a^{2^n} + 1$ będzie uogólnioną liczbą Fermata. Jeśli p jest liczbą pierwszą taką, że $p \mid F_n(a)$, to $p = 2^{n+1}k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.*

Dowód. Ponieważ $p \mid a^{2^n} + 1$, więc $p \mid a^{2^{n+1}} - 1$. Relacja $p \mid a^{2^n} - 1$ jest niemożliwa, gdyż jeśli $p \mid 2$, to $p = 2$, co daje sprzeczność, ponieważ jeśli $p \mid a^{2^n} + 1$, to mamy, że $\gcd(p, a) = 1$ i a jest liczbą parzystą. Niech δ oznacza wykładnik potęgi, do którego a przystaje modulo p. Ponieważ $p \mid a^{2^{n+1}} - 1$, więc otrzymujemy, że $\delta \mid 2^{n+1}$. Relacja $\delta \mid 2^n$ jest niemożliwa, gdyż nie zachodzi relacja $p \mid a^{2n} - 1$. Teraz wnioskujemy, że $\delta = 2^{n+1}$ i dalej z twierdzenia Fermata, że $p \mid a^{p-1} - 1$, dostajemy $\delta \mid p - 1$. Co oznacza, że $2^{n+1} \mid p - 1$, stąd $p = 2^{n+1}k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną. ■

Lemat 21 *([43]) Każdy dzielnik liczby Fermata F_n dla $n > 1$ jest postaci $2^{n+2}k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.*

Dowód. Jak wynika z dowodu lematu 20 (dla $a = 2$), jeśli p jest liczbą pierwszą i $p \mid F_n$, to 2 przystaje do wykładnika 2^{n+1} modulo p. Z drugiej strony z lematu 20 wynika, że p jest postaci $2^{n+1}t + 1$, gdzie t jest liczbą naturalną. Konsekwentnie, jeśli $n > 1$ jest postaci $8k + 1$, wtedy zachodzą relacje $p \mid M_{(p-1)/2}$, $p \mid 2^{(p-1)/2} - 1$. Jednakże, ponieważ 2 przystaje do wykładnika 2^{n+1} modulo p, więc musi zachodzić, że $2^{n+1} \mid (p-1)/2$, więc $2^{n+2} \mid p - 1$. Stąd dostajemy, że $p = 2^{n+2}k + 1$, gdzie k jest liczbą naturalną.

Zatem widzimy, że każdy dzielnik pierwszy liczby Fermata F_n $(n > 1)$ jest postaci $2^{n+2}k+1$. Ponadto stąd, że każdy dzielnik liczby Fermata F_n większy od 1 jest iloczynem dzielników pierwszych liczby F_n, otrzymujemy, że musi on również być powyższej postaci (ponieważ iloczyn dwóch liczb postaci $mk + 1$ jest również tej postaci). ■

Przytoczymy również nierówność, która jest wielokrotnie wykorzystywana w dowodach kolejnych twierdzeń.

Lemat 22 *([29]) Dla $y > x > 1$ mamy*

$$\frac{\log(y+1)}{\log(x+1)} < \frac{\log y}{\log x}.$$

Dowód. Powyższa nierówność jest równoważna następującej

$$\frac{\log(y+1)}{\log y} < \frac{\log(x+1)}{\log x}.$$

Zatem wystarczy pokazać, że funkcja $\log(x+1)/\log x$ jest malejąca dla $x > 1$. Zauważmy, że dla $x > 1$ zachodzi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\log(x+1)}{\log x}\right) = \frac{\frac{\log x}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x}}{(\log x)^2} = \frac{x\log x - (x+1)\log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2} < 0,$$

co kończy dowód lematu 22. ■

W 1998 roku M. Le ([30]) udowodnił twierdzenie:

Twierdzenie 23 *Jeśli $n \geqslant 2^{18}$, to zachodzi*

$$P(F_n) \geqslant n2^{n-4} + 1.$$

W 2001 roku A. Grytczuk, F. Luca i M. Wójtowicz ([15]) poprawili rezultat podany przez M. Le, a mianowicie udowodnili następujące twierdzenie:

Twierdzenie 24 *Jeśli* $n \geqslant 4$, *to wtedy zachodzi*

$$P(F_n) \geqslant (4n+9)2^{n+2}+1.$$

W tej samej pracy ([15]) w 2001 roku A. Grytczuk, F. Luca i M. Wójtowicz pokazali, że oszacowanie podane przez M. Le dla liczb Fermata zachodzi również dla uogólnionych liczb Fermata, to znaczy przyjmując, że $a \geqslant 2$ jest parzystą liczbą całkowitą i $n \geqslant a^{18}$, dostaniemy

$$P(F_n(a)) > 2^{n-4}n.$$

Dowód tej nierówności opiera się na skomplikowanej technice prezentowanej w pracy M. Le ([30]).

Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 25 *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 3$ *i* $a > 1$ *mamy*

$$P(F_n(a)) > \frac{2^{n+2}(n+1)\log 2}{\log a} + 1. \tag{2.4}$$

Dowód. Niech

$$F_n(a) = a^{2^n} + 1 = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r}. \tag{2.5}$$

Z (2.5) i lematu 20 dostajemy

$$a^{2^n} + 1 \geqslant \left(2^{n+1}+1\right)^{b_1+b_2+\ldots+b_r}$$

i dalej otrzymujemy

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} b_j < \frac{\log(a^{2^n}+1)}{\log(2^{n+1}+1)}. \tag{2.6}$$

Stosując lemat 22 do (2.6), otrzymujemy

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant r} b_j < \frac{2^n \log a}{(n+1)\log 2}. \tag{2.7}$$

Ponieważ $n \geqslant 3$, więc mamy $2^n \geqslant 2n+2$ i dostajemy

$$F_n(a) = a^{2^n} + 1 \equiv 2^{2^n} + 1 \equiv 1 (\operatorname{mod} 2^{2n+2}), \tag{2.8}$$

gdzie a jest parzystą liczbą całkowitą.

Korzystając z lematu 20, otrzymujemy

$$p_j^{b_j} = \left(k_j 2^{n+1} + 1\right)^{b_j} \equiv 2^{n+1} k_j b_j + 1 \left(\operatorname{mod} 2^{2(n+1)}\right). \tag{2.9}$$

Z (2.9) i (2.5) dostajemy

$$F_n(a) = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_r^{b_r} \equiv \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \left(2^{n+1} k_j b_j + 1\right) \left(\operatorname{mod} 2^{2(n+1)}\right). \tag{2.10}$$

Z drugiej strony widzimy, że

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant r} \left(2^{n+1} k_j b_j + 1\right) \equiv 1 + 2^{n+1} \sum_{1\leqslant j\leqslant r} k_j b_j \left(\operatorname{mod} 2^{2(n+1)}\right). \tag{2.11}$$

Z (2.8), (2.10) i (2.11) wynika, że

$$2^{n+1} \sum_{1\leqslant j\leqslant r} k_j b_j \equiv 0 \left(\operatorname{mod} 2^{2(n+1)}\right),$$

stąd otrzymujemy

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant r} k_j b_j \equiv 0 \left(\operatorname{mod} 2^{n+1}\right). \tag{2.12}$$

Z (2.12) mamy

$$2^{n+1} \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} k_j b_j. \tag{2.13}$$

Ze wzorów (2.13) i (2.7) wynika, że

$$2^{n+1} \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} k_j b_j \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \{k_j\} \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} b_j < \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \{k_j\} \frac{2^n \log a}{(n+1) \log 2}. \tag{2.14}$$

Z (2.14) następuje, że

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant r} \{k_j\} > \frac{2^{n+1}(n+1) \log 2}{2^n \log a} = \frac{2(n+1) \log 2}{\log a}. \tag{2.15}$$

Z lematu 20 wnioskujemy, że

$$P(F_n(a)) = 2^{n+1} \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \{k_j\} + 1,$$

a następnie z (2.15) mamy

$$P(F_n(a)) > \frac{2^{n+1} 2(n+1) \log 2}{\log a} + 1 = \frac{2^{n+2}(n+1) \log 2}{\log a} + 1,$$

co kończy dowód twierdzenia 25. ∎

Z nierówności (2.4) twierdzenia 25 otrzymujemy natychmiast, że dla $a = 4$ zachodzi następujące oszacowanie:

$$P(F_n(4)) > 2^{n+1}(n+1) + 1,$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$.

Natomiast z oszacowania $P(F_n(a)) > 2^{n-4}n$, dla $n \geqslant 2^{18}$ wynika jedynie, że

$$P(F_n(4)) > 2^{n-4}n,$$

dla $n \geqslant 2^{36}$.

Z twierdzenia 25 wynika następujący wniosek:

Wniosek 26 *Dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant 5$ *i* $a \leqslant 2^{64\frac{n+1}{n}}$ *mamy*

$$P(F_n(a)) > 2^{n-4}n + 1.$$

Dowód. Ponieważ $a \leqslant 2^{64\frac{n+1}{n}}$, więc $\frac{2^{n+2}(n+1)\log 2}{\log a} \geqslant 2^{n-4}n$. Zatem z (2.4) wynika, że dla $n \geqslant 5$ mamy

$$P(F_n(a)) > 2^{n-4}n + 1,$$

co kończy dowód wniosku 26. ■

Pokażemy teraz oszacowanie dla dowolnego dzielnika pierwszego liczby Fermata.

Twierdzenie 27 *Każdy dzielnik pierwszy* $p \mid F_n$ *dla* $n \geqslant 3$ *spełnia nierówność* $p \geqslant 2^{n+2}3+1$.

Dowód. Niech $p \mid F_n$. Wtedy z lematu 21 wynika, że $p = 2^{n+2}k + 1$, gdzie $k \geqslant 1$ jest liczbą naturalną. Zauważmy, że $k \neq 1$ i $k \neq 2$. Rzeczywiście, jeśli $k = 1$, to $p = 2^{n+2} + 1$. Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc $n + 2 = 2^m$ i $p = 2^{2^m} + 1 = F_m$, czyli $F_m \mid F_n$, $m \leqslant n$. Jeśli $m < n$, to na mocy tego, że $F_m \mid F_n$ dostajemy sprzeczność z lematem 19. Przypuśćmy, że $k = 2$. Wtedy $p = 2^{n+3} + 1$ i $n + 3 = 2^s$, więc $p = 2^{2^s} + 1 = F_s$. Stąd $F_s \mid F_n$, $s \leqslant n$. Jeśli $s = n$, to $n + 3 = 2^n$, co jest niemożliwe dla $n \geqslant 3$. Dlatego $s < n$ i znów dostajemy sprzeczność z lematem 19. A zatem $k \geqslant 3$ i z lematu 21 wynika, że $p = 2^{n+2}k+1 \geqslant 2^{n+2}3+1$. ■

Powyższe rezultaty, czyli: twierdzenie 25, wniosek 26 i twierdzenie 27 zostały opublikowane w 2004 roku we wspólnej pracy z A. Grytczukiem ([17]).

Rozdział 3

Funkcje arytmetyczne określone na półgrupie ideałów całkowitych generujące gęstości pewnych ciągów

Rozpoczniemy od przypomnienia pojęcia liczby algebraicznej. Liczbę zespoloną a nazywamy *liczbą algebraiczną,* jeśli istnieje niezerowy wielomian $F(x)$ o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastkiem jest a. *Stopniem* st$a$ liczby algebraicznej a nazywamy najmniejszy ze stopni takich wielomianów.

Niech $\mathcal{K}$ będzie ciałem liczb algebraicznym stopnia n nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ ($n = [\mathcal{K} : \mathbb{Q}]$). Przez $G_{\mathcal{K}}$ oznaczamy multyplikatywną półgrupę wszystkich niezerowych ideałów całkowitych ciała $\mathcal{K}$. Ponadto niech I będzie ideałem całkowitym półgrupy $G_{\mathcal{K}}$. Wtedy

$$I = \wp_1^{\alpha_1} \circ \wp_2^{\alpha_2} \circ \ldots \circ \wp_k^{\alpha_k}, \tag{3.1}$$

gdzie $\wp_1, \wp_2, \ldots, \wp_k$ są ideałami pierwszymi z $G_{\mathcal{K}}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są liczbami całkowitymi większymi od zera. Przez $\Omega(I)$ oznaczamy liczbę wszystkich ideałów pierwszych występujących

w rozkładzie (3.1), a przez $\omega(I)$ liczbę różnych ideałów pierwszych występujących w rozkładzie (3.1), to znaczy

$$\Omega(I) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k;\ \omega(I) = k.$$

Niech $F(I) = \Omega(\wp) - \omega(\wp)$, czyli $F(I) = (\alpha_1 - 1) + \ldots + (\alpha_k - 1)$.

Niech teraz $R_{\mathcal{K}}$ oznacza pierścień liczb całkowitych w ciele $\mathcal{K}$. Równoważnie, $R_{\mathcal{K}}$ składa się z tych wszystkich elementów ciała $\mathcal{K}$, które są pierwiastkami wielomianów o współczynnikach całkowitych ze wspólczynnikiem przy najwyższej potędze równym 1. Pierścień ten jest podstawowym obiektem badań teorii liczb algebraicznych. Jest to *pierścień Dedekinda*, a więc każdy niezerowy ideał tego pierścienia można przedstawić w postaci iloczynu ideałów niezerowych i takie przedstawienie jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników. Dowolny niezerowy ideał $I \in R_{\mathcal{K}}$ ma skończony indeks, to znaczy pierścień ilorazowy $R_{\mathcal{K}}/I$ ma skończoną liczbę elementów $N(I) = (\ R_{\mathcal{K}} : I)$. Liczbę $N(I)$ nazywamy *normą ideału* I. Norma jest multyplikatywna, to znaczy $N(I \cdot J) = N(I) \cdot N(J)$ dla dowolnych dwóch niezerowych ideałow I, J.

Grupę klas ideałów ciała $\mathcal{K}$ oznaczamy przez $H(\mathcal{K})$.Wiadomo, że jest ona grupą skończoną, w związku z tym liczbę elementów grupy $H(\mathcal{K})$ nazywamy *liczbą klasową* ciała $\mathcal{K}$ i oznaczamy przez h.

Bazą całkowitą ciała $\mathcal{K}$ nazywamy układ liczb $w_1, \ldots, w_n$ o tej własności, że każdą liczbę z $R_{\mathcal{K}}$ można dokładnie w jeden sposób przedstawić w postaci: $a_1 w_1 + \ldots + a_n w_n$, przy czym $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Znane jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 28 *([33]) Każde ciało $\mathcal{K}$ stopnia n nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ ma bazę całkowitą złożoną z n elementów.*

Jeśli $w_1, \ldots, w_n$ jest bazą całkowitą ciała $\mathcal{K}$, to liczbę

$$\det[\varphi_j(w_j)]^2 \in \mathbb{Z} \tag{3.2}$$

nazywamy *wyróżnikiem ciała* $\mathcal{K}$ i oznaczamy przez Δ. Wyróżnik ciała nie zależy od wyboru bazy całkowitej, ale wiadomo, że przejście od jednej bazy do drugiej dokonuje się za pomocą macierzy odwracalnej o współczynnikach całkowitych, a więc o wyznaczniku równym $+1$ lub -1 i liczba (3.2) istotnie od bazy nie zależy.

Dalej, niech $\mathbb{Z}_+$ będzie zbiorem nieujemnych liczb całkowitych i niech $\mathbb{C}$ będzie ciałem liczb zespolonych oraz niech $z, s \in \mathbb{C}$.

Roważmy teraz funkcje arytmetyczne f, F zdefiniowane na półgrupie $G_{\mathcal{K}}$, spełniające następujące warunki:

a) $f : G_{\mathcal{K}} \to \mathbb{C}$, $F : G_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}_+$, $|f(I)| \leqslant c_1$ dla każdego ideału $I \in G_{\mathcal{K}}$ i pewnej stałej $c_1 \geqslant 1$,

b) $f(I \circ J) = f(I) \cdot f(J)$, $F(I \circ J) = F(I) + F(J)$ dla każdego ideału $I, J \in G_{\mathcal{K}}$ z warunkiem, że $\gcd(I, J) = 1$,

c) $f(\wp) = 1$, $F(\wp) = 0$, dla każdego ideału pierwszego $\wp \in G_{\mathcal{K}}$,

d) $\sum\limits_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \sum\limits_{m=2}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^{ms}} < \infty$ dla $|z| < \varrho$, $\operatorname{Re} s > 1$, gdzie $0 < \varrho \in \mathbb{R}$.

Niech $G_{\mathcal{K}}(m) = \{I \in G_{\mathcal{K}} : F(I) = m\}$ i $G_{\mathcal{K}}(m, x) = \{I \in G_{\mathcal{K}} : N(I) \leqslant x\}$, gdzie $N(I)$ oznacza normę ideału $I \in G_{\mathcal{K}}$. Oznaczmy dalej przez $\nu(G_{\mathcal{K}}(m, x))$ liczbę elementów należących do zbioru $G_{\mathcal{K}}(m, x)$, czyli $\nu(G_{\mathcal{K}}(m, x)) = card\{I \in G_{\mathcal{K}}(m, x)\}$. Oznaczmy jeszcze przez $d_m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\nu(G_{\mathcal{K}}(m,x))}{x} < \infty$.

Funkcję dzeta Dedekinda $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ określoną na ciele $\mathcal{K}$ dla $s = \sigma + it$, definiujemy w półpłaszczyźnie $\sigma > 1$, następująco:

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s) = \sum_I \frac{1}{N(I)^s},$$

gdzie sumowanie rozciąga się po wszystkich niezerowych ideałach pierścienia $R_{\mathcal{K}}$.

Funkcję dzeta Dedekinda można również zapisywać jako bezwzględnie zbieżny szereg Dirichleta:

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} F(m) m^{-s},$$

gdzie $F(m)$ oznacza liczbę ideałów pierścienia liczb algebraicznych całkowitych z normą równą m.

Funkcja $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ może być przedłużona analitycznie do funkcji meromorficznej mającej biegun pojedynczy w punkcie $s = 1$. Wartość residuum w tym punkcie zależy od podstawowych niezmienników arytmetycznych ciała $\mathcal{K}$ i wynosi:

$$\chi h = \frac{2^{r+t}\pi^t h\mathcal{R}}{\omega(\mathcal{K})\,|\Delta|^{\frac{1}{2}}},$$

gdzie h oznacza liczbę klasową ciała $\mathcal{K}$, $\mathcal{R}$ jego regulator, $\omega(\mathcal{K})$ liczbę pierwiastków z jedynki zawartych w $\mathcal{K}$, a Δ wyróżnik ciała. Wykładnik r oznacza liczbę różnych $\mathbb{Q}$-zanurzeń ciała $\mathcal{K}$ w ciało liczb rzeczywistych, zaś $t = \frac{1}{2}(n-r)$.

Funkcję $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ nazywamy funkcją dzeta Dedekinda na cześć twórcy podstaw teorii ideałów, która pozwoliła zbudować arytmetykę w ciałach algebraicznych. Funkcja $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ została wprowadzona przez Richarda Dedekinda w dodatku do "Vorlesungen über Zahlentheorie" Dirichleta około sto lat temu. Oczywiście funkcja dzeta Riemanna jest szczególnym przypadkiem funkcji dzeta Dedekinda ($\mathcal{K} = \mathbb{Q}$).

A. Grytczuk w 1980 roku ([11]) udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 29 *Niech $|z| < \varrho$ i F będzie funkcją arytmetyczną spełniającą warunki:*

1. $F : G_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}_+$,
2. $F(I \circ J) = F(I) + F(J)$ *dla każdego ideału $I, J \in G_{\mathcal{K}}$ z warunkiem, że* $\gcd(I,J) = 1$,
3. $F(\wp) = 0$ *dla każdego ideału pierwszego $\wp \in G_{\mathcal{K}}$.*

Wtedy zachodzi

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m = \chi h \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^m}\right),$$

gdzie $F(I) = m$ dla $I \in G_{\mathcal{K}}$, $\chi h = res\zeta_{\mathcal{K}}(s)$, $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ oznacza funkcję dzeta Dedekinda określoną na ciele $\mathcal{K}$.

Udowodnimy teraz twierdzenie, które jest rozszerzeniem powyższego wyniku, a mianowicie:

Twierdzenie 30 *Niech f i F będą funkcjami arytmetycznymi spełniającymi warunki a)-d). Wtedy dla $|z| < \varrho$ mamy*

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m = \chi h \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^m}\right), \tag{3.3}$$

gdzie $\chi h = res \zeta_{\mathcal{K}}(s)$ i $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ jest funkcją dzeta Dedekinda, określoną na ciele $\mathcal{K}$, $\chi = \frac{2^{r+t}\pi^t \mathcal{R}}{\omega(\mathcal{K})|\Delta|^{\frac{1}{2}}}$, $n = [\mathcal{K} : \mathbb{Q}] = r + 2t$, $\mathcal{R}$ jest regulatorem, Δ jest wyróżnikiem ciała $\mathcal{K}$ i h jest liczbą klasową ciała $\mathcal{K}$.

Dowód. Z założenia twierdzenia wynika, że szereg $\sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{f(I) z^{F(I)}}{N(I)^s}$ jest bezwzględnie zbieżny dla $|z| < \varrho$ i $\mathrm{Re}\, s > 1$. Stosując dalej rezultat znany z monografii W. Narkiewicza ([33]), a mianowicie:

Niech g będzie funkcją arytmetyczną określoną na $G_{\mathcal{K}}$ i $g(I \circ J) = g(I) \circ g(J)$ dla każdych $I, J \in G_{\mathcal{K}}$ takich, że $\gcd(I, J) = 1$. Wtedy jeśli szereg

$$G(g, s) = \sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{g(I)}{N(I)^s} \tag{3.4}$$

jest bezwzględnie zbieżny dla $\mathrm{Re}\, s > c$, to

$$G(g, s) = \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^{ms}}\right). \tag{3.5}$$

Z (3.4) i (3.5), podstawiając $g(I) = f(I) z^{F(I)}$, dostajemy

$$\sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{f(I) z^{F(I)}}{N(I)^s} = \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^{ms}}\right), \tag{3.6}$$

dla $|z| < \rho$ i $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Z drugiej strony, wiemy, że jeśli $\mathrm{Re}\, s > 1$, to $\zeta_{\mathcal{K}}(s) \neq 0$ ([33]). Mnożąc teraz (3.6) przez $\zeta_{\mathcal{K}}^{-1}(s)$, otrzymujemy

$$\zeta_{\mathcal{K}}^{-1}(s) \sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{f(I) z^{F(I)}}{N(I)^s} = \zeta_{\mathcal{K}}^{-1}(s) \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^{ms}}\right) \tag{3.7}$$

dla $|z| < \varrho$ i $\operatorname{Re} s > 1$.

Wiadomo ([33]), że

$$\zeta_{\mathcal{K}}(s) = \sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{1}{N(I)^s} = \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right)^{-1}. \tag{3.8}$$

Z równości (3.8) i (3.7) wynika, że

$$\zeta_{\mathcal{K}}^{-1}(s) \sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{f(I) z^{F(I)}}{N(I)^s} = \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right) \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^{ms}}\right). \tag{3.9}$$

Z (3.9) natychmiast otrzymujemy

$$\sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{f(I) z^{F(I)}}{N(I)^s} = \zeta_{\mathcal{K}}(s) \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^{ms}}\right). \tag{3.10}$$

Oznaczmy teraz przez $h(s,z)$ iloczyn z prawej strony równości (3.10).

Mamy więc

$$h(s,z) = \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^{ms}}\right). \tag{3.11}$$

Z założenia twierdzenia, dotyczącego funkcji f i F dostajemy, że $f(\wp) = 1$ i $F(\wp) = 0$ dla każdego ideału pierwszego $\wp \in G_{\mathcal{K}}$. Dalej z (3.11) otrzymujemy

$$h(s,z) = \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right) \left(1 + \frac{1}{N(\wp)^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^{ms}}\right). \tag{3.12}$$

Iloczyn $h(s,z)$ jest bezwzględnie zbieżny dla $|z| < \varrho$ i $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. Stąd $h(s,z)$ możemy przedstawić w postaci

$$h(s,z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(s) z^m. \tag{3.13}$$

Z (3.10)-(3.13) wynika, że

$$\sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{f(I) z^{F(I)}}{N(I)^s} = \zeta_{\mathcal{K}}(s) h(s, z). \tag{3.14}$$

Z drugiej strony, dla $I \in G_{\mathcal{K}}$ otrzymujemy

$$\sum_{I \in G_{\mathcal{K}}} \frac{f(I) z^{F(I)}}{N(I)^s} = \sum_{I \in G_{\mathcal{K}}(m)} \frac{f(I) z^m}{N(I)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{I \in G_{\mathcal{K}}(m)} \frac{f(I)}{N(I)^s} \right) z^m. \tag{3.15}$$

Z równości (3.13)-(3.15) mamy

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{I \in G_{\mathcal{K}}(m)} \frac{f(I)}{N(I)^s} \right) z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (\zeta_{\mathcal{K}}(s) B_m(s)) z^m. \tag{3.16}$$

Porównując współczynniki stojące przy z^m w (3.16) otrzymujemy

$$\sum_{I \in G_{\mathcal{K}}(m)} \frac{f(I)}{N(I)^s} = \zeta_{\mathcal{K}}(s) B_m(s). \tag{3.17}$$

Ponieważ $|f(I)| \leqslant c_1$, więc z równości (3.17) i z twierdzenia S. Ikehary ([25]) wynika, że

$$d_m = \lim_{x \to \infty} \frac{\nu(G_{\mathcal{K}}(m, x))}{x} = \underset{s=1}{res} (\zeta_{\mathcal{K}}(s) B_m(s)). \tag{3.18}$$

Z drugiej strony z (3.12) i (3.13) mamy

$$h(1, z) = \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)^s}\right) \left(1 + \frac{1}{N(\wp)^s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(1) z^m. \tag{3.19}$$

Z (3.18) wynika, że

$$d_m = \chi h \cdot B_m(1), \tag{3.20}$$

gdzie $\chi h = \underset{s=1}{res} \zeta_{\mathcal{K}}(s)$, χ i h są zdefiniowane w twierdzeniu.

Z (3.16)-(3.20) otrzymujemy

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m = \chi h \cdot h(1,z). \tag{3.21}$$

Z równości (3.21) i (3.19) wynika, że

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m = \chi h \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(\wp^m) z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^m}\right),$$

co kończy dowód twierdzenia 30. ■

Niech teraz $G_{\mathcal{K}} = \mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{N}$ jest multyplikatywną półgrupą liczb naturalnych. Wówczas z (3.3) otrzymujemy klasyczną formułę podaną w roku 1995 przez A. Rényi'ego ([38]). W szczególności zaś, że gęstość liczb naturalnych bezkwadratowych wynosi $d_0 = \frac{6}{\pi^2}$.

Rzeczywiście, niech $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ będzie rozkładem kanonicznym liczby naturalnej n na czynniki pierwsze, $\alpha_j \geqslant 1$, $j = 1, 2, \dots, k$. Wtedy mamy, że $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, $\omega(n) = k$. Niech $\nu(N(m,x)) = card\{n \in \mathbb{N} : n \leqslant x : F(n) = \Omega(n) - \omega(n) = m\}$. Wtedy, z twierdzenia 30 dla $|z| < \varrho = 2$ wynika wspomniana formuła A. Rényi'ego, a mianowicie:

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m z^m = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \in \mathbb{N}} \frac{1 - \frac{z}{p+1}}{1 - \frac{z}{p}}.$$

Z twierdzenia 30 otrzymujemymy również następujące wnioski:

Wniosek 31 *Niech f i F będą funkcjami arytmetycznymi spełniającymi warunki a)-d) i ponadto, niech $F(\wp^m) = m - 1$ dla każdego ideału pierwszego $\wp \in G_{\mathcal{K}}$ i dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 2$. Niech $f(I) \equiv 1$ dla każdego ideału całkowitego $I \in G_{\mathcal{K}}$. Wtedy dla $|z| < 2$ mamy*

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m = \chi h \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right)\left(1 + \frac{1}{N(\wp) - z}\right). \tag{3.22}$$

Dowód. Podstawiając w równości (3.3) $F(\wp^m) = m - 1$ i $f(\wp^m) \equiv 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f(\wp^m)z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^m} &= 1+\frac{1}{N(\wp)}+\frac{z}{N(\wp)^2}+\frac{z^2}{N(\wp)^3}+\ldots = \\ & 1+\frac{1}{N(\wp)}\left(1+\frac{z}{N(\wp)}+\left(\frac{z}{N(\wp)}\right)^2+\ldots\right) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ponieważ $|z| < 2$ i $N(\wp) \geqslant 2$ więc $\frac{|z|}{N(\wp)} < 1$ i ze wzoru (3.23) wynika, że

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f(\wp^m)z^{F(\wp^m)}}{N(\wp)^m} = 1+\frac{1}{N(\wp)}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{N(\wp)}}\right) = 1+\frac{1}{N(\wp)-z}. \tag{3.24}$$

Z równości (3.24) i (3.3) otrzymujemy równość (3.22). ■

Kolejny wniosek wyznacza gęstość ideałów całkowitych z $G_{\mathcal{K}}(m)$.

Wniosek 32 *Niech f i F będą funkcjami arytmetycznymi, spełniającymi warunki z wniosku 31. Wtedy mamy*

$$d_0 = \frac{\chi h}{\zeta_{\mathcal{K}}(2)}, \tag{3.25}$$

gdzie d_0 jest gęstością wszystkich ideałów całkowitych z $G_{\mathcal{K}}(m)$ takich, że $F(\wp^m) = m-1$ dla każdego ideału pierwszego $\wp \in G_{\mathcal{K}}$ i $m \geqslant 2$, $m \in \mathbb{Z}$.

Dowód wniosku 32 otrzymujemy natychmiast z wniosku 31, podstawiając w (3.22) za $z = 0$ i zauważając, że

$$\prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}}\left(1-\frac{1}{N(\wp)^2}\right) = \zeta_{\mathcal{K}}^{-1}(2).$$

W 1975 roku C. Wowk udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 33 *([44]) Niech*

$$d_m = \lim_{x\to\infty}\frac{\nu(G_{\mathcal{K}}(m,x))}{x}.$$

Wtedy

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m = \chi h \prod_{\wp \in G_{\mathcal{K}}} \left(1 + \frac{1}{N(\wp)}\right)\left(1 + \frac{1}{N(\wp) - z}\right) \quad dla \ |z| < 1,$$

gdzie $\chi h = res\zeta_{\mathcal{K}}(s)$, $\zeta_{\mathcal{K}}(s)$ *jest funkcją dzeta Dedekinda, określoną na ciele* $\mathcal{K}$ *i* $\chi = \frac{2^{r+t}\pi^t \mathcal{R}}{\omega(\mathcal{K})|\Delta|^{\frac{1}{2}}}$, $n = [\mathcal{K} : \mathbb{Q}] = r + 2t$, $\mathcal{R}$ *jest regulatorem,* Δ *jest wyróżnikiem ciała* $\mathcal{K}$ *i* h *jest liczbą klasową ciała* $\mathcal{K}$*.*

Wyrażenie $d_m = \lim_{x\to\infty} \frac{\nu(G_{\mathcal{K}}(m,x))}{x}$ będziemy nazywali gęstością asymptotyczną ideałów ciała $\mathcal{K}$, należących do $G_{\mathcal{K}}$.

Widzimy, że podstawiając $F(I) = \Omega(I) - \omega(I)$, $f(I) \equiv 1$ gdzie $\Omega(I) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, $\omega(I) = k$, dla $I = \wp_1^{\alpha_1} \circ \wp_2^{\alpha_2} \circ \ldots \circ \wp_k^{\alpha_k}$ otrzymujemy, że $F(\wp^m) = \Omega(\wp^m) - \omega(\wp^m) = m - 1$. Dlatego z wniosku 32 wynika w szczególności powyższy rezultat C. Wowka, w szczególności, że gęstość całkowitych bezkwadratowych ideałów jest równa $d_0 = \frac{\chi h}{\zeta_{\mathcal{K}}(2)}$.

Wyniki zawarte w twierdzeniu 30, wniosku 31 i 32 zostały opublikowane w 2004 roku we wspólnej pracy z A. Grytczukiem ([19]).

Bibliografia

[1] J. Browkin, A. Schinzel, *On integers not of the form* $n - \varphi(n)$, Colloq. Math. **68** (1995), 55-58.

[2] R. P. Brent, G. L. Cohen, H. J. J. te Riele, *Improved techniques for lower bounds for odd perfect numbers,* Math. Comput., **57** (1991), 857-868.

[3] Yu. D. Burago, V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-New York (1988).

[4] G. L. Cohen, *On odd perfect numbers (II), Multiperfect numbers and quasiperfect numbers,* J. Austral. Math. Soc., Series A, **29** (1980), 369-384.

[5] R. Cook, *Bounds for odd perfect numbers,* CRM Proceedings and Lecture Notes, **19** (1999), 67-71.

[6] J. Brian Conrey, *The Riemann Hypothesis*, Notices, Amer. Math. Soc., **50**, No. 3 (2003), 341-353.

[7] L. E. Dickson, *Finitness of odd perfect and primitive abundant numbers with distinct prime factors,* Amer. J. Math., **35** (1913), 413-426.

[8] P. P. Dong, *Minoration de combinanaissons lineaires de logarithmes p-adiques de nombers algebraiques,* Ser. I Math., C. R. Acad. Sci. Paris, **315** (1992), 503-506.

[9] P. Erdős, *Ūber die Zahlen der form* $\sigma(n) - n$ *und* $n - \varphi$, Elem. Math. (1973), 83-86.

[10] A. Flammenkamp, F. Luca, *Infinite families of noncototiens,* Colloq. Math. **86** (2000), 37-41.

[11] A. Grytczuk, *On some sets of the integer ideals,* Discuss. Math., **3** (1980), 13-19.

[12] A. Grytczuk, *Some remarks on Fermat numbers,* Discuss. Math. **13** (1993), 69-73.

[13] A. Grytczuk, *Explicit formulas of Delange-Sellerg type for some classes of arithmetical functions on the semigroup* $G_{\mathcal{K}}$, J. Number Theory, Vol. 46, No. 1 (1994), 12-28.

[14] A. Grytczuk, M. Wójtowicz, *There are no small odd perfect numbers,* Ser. I Math.,C. R. Acad. Sci. Paris, **328** (1999), 1027-1032.

[15] A. Grytczuk, F. Luca, M. Wójtowicz, *Another note on the greates prime factors of Fermat numbers,* Southeast Asian Bull. Math. **25** (2001), 111-115.

[16] A. Grytczuk, *On a criterion and lower bound for odd perfect numbers,* Int. J. Pure Appl. Math., **16**, No.3 (2004), 385-392.

[17] A. Grytczuk, B. Mędryk, *Lower bound for the greatest prime divisors of the generalized Fermat numbers,* Southeast Asian Bull. Math. **28** (2004), 265-268.

[18] A. Grytczuk, M. Wójtowicz, *An application of the Minkowski inequality,* Int. J. Pure Appl. Math., **11**, No. 3 (2004), 311-314.

[19] A. Grytczuk, B. Mędryk, *Arithmetic functions and density of some classes of integer ideals,* Int. J. Pure Appl. Math., **16**, No.1 (2004), 93-100.

[20] A. Grytczuk, B. Mędryk, *On a result of Flammenkamp-Luca concerning noncototient sequence,* Tsukuba J. Math., **29**, No. 2 (2005), 533-538.

[21] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory,* Springer (1994).

[22] P. Hagis, *Outline a proof that every odd perfect has at least eight prime factors,* Math. Comput., **35** (1980), 1027-1032.

[23] P. Hagis, G. L. Cohen, *Every odd perfect number has a prime factor which excedes* 10^6, Math. Comput., **67** (1998), 1323-1330.

[24] D. R. Heath-Brown, *Odd perfect numbers,* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **115** (1994), 191-196.

[25] S. Ikehara, *An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers,* J. Math. and Physic, **10** (1930-1931), 1-12.

[26] P. M. Jenkins, *Odd perfect numbers have a prime factor exceending* 10^7, Math. Comput., **72** (2003), 1549-1554.

[27] J. Kaczorowski, *Czwarty problem milenijny: Hipoteza Riemanna,* Wiadomości Matematyczne, Seria **II** (2002), 91-120.

[28] W. Keller, *Woher kommen die grōsten derzeit Primzahlen?,* Mitt. Math. Ges. Hamburg, **12** (1991), 211-229.

[29] M. Križek, F. luca, L. Somer, *17 Lectures on Fermat Number-From Number Theory Togeometry,* Springer-Verlag, New York (2001).

[30] M. Le, *A note on the greatest prime factors of Fermat numbers,* Southeast Asian Bull. Math., **22** (1998), 41-44.

[31] B. Mędryk, *Lower bounds for the sum divisor function,* Int. J. Pure Appl. Math., **18**, no.3 (2005), 369-374.

[32] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *On the large sieve,* Mathematika **20** (1973), 119-134.

[33] W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers,* PWN Warszawa (1974).

[34] J. L. Nicolas, *Petites valeurs de la fonction d'Euler's,* J. Number Theory, **17** (1983), 375-388.

[35] P. P. Nielsen, *An upper bound for odd perfect numbers,* Integers Electronic J. Combinatorial Number Theory, **3** (2003), A.14.

[36] C. Pomerance, *Multiply perfect numbers, Mersenne primes and effective computability,* Math. Ann., **226** (1977), 195-206.

[37] D. Redmond, *Number Theory,* Marcel Dekker, Inc. New York (1996).

[38] A. Rényi, *On the density of certain sequences of integers,* Publ. de l'Institute Math. de l'Academic Serbe Sciences, **8** (1955), 157-162.

[39] P. Ribenboim, *The Book of Prime Number Records,* Springer-Verlag (1988).

[40] P. Ribenboim, *The Little of Big Primes,* Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg (1996).

[41] B. Riemann, *Ūber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse,* Monatsber. Akad. Berlin (1859), 671-680.

[42] G. Robin, *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothése de Riemann,* J. Math. Pures Appl., **63** (1984), 187-213.

[43] W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers,* PWN Warszawa (1987).

[44] C. Wowk, *On the asymptotic density of certain ideals of algebraic number fields,* Disscuss. Math., **21** (1975), 27-30.