

Uniwersytet Zielonogórski
w Zielonej Górze
Instytut Informatyki i Elektroniki

Elżbieta Kawecka

Oddziaływanie na dokładność cyfrowych pomiarów korelacyjnych

Rozprawa doktorska

Promotor:

dr hab. inż. Jadwiga Lal-Jadziak, prof. UMK

Zielona Góra, 2008

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń	7
1. Wstęp	9
1.1. Wprowadzenie	9
1.2. Teza, cel oraz zakres pracy	15
1.3. Struktura pracy	16
2. Podstawowe informacje o funkcjach korelacyjnych	19
3. Teoria błędów a niepewność wyniku	23
4. Przetwarzanie a-c z sygnałem <i>ditherowym</i>	29
5. Wpływ kwantowania oraz kwantowania z sygnałem <i>ditherowym</i> na błędy estymacji funkcji korelacyjnych – podstawy teoretyczne	33
5.1. Błędy estymacji funkcji korelacji wzajemnej	38
5.2. Błędy estymacji funkcji autokorelacji	45
6. Wpływ kwantowania oraz kwantowania z sygnałem <i>ditherowym</i> na dokładność wyznaczania funkcji korelacyjnych – badania własne	53
6.1. Ocena poprawności działania wirtualnego korelatora	53
6.2. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej wybranych klas sygnałów w obecności sygnału <i>ditherowego</i> – badania własne	60
6.2.1. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z gaussowskim <i>ditherem</i>	66
6.2.2. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z <i>ditherem</i> o rozkładzie równomiernym	73
6.2.3. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z <i>ditherem</i> o rozkładzie trójkątnym	82
6.2.4. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z gaussowskim <i>ditherem</i>	87

6.2.5.	Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z ditherem o rozkładzie równomiernym	92
6.2.6.	Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z ditherem o rozkładzie trójkątnym	96
6.2.7.	Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału okresowego z sygnałem <i>ditherowym</i> – porównanie wyników . .	100
6.3.	Dokładność estymacji funkcji autokorelacji wybranych klas sygnałów w obecności sygnału <i>ditherowego</i> – badania własne	104
6.3.1.	Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego z gaussowskim <i>ditherem</i>	106
6.3.2.	Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego z <i>ditherem</i> o rozkładzie równomiernym	110
6.3.3.	Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego z <i>ditherem</i> o rozkładzie trójkątnym	113
6.3.4.	Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego z gaussowskim ditherem	116
6.3.5.	Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego z <i>ditherem</i> o rozkładzie równomiernym	120
6.3.6.	Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego z <i>ditherem</i> o rozkładzie trójkątnym	123
6.3.7.	Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału okresowego z sygnałem <i>ditherowym</i> – porównanie wyników . .	126
6.4.	Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej wybranych klas sygnałów w obecności sygnału <i>ditherowego</i> – badania własne	129
6.4.1.	Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych z gaussowskim <i>ditherem</i>	129
6.4.2.	Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych z <i>ditherem</i> o rozkładzie równomiernym	133
6.4.3.	Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych z <i>ditherem</i> o rozkładzie trójkątnym	136
6.4.4.	Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych z gaussowskim <i>ditherem</i>	139
6.4.5.	Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych z <i>ditherem</i> o rozkładzie równomiernym	143

6.4.6.	Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych z <i>ditherem</i> o rozkładzie trójkątnym	146
6.4.7.	Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów okresowego z sygnałami <i>ditherowymi</i> – porównanie wyników . .	150
7.	Wnioski i podsumowanie	153
7.1.	Wyniki uzyskane w pracy	153
7.2.	Wnioski	156
7.3.	Podsumowanie	160
Bibliografia	163
Dodatek	171
A.	Opis Wirtualnego Korelatora	171
B.	Wyniki badań – ocena poprawności działania wirtualnego korelatora .	175
C.	Wyniki badań estymatora wartości średniokwadratowej przedstawione w formie graficznej	183
D.	Wyniki badań estymatora wartości średniokwadratowej przedstawione w formie tabelarycznej	195
E.	Wyniki badań estymatora funkcji autokorelacji przedstawione w formie tabelarycznej	204
F.	Wyniki badań estymatora funkcji korelacji wzajemnej przedstawione w formie tabelarycznej	231

Wykaz ważniejszych oznaczeń

A	– amplituda sygnału przetwarzanego,
$x(t), y(t)$	– sygnały pierwotne,
$x_q(t), y_q(t)$	– sygnały skwantowane,
f_s	– częstotliwość sygnału przetwarzanego,
$d_1(t), d_2(t)$	– sygnały <i>ditherowe</i> ,
σ_{dG}	– dyspersja/odchylenie standardowe sygnału <i>ditherowego</i> o rozkładzie normalnym,
A_{dR}	– amplituda sygnału <i>ditherowego</i> o rozkładzie równomiernym,
A_{dT}	– amplituda sygnału <i>ditherowego</i> o rozkładzie trójkątnym,
$p(x)$	– funkcja gęstości rozkładu wartości sygnału przetwarzanego,
$p_d(x)$	– funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa sygnału <i>ditherowego</i> ,
$\Phi_x(v)$	– funkcja charakterystyczna sygnału x ,
$\Phi_d(v)$	– funkcja charakterystyczna sygnału <i>ditherowego</i> d ,
$\Phi_{xy}(v_1, v_2)$	– łączna funkcja charakterystyczna sygnałów x, y ,
$\Phi_{xq}(v)$	– funkcja charakterystyczna skwantowanego sygnału xq ,
$\Phi_{xqyq}(v_1, v_2)$	– łączna funkcja charakterystyczna skwantowanych sygnałów xq, yq ,
$R_x(k)$	– wartość dokładna funkcji autokorelacji,
$R_x^d(k)$	– wartość dokładna funkcji autokorelacji z sygnałem <i>ditherowym</i> ,
$R_{xy}(k)$	– wartość dokładna funkcji korelacji wzajemnej,
$R_{xy}^d(k)$	– wartość dokładna funkcji korelacji wzajemnej z sygnałem <i>ditherowym</i> ,

$\tilde{\Psi}$	– estymator wielkości Ψ ,
$\tilde{R}_x^q(k, M)$	– cyfrowy estymator funkcji autokorelacji,
$\tilde{R}_{xy}^q(k, M)$	– cyfrowy estymator funkcji korelacji wzajemnej,
$\tilde{R}_x^d(k, M)$	– cyfrowy estymator funkcji autokorelacji z sygnałem <i>ditherowym</i> ,
$\tilde{R}_{xy}^d(k, M)$	– cyfrowy estymator funkcji korelacji wzajemnej z sygnałem <i>ditherowym</i> ,
$\overline{\tilde{R}_x}(k, N)$	– średnia arytmetyczna z N wyników estymacji funkcji autokorelacji,
$\overline{\tilde{R}_x^d}(k, N)$	– średnia arytmetyczna z N wyników estymacji funkcji autokorelacji z sygnałem <i>ditherowym</i> ,
$\overline{\tilde{R}_{xy}}(k, N)$	– średnia arytmetyczna z N wyników estymacji funkcji korelacji wzajemnej,
$\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N)$	– średnia arytmetyczna z N wyników estymacji funkcji korelacji wzajemnej z sygnałem <i>ditherowym</i> ,
$b[\tilde{\Psi}]$	– obciążenie estymatora $\tilde{\Psi}$,
b_M	– obciążenie – wynik analizy matematycznej,
$Var[\tilde{\Psi}]$	– wariancja estymatora $\tilde{\Psi}$,
$\delta_{\tilde{\Psi}}$	– względne obciążenie estymatora $\tilde{\Psi}$,
δ_M	– względne obciążenie – wynik analizy matematycznej,
$u_{A\tilde{\Psi}}$	– niepewność typu A estymatora $\tilde{\Psi}$,
$u_{\xi\tilde{\Psi}}$	– względna niepewność typu A estymatora $\tilde{\Psi}$,
$E[\]$	– wartość oczekiwana,
M	– liczba próbek sygnałów,
N	– liczba powtórzeń eksperymentu.

1. Wstęp

1.1. Wprowadzenie

Zastosowanie funkcji korelacyjnych nastąpiło po II wojnie światowej, kiedy to pojawiły się korelatory analogowe. Upowszechnienie korelacyjnych metod pomiarowych na świecie nastąpiło w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Następnie, zmiany technologii w elektronice zaowocowały bogatą ofertą korelatorów cyfrowych. Opracowanie mikrokomputerów i specjalizowanych procesorów do przetwarzania sygnałów spowodowało pojawienie się uniwersalnych analizatorów do określania funkcji korelacyjnych [57, 59]. Obecnie korelatory nie stanowią masowej produkcji. Najczęściej wytwarzane są w pojedynczych egzemplarzach jako specjalistyczne przyrządy o dużej szybkości działania umożliwiające pomiary funkcji korelacyjnych w czasie rzeczywistym. Techniki korelacyjne wciąż znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki: radioastronomii, medycynie, technice radarowej, pomiarze prędkości, czy opóźnień transportowych [10, 57, 66, 74, 76, 92]. W [29] opisano funkcje korelacyjne w systemie do pomiaru prędkości pociągów przejeżdżających przez tunele, gdzie satelity były bezużyteczne. Natomiast w [11] do lokalizacji źródła sygnałów o krótkim czasie trwania takich jak podwodna akustyka, ultrasonografia, czy monitorowanie drgań sejsmicznych. W [93] zaprezentowano nowatorską technikę *coarse-fine* zastosowaną do analizy korelacyjnej, a w [50] przedstawiono zastosowanie korelacyjnych testów przy identyfikacji systemów.

Korelacja jest jednym z trzech środków odzyskiwania sygnałów z szumów (obok filtracji i uśredniania). Korzystając z autokorelogramu można dla sygnału okresowego określić np.: wartość średnią i średniokwadratową, częstotliwość oraz stosunek sygnału do szumu. Natomiast zastosowanie korelacji wza-

jemnej użytecznego sygnału zakłóconego z sygnałem odniesienia umożliwia wyszukanie podobieństw obu sygnałów. Korelację wzajemną można stosować do badania przebiegów silnie zniekształconych, np. w systemach energetycznych do wykrywania w zniekształconym przebiegu obecności poszczególnych harmonicznych oraz pomiaru ich amplitud i faz. Zastosowanie tej metody w termometrii szumowej pozwala na ograniczenie wpływu szumów własnych toru pomiarowego na wynik pomiaru temperatury w zakresie kriogenicznym co umożliwia uzyskanie całkowitego błędu pomiaru rzędu dziesiątych części milikelwina [74]. Obecny stan techniki umożliwia wykrycie za pomocą korelacji wzajemnej miejsca uszkodzenia rurociągu z dokładnością do kilku centymetrów, a pomiar współrzędnych położenia statku w przestrzeni kosmicznej z dokładnością do kilku metrów. Celem wydobywania sygnału z szumów metodami korelacyjnymi jest zminimalizowanie czasu pomiaru, bowiem niewielka poprawa stosunku sygnału do szumu pociąga za sobą znaczny wzrost czasu pomiaru [74].

Ze względu na wielorakość zastosowań techniki korelacyjnej wiedza metrologiczna z tego zakresu jest rozproszona i często bywa przedstawiana w sposób uproszczony. W podręcznikach i monografiach znajdują się rutynowe analizy. Przykładowo w [7, 9] funkcje korelacyjne wyznaczane są na podstawie sygnałów spróbkowanych. Nie analizuje się wpływu kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na jakość estymacji funkcji korelacyjnych. Brakuje oceny sygnału wyjściowego oferowanych na rynku analizatorów umożliwiających wyznaczanie funkcji korelacyjnych. Podawane przez producentów informacje na temat sposobu przetwarzania sygnałów wejściowych nie zawierają informacji o ocenie dokładności sygnału wyjściowego.

Upowszechnienie komputerów osobistych (PC) zrewolucjonizowało środowisko pracy człowieka. Idea wykorzystania komputera osobistego do realizacji funkcji przyrządu pomiarowego stała się podstawą nowej klasy przyrządów nazywanych *przyrządami wirtualnymi*¹. To nowe podejście do konstru-

¹ Przyrząd wirtualny to przyrząd składający się z komputera ogólnego przeznaczenia i dołączonych do niego – poprzez dowolny kanał komunikacyjny – sprzętowych bloków funkcjonalnych (wewnętrznych i/lub zewnętrznych), przy czym funkcje i możliwości są określane

owania przyrządów oraz zmiany w technologii przyrządów pomiarowych polegające na zastępowaniu sprzętu przez szybkie moduły oprogramowania (przetworniki emulowane) umożliwiły sięgnięcie do rzadziej stosowanych estymatorów funkcji korelacyjnych. W tej sytuacji uzasadniony jest wybór metody bezpośredniej² do wyznaczania funkcji korelacyjnych jako metody prostszej do oprogramowania od metody pośredniej³.

Krytycznym podzespołem wirtualnych przyrządów pomiarowych jest występujący na ich wejściu przetwornik analogowo-cyfrowy. Decyduje on o dokładności, szybkości i koszcie każdego procesu pomiarowego. Dlatego w aparaturze pomiarowej obserwuje się zainteresowanie przetwarzaniem a-c w celu poprawy jego dokładności [5, 6, 17, 22, 49, 51]. Przetwarzanie a-c zawiera operację kwantowania i kodowania. Ponieważ kodowanie w niewadliwym przetworniku A/C jest zawsze operacją idealną, rozważania na temat błędu przetwarzania a-c można utożsamić z błędem kwantowania [19, 20].

Fundamentem teoretycznych zagadnień dotyczących wpływu kwantowania na wiarygodność pomiaru jest teoria kwantowania wg Widrowa [86, 87]. Widrow sformułował warunek dostateczny odtwarzalności dla kwantowania równomiernego. Wykazał, że kwantowanie można rozważać jako próbkowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa przetwarzanego sygnału. W 1977 roku Sripad i Snyder przedstawili uogólnienie pierwotnej formuły teorii kwantowania wg Widrowa. Zastąpili warunek "pasmowego" ograniczenia funkcji charakterystycznej losowego sygnału wejściowego na warunek zerowania się funkcji charakterystycznej w punktach. Warunek ten jest warunkiem koniecznym i dostatecznym.

Na podstawie literatury [46, 47, 48, 72, 75, 86, 87] można stwierdzić, że ze statystycznego punktu widzenia, kwantowanie równomierne zazwyczaj analizowane jest na podstawie tzw. modelu szumu: błędy wynikające z operacji

zarówno przez sprzęt, jak i oprogramowanie, a obsługa odbywa się z wykorzystaniem graficznego interfejsu użytkownika [90].

² Metoda konwencjonalna (bezpośrednio z definicji); polegająca na obliczeniu iloczynów wartości sygnału [33]

³ Metoda polegająca na zastosowaniu odwrotnego przekształcenia Fouriera gęstości widmowej mocy analizowanych sygnałów [33]

kwantowania są modelowane za pomocą dodawanego, niezależnego szumu o rozkładzie równomiernym w przedziale $(-q/2, q/2)$, gdzie q jest krokiem kwantowania. Ponadto model ten ma zastosowanie, jeżeli krok kwantowania q jest dostatecznie mały w porównaniu z amplitudą lub odchyleniem standardowym sygnału [45].

Jednym ze sposobów modyfikacji właściwości operacji kwantowania jest kwantowanie z sygnałem *ditherowym*. Oprócz istniejących metod: programowej i układowej [36], jest kolejną metodą kształtowania właściwości pomiaru dającą nieosiągalne wcześniej efekty. Metoda ta polega na tym, że zasadniczy sygnał jest przetwarzany łącznie z dodatkowym sygnałem zwanym *ditherowym*. Teorię tę zapoczątkował Schuchman już w 1964 roku, którą następnie rozwinęli na początku lat dziewięćdziesiątych XX wieku Gray i Stockham [31, 71]. Warunki odtwarzalności dla istniejących wariantów takiego kwantowania zostały podane oraz udowodnione w [24].

Analizę dotyczącą konwersji a-c z sygnałem *ditherowym* jako operacji składowej pomiaru o charakterze wstępnym przeprowadził, pod koniec lat osiemdziesiątych, Wagdy [83]. W 1989 roku, z powodu aktualności i wagi poruszanych zagadnień, jego artykuł [81] zostaje wyróżniony przez międzynarodowe stowarzyszenie IEEE. W kolejnych publikacjach Wagdy kontynuuje prace nad wpływem sygnałów *ditherowych* o różnych rozkładach gęstości prawdopodobieństwa na błędy wynikające z operacji kwantowania w idealnych przetwornikach A/C [82]. Artykuł stanowi podstawę do zastępowania analogowych sygnałów *ditherowych* łatwiejszymi w implementacji sygnałami cyfrowymi. Natomiast w [80] podejmuje próbę zbadania błędów rzeczywistych przetworników A/C.

Problem wpływania na wiarygodność pomiaru poprzez kształtowanie operacji kwantowania za pomocą konwersji a-c z sygnałem *ditherowym* szczegółowo przeanalizowano w [24]. Sformułowano m.in. jednolitą płaszczyznę teoretyczną, niezbędną dla spójnego opisu związku między kwantowaniem a wiarygodnością, uzasadniono rolę sygnału *ditherowego* w kształtowaniu właściwości tej operacji. Ustalono przyczyny rozbieżności między idealnym a rzeczywistym kwantowaniem sygnałów przetwarzanych w systemach pomia-

rowych, a także zbadano i przedstawiono problem ich redukcji. Wykazano, że konwersja a-c z sygnałem *ditherowym* jest efektywną metodą wpływania na wiarygodność pomiaru.

W latach dziewięćdziesiątych XX wieku obserwuje się wzrost zainteresowania zagadnieniami przetwarzania a-c oraz warunkami odtwarzalności kwantowania, co skłania Widrowa do ponownego sformułowania twierdzeń [89]. Obserwuje się także wzrost zainteresowania przetwarzaniem a-c z sygnałem *ditherowym* w celu poprawy dokładności tej operacji [2, 3, 12, 31, 34, 69, 80].

Współcześnie teoria kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* i wypływające z niej wnioski analizowane są pod kątem kształtowania właściwości operacji kwantowania w celu poprawy jakości konwersji lub pod kątem zastosowań praktycznych [16, 30, 44, 65]. W pracach [18, 19, 21, 23, 25, 26, 27] szczegółowo przeanalizowano zagadnienia konwersji a-c z sygnałem *ditherowym*. Zbadano m.in. wpływ tego sygnału na niepewność wyniku pomiaru, sprecyzowano cele stosowania konwersji a-c z sygnałem *ditherowym*, przedstawiono zasady doboru parametrów konwersji a-c oraz korzyści i "koszty" wynikające z jej stosowania, zbadano wpływ sygnału *ditherowego* na zmniejszenie nieliniowości konwersji a-c, stosunek sygnału do szumu SNR (ang. *signal-to-noise ratio*) oraz nominalną rozdzielczość przetwornika a-c. Z kolei w [1] autorzy przedstawiają realne osiągnięcia wynikające z połączenia dwóch różnych metod linearyzacji konwersji a-c: zastosowania sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym powodującego zmniejszenie błędu wynikającego z operacji kwantowania oraz zastosowania przeglądowych tablic statycznych mających wpływ na zmniejszenie błędu nieliniowości całkowitej (ang. *integral nonlinearity error*) przetworników A/C. Wyraźnie wskazują na korzyści wynikające z zastosowania sygnału *ditherowego* w przetwarzaniu a-c.

Kwantowanie z sygnałem *ditherowym* jest obecnie jedną z metod ograniczenia wpływu konwersji a-c na niepewność wyniku pomiaru (bezpośredniego) [25]. Zagadnienie wpływu kwantowania oraz kwantowania z sygnałami *ditherowymi* na dokładność estymacji funkcji korelacyjnych jest konsekwentnie pomijane w kolejnych wydaniach podręczników uważanych za znaczące w dziedzinie miernictwa stochastycznego i techniki korelacyjnej. Decydują

o tym złożoność problemu i trudności z uogólnieniem wniosków. Lukę w ocenie dokładności cyfrowych funkcji korelacyjnych wypełniają częściowo prace Lal-Jadziak [53, 54, 55, 56, 58, 59, 61, 74], w których autorka zajmuje się obciążeniem cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych. Obciążenie estymatora implikuje niepewność typu B. Przedstawione w pracach Lal-Jadziak [53, 54, 55, 56, 58, 59, 61, 74] modele obciążenia są inspiracją do prowadzenia dalszych badań. Dotychczas nie są publikowane analizy wpływu sygnałów *ditherowych* na – charakteryzującą rozrzut wyników – niepewność typu A estymatorów funkcji korelacyjnych, co jest bardzo ważnym obszarem dla działalności badawczej. Jedynie w pracy [54] można znaleźć przykładową analizę wariancji dla przypadku, gdy sygnały *ditherowe* mają rozkład prostokątny.

Zależności pomiędzy wartością średnią i wariancją pojedynczych sygnałów: harmonicznego, Gaussa oraz sygnału o rozkładzie równomiernym, a wartością średnią i wariancją sygnałów skwantowanych zostały przedstawione w [15]. W [16] autorzy podejmują próbę zbadania wpływu sygnałów *ditherowych* o rozkładach: równomiernym oraz trójkątnym na błąd systematyczny wynikający z operacji kwantowania równomiernego. Na podstawie kryterium wariancji sygnału skwantowanego wskazują na sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym, dla którego wartość ta jest mniejsza. W [64] autorzy podejmują próbę zbadania wariancji wartości średniokwadratowej wynikającej z błędu kwantowania. Natomiast w [19, 25] podano zależność opisującą wariancję błędu kwantowania w przypadku konwersji a-c z sygnałem *ditherowym* i z uśrednianiem, a w [23] dokonano oceny następstwa przybliżonego obliczania wariancji zredukowanego błędu kwantowania cechującego system konwersji a-c z sygnałem *ditherowym* i z uśrednianiem.

Przedmiotem badań przewidzianych do realizacji w ramach rozprawy jest niepewność towarzysząca cyfrowym pomiarom korelacyjnym, zwłaszcza gdy przetwarzanie a-c odbywa się z zastosowaniem sygnału *ditherowego*.

1.2. Teza, cel oraz zakres pracy

Analizując aktualny stan badań postawiono następującą tezę pracy:

Zastosowanie sygnałów ditherowych o rozkładach innych niż normalny umożliwia większe zmniejszenie obciążenia cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych.

Celem niniejszej pracy jest:

Analiza błędów bezpośrednich cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych w celu wyboru najkorzystniejszego sygnału ditherowego ze względu na kryterium redukcji obciążenia powodowanego kwantowaniem.

Motywacją do podjęcia badań w tym kierunku są:

- operacja kwantowania powoduje zmianę parametrów pierwotnej postaci przetwarzanego sygnału; analiza wpływu tej operacji na składowe niepewności cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych jest więc uzasadniona;
- kwantowanie z sygnałem *ditherowym* jest jedną z metod ograniczenia wpływu konwersji a-c na niepewność wyniku pomiaru, dlatego warto rozważyć jej przydatność w zastosowaniu do estymacji funkcji korelacyjnych;
- przedstawione w pracach Lal-Jadziak [53, 54, 55, 56, 58, 59, 61, 74] modele obciążenia cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych są inspiracją do prowadzenia dalszych badań analitycznych oraz symulacyjnych;
- niepublikowane dotychczas analizy wpływu sygnałów *ditherowych* na charakteryzującą rozrzut wyników niepewność typu A estymatorów funkcji korelacyjnych stanowią dodatkowe wyzwanie dla autorki.

Udowodnienie tak postawionej tezy wymagało:

- przeprowadzenia analizy funkcji charakterystycznych badanych sygnałów,
- opracowania modeli matematycznych względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sumy wybranych sygnałów zdeterminowa-

- nych z sygnałami *ditherowymi* o wybranych rozkładach prawdopodobieństwa,
- dokonania oceny dokładności estymacji wartości średniokwadratowej wybranych klas sygnałów w obecności sygnałów *ditherowych* o wybranych rozkładach prawdopodobieństwa,
 - opracowania oprogramowania do badań symulacyjnych cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych,
 - przeprowadzenia analizy obciążenia oraz niepewności standardowej typu A estymatorów funkcji korelacyjnych za pomocą zaproponowanego w pracy wirtualnego korelatora.

1.3. Struktura pracy

Praca została podzielona na siedem części. Rozdziały 2–5 obejmują pojęcia, definicje oraz wnioski wynikające z badań literaturowych.

Rozdział 2 zawiera podstawowe pojęcia dotyczące funkcji korelacyjnych, takie jak: definicje funkcji korelacyjnych oraz ich cyfrowych estymatorów. Przedstawia także właściwości, jakie należy brać pod uwagę podczas analizowania jakości estymatorów oraz sposób oceny ich dokładności.

W rozdziale 3 zdefiniowano pojęcie błędu pomiaru oraz niepewność wyniku pomiaru.

Tematem rozdziału 4 jest sygnał *ditherowy*. Przedstawiono istniejące warianty konwersji a-c z tym sygnałem oraz zalety i dodatkowe, niekorzystne skutki, które mogą się pojawić podczas takiej konwersji.

Przedmiotem rozważań w rozdziale 5 są kwestie dotyczące kwantowania wg teorii Widrowa. Przeanalizowano wpływ kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na błędy estymacji funkcji korelacyjnych. Podano warunki, jakie powinny spełniać sygnały *ditherowe*, aby błędy wynikające z operacji kwantowania zostały zmniejszone.

Rozdział 6 zawiera badania własne autorki dotyczące wpływu kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na dokładność wyznaczania funkcji korelacyjnych. Został on podzielony na podrozdziały przedstawiające

wyniki badań, które dotyczą estymacji wartości średniokwadratowej, funkcji autokorelacji oraz funkcji korelacji wzajemnej wybranych klas sygnałów.

W rozdziale 7 podsumowano uzyskane wyniki oraz wskazano dalsze kierunki badań.

Uzupełnieniem pracy jest dodatek, w którym zamieszczono opis wirtualnego korelatora oraz szczegółowe wyniki badań w formie tabelarycznej oraz graficznej.

2. Podstawowe informacje o funkcjach korelacyjnych

Zasadnicze znaczenie w teorii sygnałów ma pojęcie sygnału losowego. Pojedyncza funkcja czasu, opisująca zjawisko losowe, nazywa się funkcją losową. Zbiór wszystkich funkcji losowych stanowiących realizacje danego zjawiska losowego nazywa się procesem losowym. Sygnał uzyskany w wyniku obserwacji losowego zjawiska fizycznego można zatem uważać za odcinek jednej fizycznej realizacji procesu losowego [8].

Miarą podobieństwa fragmentów jednego sygnału lub fragmentów dwóch różnych sygnałów są funkcje korelacji. Rozróżnia się funkcję *autokorelacji*, będącą miarą podobieństwa fragmentów tego samego sygnału i funkcję *interkorelacji* (korelacji wzajemnej), będącą miarą podobieństwa fragmentów różnych sygnałów [8].

W technice najczęściej stosowane są dwie definicje funkcji korelacyjnych dane wzorami [7, 9, 59]:

$$R_x(\tau) = E[x(t_1)x(t_1 + \tau)], \quad (2.1)$$

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t_1)y(t_1 + \tau)]. \quad (2.2)$$

Funkcję autokorelacji ergodycznego i stacjonarnego procesu $\{x(t)\}$ można wyznaczyć na podstawie jednej dowolnie wybranej realizacji $x(t)$ procesu zgodnie z zależnością [7, 9, 59]¹:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt. \quad (2.3)$$

Funkcja $R_x(\tau)$ sygnału rzeczywistego jest rzeczywista i parzysta oraz osiąga maksimum dla argumentu $\tau = 0$.

¹ Definicja dotyczy sygnałów o ograniczonej mocy średniej, które są przedmiotem niniejszej rozprawy

Analogicznie wyznacza się funkcję korelacji wzajemnej ergodycznych i stacjonarnych procesów $\{x(t)\}$ oraz $\{y(t)\}$ [7, 9, 59]²:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt, \quad (2.4)$$

w której: $x(t)$ i $y(t)$ są realizacjami procesów $\{x(t)\}$ i $\{y(t)\}$, τ – opóźnieniem, T – czasem obserwacji.

Funkcja autokorelacji dla argumentu zerowego jest wartością średniokwadratową sygnału $x(t)$ nazywaną w technice momentem rzędu drugiego [37]:

$$R_x(0) = \overline{x^2(t)}. \quad (2.5)$$

Natomiast wartość średnia $\overline{x(t)}$ sygnału $x(t)$ może być – za wyjątkiem sygnałów okresowych – wyrażona zależnością:

$$\overline{x(t)} = \sqrt{R_x(\infty)}. \quad (2.6)$$

Dla uproszczenia, lecz bez wpływu na ogólność rozważań, założono, że $x(t)$ i $y(t)$ mają zerowe wartości średnie. Funkcja korelacji wzajemnej $R_{xy}(\tau)$, podobnie jak funkcja autokorelacji $R_x(\tau)$, przyjmuje wartości rzeczywiste zarówno dodatnie jak i ujemne. Charakteryzuje się cechą antysymetrii oraz podlega ograniczeniom [59]:

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_x(0)R_y(0), \quad (2.7)$$

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_x(0) + R_y(0)]. \quad (2.8)$$

Jeżeli sygnał $x(t)$ lub $y(t)$ ma zerową wartość średnią oraz $R_{xy}(\tau_i) = 0$, to sygnały $x(t)$ i $y(t)$ nazywa się nieskorelowanymi dla opóźnienia $\tau = \tau_i$. Jeśli zaś sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są statystycznie niezależne, to dla każdej wartości τ funkcja $R_{xy}(\tau)$ przyjmuje wartość równą zero, pod warunkiem, że $x(t)$ lub $y(t)$ ma wartość średnią równą zero. Funkcja autokorelacji $R_x(\tau)$ jest parzystą funkcją argumentu τ , czyli:

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau) \quad (2.9)$$

² Definicja dotyczy sygnałów o ograniczonej mocy średniej, które są przedmiotem niniejszej rozprawy

podczas, gdy funkcja korelacji wzajemnej $R_{xy}(\tau)$ spełnia zależność:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau). \quad (2.10)$$

Najważniejsze właściwości funkcji autokorelacji i korelacji wzajemnej są następujące [67]:

- funkcja autokorelacji jest parzystą funkcją opóźnienia,
- funkcja autokorelacji w punkcie $\tau = 0$ jest równa wartości średniokwadratowej sygnału Ψ_x^2 (wartości średniokwadratowej sygnału zawierającego składową stałą i składową zmienną) i musi być dodatnia,
- funkcja autokorelacji osiąga maksimum w punkcie $\tau = 0$, czyli $R_x(0) \geq R_x(\tau)$,
- sygnał okresowy $x(t)$ ma okresową funkcję autokorelacji,
- funkcja autokorelacji sygnału losowego zanika dla $\tau \rightarrow \infty$,
- funkcja korelacji wzajemnej nie musi być symetryczna w dziedzinie τ ,
- kolejność indeksów przy oznaczaniu funkcji jest istotna: $R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$
- funkcja autokorelacji sumy dwóch nieskorelowanych sygnałów jest równa sumie autokorelacji tych dwóch sygnałów, jeżeli $z(t) = x(t) + y(t)$ oraz $R_{xy}(\tau) = 0$ dla wszystkich τ , to: $R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$.

W praktyce pomiarowej nie jest możliwe wyznaczenie funkcji korelacyjnych. Na podstawie skończonej liczby realizacji procesu losowego lub, częściej, na podstawie ograniczonego w czasie sygnału lub jego reprezentacji cyfrowej tworzone są estymatory funkcji korelacyjnych. Dalsze rozważania będą dotyczyły następujących cyfrowych estymatorów funkcji autokorelacji oraz korelacji wzajemnej [7, 9, 56, 59, 74]:

$$\tilde{R}_x^q(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q(i\Delta t)x_q(i\Delta t + k\Delta t), \quad (2.11)$$

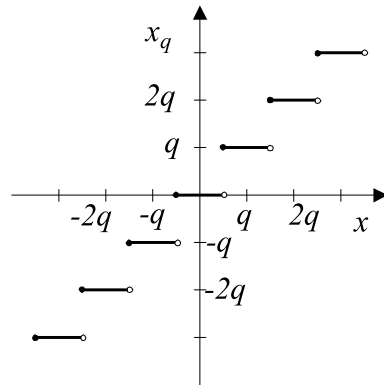
$$\tilde{R}_{xy}^q(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q(i\Delta t)y_q(i\Delta t + k\Delta t), \quad (2.12)$$

gdzie:

Δt – okres próbkowania, M – liczba pobranych próbek, $k\Delta t$ – opóźnienie.

Estymatory (2.11) oraz (2.12) są estymatorami cyfrowymi, w którym każdy z sygnałów poddany jest zarówno dyskretyzacji w dziedzinie czasu, czyli

próbkowaniu ze stałym krokiem, jak i w dziedzinie wartości, czyli kwantowaniu w kwantyzatorach typu zaokrąglającego (*roundoff*) (rys. 2.1).



Rysunek 2.1. Fragment typowej charakterystyki operacji kwantowania równomiernego

Przy analizowaniu jakości estymatorów brane są pod uwagę następujące właściwości [33, 59]:

- estymator powinien być nieobciążony, co oznacza, że wartość oczekiwana estymatora $\tilde{\Psi}$ parametru Ψ powinna być równa wartości tego parametru:

$$E[\tilde{\Psi}] = \Psi, \quad (2.13)$$

- estymator powinien być zgodny, tj. zbieżny według prawdopodobieństwa do wartości oczekiwanej Ψ przy liczbie prób zmierzającej do nieskończoności:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left[|\tilde{\Psi}(N) - \Psi| \geq v\right] = 0, \quad (2.14)$$

gdzie v jest dowolnie małą liczbą dodatnią,

- estymator powinien być efektywny czyli nieobciążony o najmniejszej wariancji.

Oceny dokładności estymatorów dokonuje się m.in. za pomocą [9, 59, 74]:

- wariancji estymatora, czyli opisu losowej składowej błędu:

$$Var[\tilde{\Psi}] = E[(\tilde{\Psi} - E\tilde{\Psi})^2], \quad (2.15)$$

- obciążenia, czyli opisu systematycznej składowej błędu:

$$b[\tilde{\Psi}] = E\tilde{\Psi} - \Psi. \quad (2.16)$$

3. Teoria błędów a niepewność wyniku

W literaturze technicznej dotyczącej pomiarów od wielu dziesięcioleci używane jest pojęcie błędu pomiaru zdefiniowanego jako różnica pomiędzy wartością zmierzoną x_m i prawdziwą x_p [35]:

$$e = x_m - x_p. \quad (3.1)$$

W pomiarach technicznych dokładna wartość prawdziwa mierzonej wielkości x_p z założenia nie jest znana, pomimo że wartość ta w rzeczywistości istnieje. Nie ma pomiarów bezbłędnych, dla których $e = 0$. Pomiar jest operacją niedokładną, a jego wynik jest przybliżeniem wartości prawdziwej mierzand (tego, co ma być zmierzone). Wprowadza się zatem inne pojęcie – niepewności pomiaru.

Niepewność pomiaru jest parametrem pozwalającym na wyznaczenie granic przedziału ufności zawierającego z założonym prawdopodobieństwem nieznaną wartość rzeczywistą (prawdziwą) mierzonej wielkości [4, 78]. Oceniamy ją zawsze na podstawie rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Wyniki pomiarów (będące zmienną losową) przedstawiamy jako: najlepsze przybliżenie mierzonej wielkości \pm niepewność.

Rysunek (3.1) stanowi ilustrację pojęcia niepewności pomiaru. Wartość prawdziwa x_p mieści się w przedziale:

$$x_p \in \langle x_m - U_p; \quad x_m + U_p \rangle, \quad (3.2)$$

przy czym wartość niepewności U_p zależna jest od przyjętego prawdopodobieństwa (poziomu ufności P) dla określonego rozkładu.

Rozkład prawdopodobieństwa jest najlepszym modelem zachowania się zmiennej losowej będącej wynikiem pomiaru i może być m.in. opisany za pomocą [4, 28]:

- wartości oczekiwanej μ (w metrologii odpowiadającej nieznanemu wartości prawdziwej), ocenianej za pomocą jej estymatora obliczonego z wyników próby:

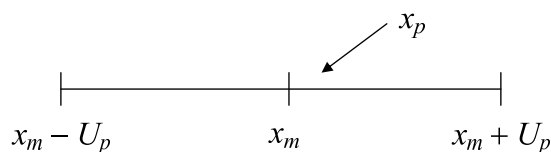
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (3.3)$$

- odchylenia standardowego σ będącego miarą rozrzutu; jeśli wartość ta nie jest znana, obliczany jest z wyników próby jego estymator:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}, \quad (3.4)$$

- zmiennej standaryzowanej Z umożliwiającej wyznaczenie przedziału ufności w dowolnych granicach różnych od $\pm\infty$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}. \quad (3.5)$$



Rysunek 3.1. Ilustracja niepewności pomiaru

Zgodnie z [32] w dziedzinie niepewności rozróżniamy następujące pojęcia [4, 78]:

- niepewność standardową będącą odchyleniem standardowym określonego rozkładu prawdopodobieństwa lub estymatorem odchylenia standardowego;
- niepewność standardową złożoną u_c będącą również odchyleniem standardowym określonego rozkładu prawdopodobieństwa oraz stanowiącą spłot rozkładów składowych o j -tych odchyleniach standardowych:

$$u_c = \sqrt{\sum_{j=1}^N u_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N \sigma_j^2}, \quad (3.6)$$

gdzie $j = 1, 2, \dots, N$;

- niepewność rozszerzoną U_p będącą parametrem pozwalającym na wyznaczenie granic przedziału, nazywanego przedziałem ufności dla średniej:

$$U_p = k_p(\alpha)u_c, \quad (3.7)$$

- przedział ufności dla średniej będący ostatecznym wynikiem interpretacji wyniku pomiarów:

$$P(\bar{x} - U_p < \mu < \bar{x} + U_p) = \alpha, \quad (3.8)$$

- współczynnik rozszerzenia $k_p(\alpha)$ będący zmienną standaryzowaną o określonym rozkładzie prawdopodobieństwa.

W zależności od metod używanych do oszacowania niepewność dzieli się na [4, 59]:

- typ A – niepewność wyznaczana metodami statystycznymi,
- typ B – niepewność wyznaczana innymi metodami.

Można przyjąć, że niepewność typu A odpowiada niepewności powodowanej efektami przypadkowymi, a niepewność typu B niepewności powodowanej efektami systematycznymi.

Niepewność standardową typu A oceniamy na podstawie serii N wyników pomiarów, w których uwzględniono wszystkie poprawki. W tym celu określamy [4, 28]:

- wartość średnią z wyników (estymator wartości prawdziwej):

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (3.9)$$

- odchylenie standardowe wartości średniej, uważane za niepewność standardową typu A:

$$u_A = S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.10)$$

Niepewność rozszerzoną typu A określa się według wzoru [4]:

$$U_p = k_p(\alpha) \cdot u_A. \quad (3.11)$$

Gdy próba jest liczna ($N \geq 30$) współczynnik rozszerzenia $k_p(\alpha)$ przyjmuje wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu normalnego.

Niepewność standardowa typu B jest równa odchyleniu standardowemu przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa. Najczęściej określa się jej wartość przy założeniu, że rozkład błędów aparatury jest jednostajny w granicach błędu granicznego $\pm\Delta_g$ [4]:

$$u_B = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}. \quad (3.12)$$

Wtedy niepewność rozszerzona będzie iloczynem współczynnika rozszerzenia $k_p(\alpha)$ i niepewności standardowej typu B [4]:

$$U_p = k_p(\alpha) \cdot u_B. \quad (3.13)$$

Współczynnik rozszerzenia $k_p(\alpha)$ może przyjąć wartości zmiennej standaryzowanej rozkładu jednostajnego: $k_p(\alpha) = k_J(\alpha) = \sqrt{3} \cdot \alpha$.

W takiej sytuacji zwykle oceniana jest graniczna wartość niepewności rozszerzonej dla ($\alpha = 1$) równa granicznej wartości błędu:

$$U_p = k_J(\alpha) \cdot u_B = \sqrt{3}\alpha \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} = 1 \cdot \Delta_g. \quad (3.14)$$

Ponieważ w praktyce pomiarowej najczęściej występują błędy losowe o rozkładach bliskich rozkładowi normalnemu oraz błędy aparaturowe, którym można przypisać rozkład jednostajny, błąd całkowity jest sumą dwóch niezależnych błędów składowych typu A i B. Wtedy złożona niepewność standardowa wyznaczana jest wg następującego wzoru:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \quad (3.15)$$

Jak już wspomniano w rozdziale 2, oceny dokładności estymatorów dokonuje się m.in. za pomocą wariancji oraz obciążenia estymatora (2.15, 2.16). Na podstawie zebranych wyników pomiarów (wyników estymacji) nie można wyznaczyć ich wartości. Można je natomiast oszacować. Wartość oczekiwaną estymatora $\tilde{\Psi}$ parametru Ψ szacuje się na podstawie wartości średniej arytmetycznej z N wyników estymacji [33, 59, 84]:

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\Psi}_k, \quad (3.16)$$

natomiast obciążenie i wariancję estymatora odpowiednio na podstawie zależności [33, 59]:

$$b[\tilde{\Psi}] = \tilde{\Psi} - \Psi, \quad (3.17)$$

$$Var[\tilde{\Psi}] = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N [\tilde{\Psi}_k - \tilde{\Psi}]^2. \quad (3.18)$$

Przy szacowaniu błędów estymacji stosuje się często normowanie względem wielkości estymowanej. Niekiedy bowiem ze wzrostem argumentu, którego funkcją jest wielkość estymowana, wariancja czy obciążenie estymatora maleje, ale wolniej niż szacowana wielkość, co może powodować zbyt optymistyczne wnioskowanie o błędach estymacji. Unormowane błędy noszą wówczas odpowiednio nazwę [4, 33, 59]:

– względnego błędu standardowego:

$$\xi_{\tilde{\Psi}} = \frac{\sqrt{Var\tilde{\Psi}}}{\tilde{\Psi}}, \quad (3.19)$$

– względnego obciążenia (względnego błędu systematycznego):

$$\delta_{\tilde{\Psi}} = \frac{b}{\tilde{\Psi}} \quad (3.20)$$

i mogą być określone dla $\Psi \neq 0$.

Jeżeli znana jest dokładna wartość obciążenia, to można ją uwzględnić stosując poprawkę do wyniku, w innym przypadku obciążenie podawane jest w postaci niepewności [4, 59].

W dalszej części pracy zostaną wyznaczone wartości błędów: (3.17), (3.20), niepewność typu A liczona wg wzoru:

$$u_{A\tilde{\Psi}} = \sqrt{\frac{Var\tilde{\Psi}}{N}} \quad (3.21)$$

oraz względna niepewność typu A liczona wg wzoru:

$$u_{\xi\tilde{\Psi}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \xi_{\tilde{\Psi}}. \quad (3.22)$$

4. Przetwarzanie a-c z sygnałem *ditherowym*

Przetwarzanie a-c z sygnałem *ditherowym* jest jedną z metod uzyskania pożądaných właściwości błędu kwantowania oraz pożądaných właściwości charakterystyki przetwarzania a-c [21, 59]. Teorię tę zapoczątkował Schuchman już w 1964 roku, którą następnie rozwinęli na początku lat dziewięćdziesiątych Gray i Stockham [31, 71]. Pierwotnie sygnał *ditherowy* stosowany był w różnych dziedzinach nauki i techniki np.: w dziedzinie przetwarzania obrazów [70], przetwarzania sygnałów akustycznych (w celu zmniejszenia zniekształceń nieliniowych) [79]. Obecnie konwersja a-c z sygnałem *ditherowym* jest kierunkiem udoskonalania systemów pomiarowych z dyskretyzacją w celu poprawy dokładności pomiaru.

Pod pojęciem sygnału *ditherowego* rozumie się sygnał pomocniczy dodawany do sygnału przetwarzanego przed jego skwantowaniem. Jeżeli wartości badanej wielkości wyznaczone są wiele razy w celu uśredniania, to dodanie dithera może efektywnie poprawić dokładność tych średnich [59].

Z punktu widzenia celu, jakim jest redukcja błędu kwantowania, rozważany w pracy sygnał *ditherowy* jest sygnałem:

- stacjonarnym;
- niezależnym od sygnału przetwarzanego;
- mającym zerową wartość średnią;
- o parzystej funkcji gęstości prawdopodobieństwa (z uwagi na równomierną charakterystykę kwantyzatora).

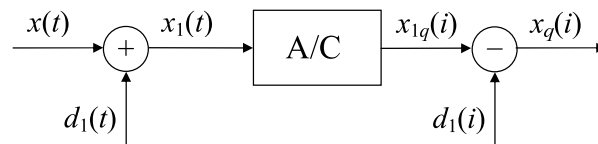
Sygnał *ditherowy* może być szumem tkwiącym w przetwarzanym sygnale wejściowym (*self-dither*) lub szumem celowo dodawanym do sygnału wejściowego [19, 59]. Celem wprowadzenia dodatkowego sygnału jest kontrola i formo-

wanie właściwości operacji kwantowania, mających wpływ na wiarygodność [24, 59].

Istnieją trzy warianty konwersji a-c z sygnałem *ditherowym* [27, 19, 26, 24, 31, 79]:

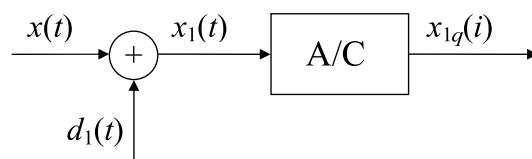
- w1 – z sygnałem *ditherowym* dodawanym i odejmowanym (po konwersji),
- w2 – z sygnałem *ditherowym* dodawanym,
- w3 – z sygnałem *ditherowym* dodawanym i z dodatkowym przetwarzaniem c-c, metoda ta stosowana jest w technice pomiarowej.

Podczas konwersji a-c wg w1 sygnał *ditherowy* $d_1(t)$ dodawany jest do sygnału przetwarzanego $x(t)$ i odejmowany po operacji kwantowania od $x_{1q}(i)$ (rys. 4.1).



Rysunek 4.1. Konwersja a-c z sygnałem *ditherowym* dodawanym i odejmowanym

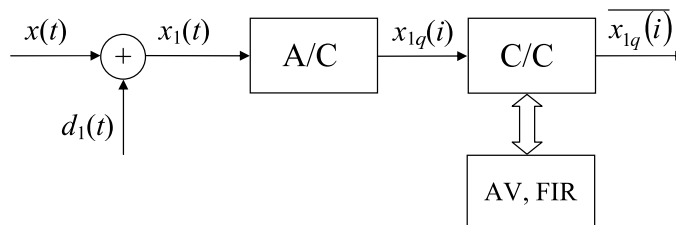
Podczas konwersji a-c wg w2 sygnał *ditherowy* $d_1(t)$ dodawany jest do sygnału przetwarzanego $x(t)$ (rys. 4.2).



Rysunek 4.2. Konwersja a-c z sygnałem *ditherowym* dodawanym

Podczas konwersji a-c wg w3 sygnał *ditherowy* $d_1(t)$ dodawany jest do sygnału przetwarzanego $x(t)$ (rys. 4.3). Przetwarzanie c-c to w ogólności operacja uśredniająca. Może to być uśrednienie metodą średniej ruchomej lub uśrednienie z kumulacją [19]. Przedstawione w dalszych rozdziałach zagadnienia będą dotyczyły metody w3.

Modele operacji kwantowania z sygnałem *ditherowym* oraz cele i metody tej konwersji zostały szczegółowo omówione w [19, 24].



Rysunek 4.3. Konwersja a-c z sygnałem *ditherowym* dodawanym i uśrednieniem

Zalety wynikające z przeprowadzania konwersji a-c z udziałem sygnału *ditherowego* są następujące [24, 59]:

- osiągnięcie efektu "bielenia" błędu kwantowania oraz dekorelacji błędu kwantowania i przetwarzanego sygnału, a więc ograniczenie zniekształceń nieliniowych oraz poprawy stopnia spełnienia warunków odtwarzalności,
- linearyzacja operacji kwantowania, co umożliwi ograniczenie zniekształceń nieliniowych oraz osiągnięcie wzrostu rozdzielczości (pozornego zwiększenia liczby bitów).

Zastosowanie konwersji a-c może powodować występowanie dodatkowych, niekorzystnych skutków, takich jak [24, 59]:

- redukcja zakresu dynamicznego przetwornika,
- pogorszenie stosunku sygnału do szumu kwantowania,
- zmniejszenie szybkości konwersji a-c,
- w pewnych przypadkach powiększenie wariancji estymatorów.

W praktyce można tak skonfigurować system pomiarowy z cyfrowym algorytmem pomiaru, aby parametry zwykłej konwersji a-c cechowały się pewną "nadwyżką możliwości" w stosunku do możliwości wykorzystywanych [19]. Wówczas zastosowanie sygnału *ditherowego* nie będzie czynnikiem ograniczającym.

Istotnym zagadnieniem podczas konwersji a-c z *ditherem* jest odpowiedni dobór parametrów konwersji, czyli odpowiedni dobór wartości poziomu

sygnału *ditherowego* σ_d oraz liczby repetycji N , co m.in. zostanie omówione w rozdziale 6.

5. Wpływ kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na błędy estymacji funkcji korelacyjnych – podstawy teoretyczne

Kwantowanie jest dyskretyzacją sygnału w dziedzinie wartości i polega na odwzorowaniu przedziałów wartości do zbioru liczb. Kwantyzator idealny nie gwarantuje kwantowania z odtwarzalnością ponieważ odwzorowanie zachodzi z bezpowrotną utratą rozróżnialności wartości chwilowych sygnałów z wewnątrz każdego przedziału [20]. Kwantowanie jest operacją nieliniową, co utrudnia analizę sygnałów skwantowanych i systemów zawierających kwantyzatory.

Za twórcę teorii kwantowania sygnałów uważany jest Widrow. Teoria Widrowa obowiązuje dla kwantowania równomiernego (rys. 2.1) i sygnału kwantowanego będącego zmienną losową ciągłą (zmienna losowa jest wartością ergodycznego procesu stochastycznego) o znanej funkcji gęstości. Kwantowanie dokonywane jest w kwantyzatorze o nieograniczonym zakresie.

Zainteresowanie przetwarzaniem a-c oraz zagadnieniem warunków odtwarzalności dla kwantowania artykułowane na łamach prestiżowych czasopism z zakresu metrologii skłoniło Widrowa do nowoczesnego sformułowania twierdzeń i ustosunkowania się do niektórych poglądów [89]. Teoria ta oraz wypływające z niej wnioski były przedmiotem dalszych rozważań.

Widrow jest twórcą koncepcji, by analizę dotyczącą kwantowania przenieść z dziedziny wartości sygnałów do dziedziny rozkładów wartości – czyli statystyk sygnałów. Wykazał on, że operację kwantowania można rozważać jako próbkowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa przetwarzanego

sygnału. Odpowiednikami przedziałów czasowych są tu przedziały wartości amplitud. Zaletą takiego rozwiązania jest to, że próbkowanie staje się operacją liniową.

Fundamentalnym zagadnieniem w przypadku próbkowania w dziedzinie czasu jest odtwarzalność przebiegu na podstawie jego próbek. W przypadku kwantowania, czyli próbkowania w dziedzinie rozkładów wartości sygnałów, warunek odtwarzalności dotyczy warunków, przy których można ze statystyk wielkości skwantowanych odtworzyć statystyki wielkości nieskwantowanych [20].

Przedstawienie teorii Widrowa wymaga wprowadzenia pojęcia funkcji charakterystycznej:

Definicja

Funkcja charakterystyczna $\Phi_x(v)$ jest transformatą Fouriera funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ do dziedziny v ze zmianą znaku. Dla sygnału x poddanego kwantowaniu jest ona równa [15, 20, 24, 45, 52, 59, 68, 89, 91]:

$$\Phi_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{jvx} dx = E[e^{jvx}]. \quad (5.1)$$

Natomiast **łączna funkcja charakterystyczna** $\Phi_{xy}(v_1, v_2)$ sygnałów x oraz y ma postać [24, 52, 59, 68, 89, 91]:

$$\Phi_{xy}(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)e^{j(v_1x+v_2y)} dx dy = E[e^{j(v_1x+v_2y)}]. \quad (5.2)$$

W przypadku kwantowania równomiernego typu *roundoff* (poprzez zaokrąglenie) (rys. 2.1), funkcja charakterystyczna $\Phi_{xq}(v)$ sygnału skwantowanego może być wyrażona następującym wzorem [45, 59, 89, 91]:

$$\Phi_{xq}(v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_x\left(v - \frac{2\pi}{q}i\right) \text{sinc}\left[\frac{q}{2}\left(v - \frac{2\pi}{q}i\right)\right]. \quad (5.3)$$

Natomiast łączna funkcja charakterystyczna $\Phi_{xqyq}(v_1, v_2)$ wzorem [58, 59]:

$$\begin{aligned} \Phi_{xqyq}(v_1, v_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}\left(v_1 - \frac{2\pi}{q_1}i, v_2 - \frac{2\pi}{q_2}l\right) \\ \text{sinc}\left[\frac{q_1}{2}\left(v_1 - \frac{2\pi}{q_1}i\right)\right] \text{sinc}\left[\frac{q_2}{2}\left(v_2 - \frac{2\pi}{q_2}l\right)\right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Moment rzędu m sygnału x oraz moment łączny rzędu $m + n$ sygnałów x i y mogą być wyznaczone przez różniczkowanie funkcji charakterystycznej jako [52, 58, 59, 67, 75, 88]:

$$E[x^m] = j^{-m} \frac{d^m \Phi_x(v)}{dv^m} \Big|_{v=0}, \quad (5.5)$$

$$E[x^m y^n] = j^{-(m+n)} \frac{\partial^{m+n} \Phi_{xy}(v_1, v_2)}{\partial^m v_1 \partial^n v_2} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)}, \quad (5.6)$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$

Widrow sformułował dwa twierdzenia dotyczące odtwarzalności momentów [59, 88, 89].

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja charakterystyczna ma "ograniczoną dziedzinę", czyli gdy:

$$\Phi_x(v) = 0 \quad \text{dla} \quad |v| > \frac{2\pi}{q} - \epsilon, \quad (5.7)$$

gdzie ϵ jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty (np. wartość średnia, wartość średniokwadratowa) sygnału x mogą być wyznaczone z momentów skwantowanego sygnału x_q .

Na rys. 5.1 oraz 5.2 przedstawiono wykresy funkcji charakterystycznych sygnału x o rozkładzie normalnym oraz sygnału x_q skwantowanego z krokiem q równym podwojonemu odchyleniu standardowemu ($q = 2\sigma$). Funkcja $\Phi_x(v)$ zanika dla $|v| > 2\pi/q$, lecz nigdy nie osiąga zera.

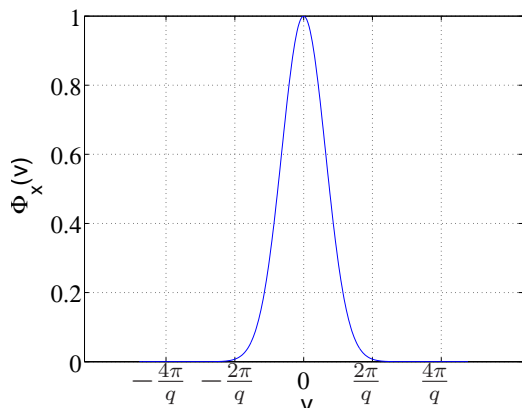
Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja charakterystyczna sygnałów x_1, \dots, x_N poddanych kwantowaniu ma "ograniczoną dziedzinę" w N wymiarach, czyli gdy:

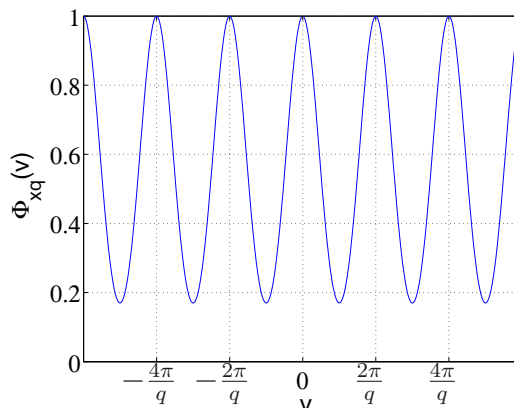
$$\Phi_{x_1, \dots, x_N}(v_1, \dots, v_N) = 0 \quad \text{dla} \quad |v_k| > \frac{2\pi}{q_k} - \epsilon, \quad (5.8)$$

dla $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, gdzie ϵ jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty sygnałów x_1, \dots, x_N mogą być wyznaczone z momentów

skwantowanych sygnałów x_{q1}, \dots, x_{qN} .

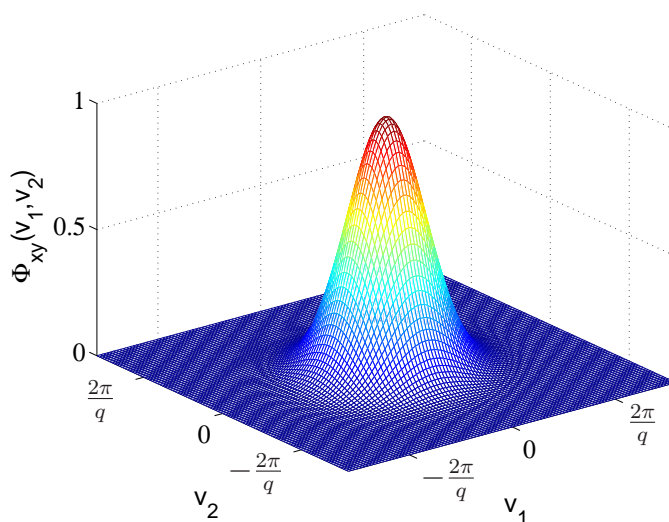


Rysunek 5.1. Funkcja charakterystyczna $\Phi_x(v)$ sygnału x



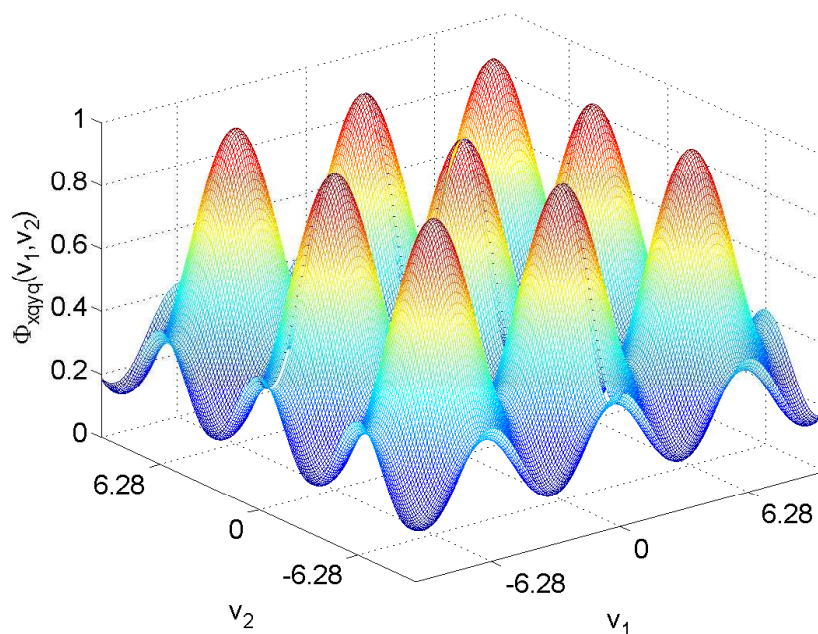
Rysunek 5.2. Funkcja charakterystyczna $\Phi_{xq}(v)$ sygnału x_q

Na rys. 5.3 oraz 5.4 przedstawiono funkcje charakterystyczne sygnałów x , y o rozkładach normalnych oraz sygnałów x_q , y_q skwantowanych z krokiem q równym podwojnemu odchyleniu standardowemu ($q = 2\sigma$).



Rysunek 5.3. Łączna funkcja charakterystyczna $\Phi_{xy}(v_1, v_2)$ sygnałów x , y o rozkładach normalnych

Można zauważyć, że warunki (5.7) i (5.8) są spełnione, gdy funkcje charakterystyczne sygnałów poddanych kwantowaniu mają ograniczoną dziedzinę lub, gdy kwantowanie zachodzi z nieskończenie dużą rozdzielczością ($q \rightarrow 0$). Założenie o ograniczonej dziedzinie funkcji charakterystycznej jest warunkiem dostatecznym¹ odtwarzalności kwantowania [59].



Rysunek 5.4. Łączna funkcja charakterystyczna $\Phi_{x_q y_q}(v_1, v_2)$ skwantowanych sygnałów x_q, y_q

Zgodnie z teorią kwantowania w warunkach spełnienia założeń twierdzeń 1 i 2 słuszne są następujące zależności [24, 52, 59, 84, 85, 88, 89]:

$$E[x_q] = E[x], \quad (5.9)$$

$$E[x_q^2] = E[x^2] + \frac{q^2}{12}, \quad (5.10)$$

$$E[x_q^4] = E[x^4] + \frac{q^2}{2}E[x^2] + \frac{7}{240}q^4, \quad (5.11)$$

$$E[x_q y_q] = E[xy] \quad (x \neq y). \quad (5.12)$$

¹ Sripad B. i Snyder D. [75] sformułowali warunki konieczne odtwarzalności, w praktyce trudne do spełnienia [89]

Poniższe wyrażenia określają związki łączące funkcje korelacyjne uzyskane na podstawie sygnałów skwantowanych i na podstawie sygnałów nieskwantowanych [56, 59, 84]:

$$R_{xq}(t_1, t_1 + \tau) = \begin{cases} R_x(t_1, t_1 + \tau) + \frac{q^2}{12} & (\tau = 0) \\ R_x(t_1, t_1 + \tau) & (\tau \neq 0), \end{cases} \quad (5.13)$$

$$R_{xqq}(t_1, t_1 + \tau) = R_{xy}(t_1, t_1 + \tau) \quad (x \neq y). \quad (5.14)$$

Są one słuszne w warunkach odtwarzalności. Jeżeli sygnały są stacjonarne, to nie zależą one od czasu t_1 .

Założenie o ograniczonej dziedzinie funkcji charakterystycznej nie jest spełniane przez sygnały rzeczywiste. Oznacza ono bowiem, że zbiór wartości sygnału poddanego kwantowaniu jest nieograniczony. Dlatego wyznaczeniu momentów towarzyszą dodatkowe składowe nieujęte w równaniach (5.9 – 5.14).

Wyrażenia na wartość obciążenia cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych zostaną przedstawione w następnych podrozdziałach.

5.1. Błędy estymacji funkcji korelacji wzajemnej

Funkcja korelacji wzajemnej ergodycznych i stacjonarnych procesów $\{x(t)\}$ oraz $\{y(t)\}$ może być wyrażona zależnością [7, 9, 56, 59, 74]²:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau)dt, \quad (5.15)$$

w której: $x(t)$ i $y(t)$ są realizacjami procesów $\{x(t)\}$ i $\{y(t)\}$, τ – opóźnieniem, T – czasem obserwacji.

Cyfrowy estymator tej funkcji można wyrazić wzorem [56, 58, 59, 74]:

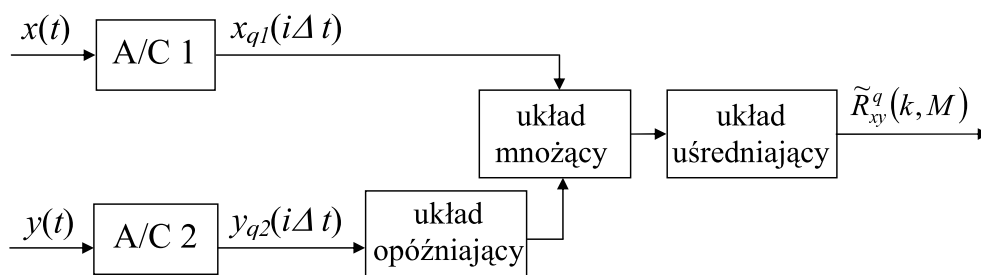
$$\tilde{R}_{xy}^q(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{q1}(i\Delta t)y_{q2}(i\Delta t + k\Delta t), \quad (5.16)$$

² Definicja dotyczy sygnałów o ograniczonej mocy średniej, które są przedmiotem niniejszej rozprawy

gdzie: Δt jest okresem próbkowania, M liczbą pobranych próbek, $k\Delta t$ opóźnieniem.

Estymator (5.16) jest estymatorem cyfrowym, w którym każdy z sygnałów poddany został zarówno dyskretyzacji w dziedzinie czasu, czyli próbkowaniu ze stałym krokiem, jak i w dziedzinie wartości, czyli kwantowaniu w kwantyzatorach typu *roundoff* (rys. 2.1) odpowiednio z krokiem q_1 oraz q_2 .

Podczas estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są przetwarzane do postaci cyfrowych $x_{q1}(i)$ i $y_{q2}(i)$, następnie są opóźniane względem siebie o k próbek, mnożone i uśredniane. Schemat ogólny cyfrowego analizatora funkcji korelacji wzajemnej przedstawia rysunek 5.5.



Rysunek 5.5. Schemat ogólny cyfrowego analizatora funkcji korelacji wzajemnej

Dokładność estymatora (5.16) może być opisana za pomocą wariancji opisującej losową składową błędu [56, 59, 74]:

$$Var[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] = E[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)]^2 - E^2[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)], \quad (5.17)$$

oraz obciążenia opisującego systematyczną składową błędu:

$$b[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] = E[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] - R_{xy}(k). \quad (5.18)$$

Jeżeli obciążenie jest znane, to można je usunąć za pomocą poprawki do wyniku, w innym przypadku podawane jest w postaci niepewności. Błąd standardowy (pierwiastek kwadratowy z wariancji estymatora) odpowiada za niepewność standardową typu A.

Zastosowanie kwantowania typu *roundoff* w każdym z dwóch kanałów korelatora jest źródłem obciążenia estymatora [53, 56, 59, 61, 74]:

$$\begin{aligned}
b[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] &= \frac{q_1}{2\pi} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi i/q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \\
&+ \frac{q_2}{2\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi l/q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \\
&- \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{xy} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l \right).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Analiza tego wzoru pozwala stwierdzić, że wartość obciążenia będzie równa zero, jeżeli łączna funkcja charakterystyczna sygnałów x i y oraz jej pochodne spełnią następujące warunki [53, 56, 59, 61, 74]:

$$\Phi_{xy} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l \right) = 0, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi i/q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi l/q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} = 0 \tag{5.21}$$

$\forall i \neq 0$ oraz $\forall l \neq 0$.

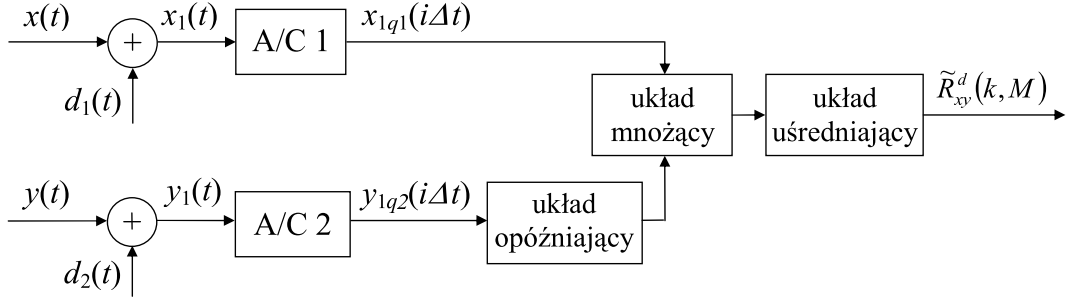
W [59] wykazano, że jeśli badane sygnały są stacjonarne, to obciążenie cyfrowego estymatora (5.16) nie zależy od liczby próbek pobranych do analizy. Zależy natomiast od wartości kroków kwantowania w torach korelatora oraz postaci funkcji charakterystycznych odpowiadających badanym sygnałom.

Jedną z metod ograniczenia wpływu konwersji a-c na niepewność wyniku pomiaru jest przetwarzanie sygnału z celowo wprowadzonym, dodatkowym sygnałem, tzw. sygnałem *ditherowym* (rys. 5.6).

W procesie estymacji funkcji korelacji wzajemnej z udziałem sygnałów *ditherowych*, sygnały $d_1(t)$ oraz $d_2(t)$ dodawane są do sygnałów przetwarzanych $x(t)$ oraz $y(t)$. Uzyskane w ten sposób sygnały: $x_1(t)$ i $y_1(t)$ są następnie przetwarzane do postaci cyfrowej $x_{1q_1}(i\Delta t)$ i $y_{1q_2}(i\Delta t)$, opóźniane względem siebie

o k próbek, mnożone i uśredniane (rys. 5.6). Tak otrzymany estymator przyjmuje postać [54, 56, 58, 59]:

$$\tilde{R}_{xy}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{1q1}(i\Delta t) y_{1q2}(i\Delta t + k\Delta t). \quad (5.22)$$



Rysunek 5.6. Cyfrowy analizator funkcji korelacji wzajemnej z sygnałem *ditherowym*

Wariancję oraz obciążenie estymatora (5.22) można wyrazić za pomocą następujących wzorów [58, 59]:

$$\text{Var}[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = E[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)]^2 - E^2[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)], \quad (5.23)$$

$$b[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = E[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] - R_{xy}(k). \quad (5.24)$$

W [54, 56, 58, 59, 61] wykazano, że wartość oczekiwana estymatora (5.22) jest równa łącznemu momentowi drugiego rzędu skwantowanych sygnałów x_{1q1} i y_{1q2} :

$$E[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[x_{1q1}(i) y_{1q2}(i+k)] = E[x_{1q1} y_{1q2}], \quad (5.25)$$

gdzie $x_{1q1} = x_{1q2}(i)$ oraz $y_{1q1} = y_{1q2}(i+k)$. Ponadto może być wyrażona za pomocą łącznej funkcji charakterystycznej:

$$E[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = - \left. \frac{\partial^2 \Phi_{x_{1q1} y_{1q2}}(v_1, v_2)}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_{(v_1, v_2) = (0, 0)}. \quad (5.26)$$

Związek pomiędzy funkcją charakterystyczną sygnałów skwantowanych oraz funkcją charakterystyczną sygnałów nieskwantowanych może być wyznaczony na podstawie (5.4).

Jeżeli sygnały *ditherowe* $d_1(t)$ i $d_2(t)$ są niezależne od siebie oraz od sygnałów $x(t)$ i $y(t)$, to prawdziwa jest zależność [24, 54, 56, 58, 59, 65]:

$$\Phi_{x_1y_1}(v_1, v_2) = \Phi_{xy}(v_1, v_2) \cdot \Phi_{d_1}(v_1) \cdot \Phi_{d_2}(v_2), \quad (5.27)$$

gdzie: $\Phi_{xy}(v_1, v_2), \Phi_{d_1}(v_1), \Phi_{d_2}(v_2)$ są funkcjami charakterystycznymi sygnałów: x i y, d_1, d_2 .

Podczas kwantowania z sygnałem *ditherowym* wyrażenie na wartość oczekiwaną sygnału wyjściowego korelatora można przedstawić w następujący sposób [54, 56, 58, 59, 74]:

$$E[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = E[xy] + b, \quad (5.28)$$

gdzie b stanowi obciążenie estymatora i wyraża się następującym wzorem [54, 56, 59, 61, 74]:

$$\begin{aligned} b = & \frac{q_1}{2\pi} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \Phi_{d_1}\left(-\frac{2\pi}{q_1}i\right) \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1 - 2\pi i/q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \\ & + \frac{q_2}{2\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \Phi_{d_2}\left(-\frac{2\pi}{q_2}l\right) \frac{\partial \Phi_{xy}(v_1, v_2 - 2\pi l/q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \\ & - \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{d_1}\left(-\frac{2\pi}{q_1}i\right) \Phi_{d_2}\left(-\frac{2\pi}{q_2}l\right) \Phi_{xy}\left(-\frac{2\pi}{q_1}i, -\frac{2\pi}{q_2}l\right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

W [59] wykazano, że poziom błędów estymacji w cyfrowym pomiarze korelacyjnym z sygnałami *ditherowymi* zależy od: rozdzielczości przetwarzania a-c, rodzaju i poziomu sygnałów *ditherowych* oraz od charakterystyk probabilistycznych badanych sygnałów. Natomiast obciążenie estymatora z *ditherem* nie zależy od liczby próbek pobranych do estymacji.

Warunkiem niewystępowania obciążenia cyfrowego estymatora funkcji korelacji wzajemnej jest spełnienie przez sygnały pomocnicze $d_1(t)$ oraz $d_2(t)$ następujących warunków [54, 56, 58, 59, 61, 74]:

1. założenia o zerowych wartościach średnich,
2. statystycznej niezależności od sygnałów mierzonych i jednego od drugiego,

3. spełnienie przez ich funkcje charakterystyczne następujących warunków:

$$\Phi_{d1}\left(\frac{2\pi}{q_1}i\right) = 0 \quad \forall i \neq 0, \quad (5.30)$$

$$\Phi_{d2}\left(\frac{2\pi}{q_2}l\right) = 0 \quad \forall l \neq 0. \quad (5.31)$$

Obciążenie przyjmie wartość równą zero także, gdy sygnały *ditherowe* spełnią następujące warunki [54]:

$$\Phi_{d1}(v_1) = 0 \quad \text{dla} \quad |v_1| > \frac{2\pi}{q_1} - \epsilon, \quad (5.32)$$

$$\Phi_{d2}(v_2) = 0 \quad \text{dla} \quad |v_2| > \frac{2\pi}{q_2} - \epsilon, \quad (5.33)$$

gdzie ϵ jest dowolnie małą liczbą dodatnią, zgodnie z teorią kwantowania wg Widrowa [9]. Jeżeli sygnały *ditherowe* spełniają powyższe założenia, to składowa odpowiadająca za udział kwantowania z *ditherem* w całkowitym błędzie średniokwadratowym jest odwrotnie proporcjonalna do liczby pobranych próbek. Zwiększenie liczby próbek pobranych do estymacji prowadzi więc do poprawy dokładności estymacji [58].

Niestety, stosując przetwarzanie a-c z sygnałem *ditherowym* należy liczyć się z występowaniem wariancji. Jeśli sygnały *ditherowe* dobrane są tak, że estymator (5.22) jest nieobciążony, to wariancja może być wyrażona zależnością [14, 56]:

$$Var[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = Var_1[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] + Var_2[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)], \quad (5.34)$$

gdzie:

$$Var_1[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = \frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} E[x(i) \cdot y(i+k) \cdot x(l) \cdot y(l+k)] - R_{xy}^2(k) \quad (5.35)$$

jest wariancją korelatora, w którym nie występuje kwantowanie z *ditherem*, natomiast:

$$Var_2[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = \frac{1}{M} \left\{ E[x_{1q}^2(0) \cdot y_{1q}^2(k)] - E[x^2(0) \cdot y^2(k)] \right\} \quad (5.36)$$

jest składową wariancji powodowaną kwantowaniem z sygnałem *ditherowym*.

Jak wiadomo, wariancja charakteryzuje rozrzut wyników i "generuje" tzw. niepewność typu A. W przypadku cyfrowej estymacji funkcji korelacji wzajemnej matematyczna analiza niepewności typu A jest dość skomplikowana. Niepewność pomiaru typu A określana jest za pomocą odchylenia standardowego (pierwiastka kwadratowego z wariancji). W pracy [54] dokonano przykładowej analizy wariancji dla przypadku, gdy sygnały *ditherowe* mają rozkład prostokątny. Jeżeli w każdym z dwóch kanałów korelatora do sygnału przetwarzanego zostanie dodany sygnał *ditherowy* o rozkładzie prostokątnym, zerowej wartości średniej i amplitudzie równej połowie kroku kwantowania przetwornika a-c, to zależność (5.36) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} Var_2[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = \frac{1}{M} \left\{ \frac{4q_1^2 q_2^2}{9} - \frac{2q_2^2}{3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} \Phi_{xy}(v_1, v_2) - \frac{2q_1^2}{3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial v_2^2} \Phi_{xy}(v_1, v_2) + \right. \\ \left. + \frac{q_1^2 q_2^2}{4\pi^4} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} i^{-2} l^{-2} \Phi_{xy}\left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l\right) \right\} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Natomiast dla sygnałów *ditherowych* o wartościach międzyszczytowych równych n - krotnej wartości kroku kwantowania przetworników zależność (5.36) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} Var_2[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)] = \frac{1}{M} \left\{ \frac{(n^4 + 2n^2 + 1)q_1^2 q_2^2}{9} - \frac{(n^2 + 1)q_2^2}{3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} \Phi_{xy}(v_1, v_2) - \frac{(n^2 + 1)q_1^2}{3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial v_2^2} \Phi_{xy}(v_1, v_2) + \right. \\ \left. + \frac{n^2 q_1^2 q_2^2}{4\pi^4} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} i^{-2} l^{-2} \Phi_{xy}\left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l\right) \right\} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \end{aligned} \quad (5.38)$$

W [54] wykazano, że:

- zastosowanie sygnałów *ditherowych* może powodować wzrost wariancji estymatora, co będzie skutkowało zwiększeniem rozrzutu wyników pomiarów,
- składowa wariancja wynikająca z przetwarzania a-c z sygnałem *ditherowym* jest odwrotnie proporcjonalna do liczby M próbek sygnału użytych do estymacji,

- gdyby w wyrażeniu (5.34) dominowała składowa wynikająca z przetwarzania a-c, to k – krotny wzrost liczby próbek spowoduje \sqrt{k} – krotne zmniejszenie niepewności.

Stwierdzono, że istnieją sygnały, dla których zastosowanie przetwarzania a-c z *ditherem* o rozkładzie prostokątnym powoduje wzrost wariancji funkcji korelacji wzajemnej. Wzrost ten jest tym większy, im większa jest wartość międzyszczytowa sygnału *ditherowego*.

W dalszej części pracy, przy szacowaniu błędów estymacji, zostaną wyznaczone: obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej na podstawie zależności (5.24) oraz niepewność standardowa typu A estymatora funkcji korelacji wzajemnej na podstawie wzoru:

$$u_{A\tilde{R}_{xy}^d}(k, M) = \sqrt{\frac{\text{Var}[\tilde{R}_{xy}^d(k, M)]}{N}}, \quad (5.39)$$

gdzie N jest liczbą powtórzeń pomiaru $\tilde{R}_{xy}^d(k, M)$.

5.2. Błędy estymacji funkcji autokorelacji

Funkcję autokorelacji ergodycznego i stacjonarnego procesu $\{x(t)\}$ można wyznaczyć na podstawie jednej dowolnie wybranej realizacji $x(t)$ procesu zgodnie z zależnością [7, 9, 59]³:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau)dt. \quad (5.40)$$

Cyfrowy estymator funkcji autokorelacji można wyrazić wzorem [7, 9, 59]:

$$\tilde{R}_x^q(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q(i\Delta t)x_q(i\Delta t + k\Delta t), \quad (5.41)$$

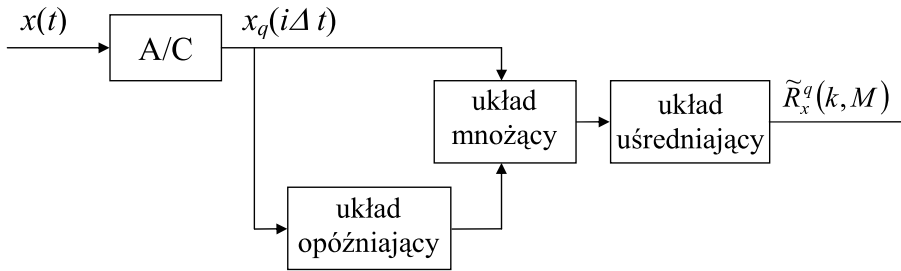
gdzie:

- Δt jest okresem próbkowania,
- M liczbą pobranych próbek,

³ Definicja dotyczy sygnałów o ograniczonej mocy średniej, które są przedmiotem niniejszej rozprawy

– $k\Delta t$ opóźnieniem.

Podczas estymacji funkcji autokorelacji sygnał $x(t)$ jest przetwarzany do postaci cyfrowej $x_q(i)$, następnie jest mnożony przez swoją kopię opóźnioną o k próbek, a uzyskany wynik jest uśredniany (rys. 5.7).



Rysunek 5.7. Cyfrowy analizator funkcji autokorelacji

Dokładność estymatora funkcji autokorelacji (5.41), tak jak w przypadku funkcji korelacji wzajemnej, może być opisana za pomocą wariancji estymatora opisującej przypadkową składową błędu [59, 74]:

$$Var[\tilde{R}_x^q(k, M)] = E[\tilde{R}_x^q(k, M)]^2 - E^2[\tilde{R}_x^q(k, M)], \quad (5.42)$$

oraz obciążenia estymatora opisującego systematyczną składową błędu:

$$b[\tilde{R}_x^q(k, M)] = E[\tilde{R}_x^q(k, M)] - R_x(k). \quad (5.43)$$

W warunkach niespełnienia założeń twierdzenia Widrowa wartość oczekiwana estymatora $\tilde{R}_x^q(k, M)$ jest równa [53, 59]:

$$E[\tilde{R}_x^q(k, M)] = \begin{cases} R_x(k) + \frac{q^2}{12} + b & (k = 0) \\ R_x(k) + b & (k \neq 0), \end{cases} \quad (5.44)$$

gdzie b jest obciążeniem estymatora (5.41) wynikającym z operacji kwantowania równomiernego i wyraża się wzorem [53, 59]:

$$\begin{aligned}
b[\tilde{R}_x^q(k, M)] &= \frac{q_1}{2\pi} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \frac{\partial \Phi_{xx}(v_1 - 2\pi i/q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \\
&+ \frac{q_2}{2\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \frac{\partial \Phi_{xx}(v_1, v_2 - 2\pi l/q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \\
&- \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{xx}\left(-\frac{2\pi}{q_1}i, -\frac{2\pi}{q_2}l\right).
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Wartość obciążenia (5.45) będzie równa zero, jeżeli funkcja charakterystyczna sygnału x oraz jej pochodne spełnią następujące warunki [53, 59]:

$$\Phi_{xx}\left(-\frac{2\pi}{q_1}i, -\frac{2\pi}{q_2}l\right) = 0, \tag{5.46}$$

$$\frac{\partial \Phi_{xx}(v_1 - 2\pi i/q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_{xx}(v_1, v_2 - 2\pi l/q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} = 0 \tag{5.47}$$

$\forall i \neq 0$ oraz $\forall l \neq 0$.

Za pomocą funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego można wyznaczyć wartość średniokwadratową sygnału na podstawie (2.5). Wartość średniokwadratowa skwantowanego równomiernie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [16, 45, 56, 59, 60, 75]:

$$E[x_q^2] = E[x^2] + \frac{q^2}{12} + b, \tag{5.48}$$

gdzie b stanowi składową obciążenia wyrażoną wzorem:

$$b = \frac{q}{\pi} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \dot{\Phi}_x\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \Phi_x\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^i}{i^2}. \tag{5.49}$$

Gdyby został spełniony warunek (5.7), to składowa obciążenia b (pozostała po uwzględnieniu poprawki Shepparda $q^2/12$) przyjęłaby wartość równą 0. Obciążenie powodowane kwantowaniem będzie tym większe, im mniejszy

będzie stosunek dyspersji sygnału do przedziału kwantowania przetwornika [59].

Dodatkowo w [59] przeprowadzono analizę wpływu jednoczesnego próbkowania i kwantowania na błędy estymacji. Wykazano, że:

- Wartości względnego błędu standardowego są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z liczby próbek M ($M \in \langle 2^3, 3^{17} \rangle$). Błędy te są tym większe, im mniejszy jest stosunek sygnału do szumu (S/N), z czego wynika potrzeba wydłużania czasu estymacji w przypadku silnie zakłóconych sygnałów.
- Dla $S/N \leq 10^{-2}$ o dokładności estymacji decyduje błąd standardowy czyli składowa losowa błędu. W przypadku, gdy moc szerokopasmowego zakłócenia wielokrotnie przewyższa moc sygnału, błędy estymacji praktycznie nie zależą od liczby poziomów kwantowania, zależą natomiast od liczby próbek pobranych do estymacji.

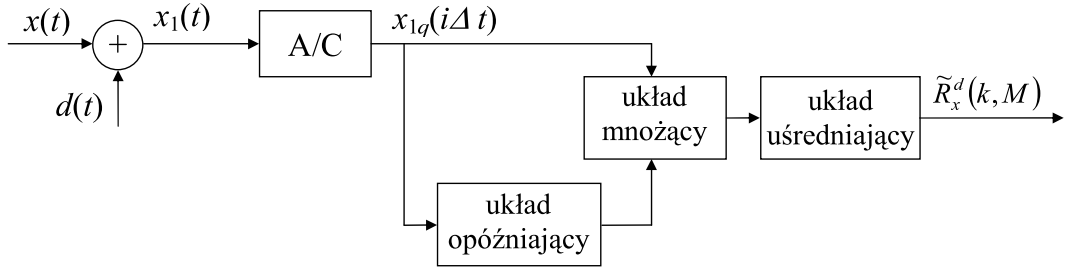
Jedną z metod ograniczenia wpływu konwersji a-c na niepewność wyniku pomiaru jest konwersja z sygnałem *ditherowym* oraz uśrednianiem. Zastosowanie takiej konwersji w przypadku autokorelacji oznacza, że do sygnału $x(t)$ dodawany jest dodatkowy sygnał *ditherowy* $d(t)$ (rys. 5.8). Uzyskany sygnał $x_1(t)$ jest przetwarzany do postaci cyfrowej $x_{1q}(i\Delta t)$. Następnie jest on mnożony przez swoją kopię opóźnioną o k próbek, a wynik mnożenia jest uśredniany. Uzyskany w ten sposób estymator przyjmuje postać [59]:

$$\tilde{R}_x^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{1q}(i\Delta t)x_{1q}(i\Delta t + k\Delta t). \quad (5.50)$$

Zależności na składowe błędy występujące w pomiarze funkcji autokorelacji sygnału wraz z sygnałem *ditherowym* można sformułować wstawiając do wzorów (5.23) oraz (5.24) wielkości $R_x(k)$ i $\tilde{R}_x^d(k, M)$ w miejsce $R_{xy}(k)$ oraz $\tilde{R}_{xy}^d(k, M)$ [59]:

$$Var[\tilde{R}_x^d(k, M)] = E[\tilde{R}_x^d(k, M)]^2 - E^2[\tilde{R}_x^d(k, M)], \quad (5.51)$$

$$b[\tilde{R}_x^d(k, M)] = E[\tilde{R}_x^d(k, M)] - R_x(k). \quad (5.52)$$

Rysunek 5.8. Cyfrowy analizator funkcji autokorelacji z sygnałem *ditherowym*

W dalszej części pracy, przy szacowaniu błędów estymacji (analogicznie, jak w przypadku korelacji wzajemnej), zostaną wyznaczone: obciążenie estymatora funkcji autokorelacji na podstawie (5.52) oraz niepewność standardowa typu A estymatora funkcji autokorelacji na podstawie wzoru:

$$u_{A\tilde{R}_x^d}(k, M) = \sqrt{\frac{\text{Var}[\tilde{R}_x^d(k, M)]}{N}}, \quad (5.53)$$

gdzie N jest liczbą powtórzeń pomiaru $\tilde{R}_x^d(k, M)$.

W pomiarze wartości średniokwadratowej zastosowano normowanie względem wielkości estymowanej. Względne obciążenie estymatora funkcji autokorelacji przyjmuje postać:

$$\delta_{\tilde{R}_x^d}(k, M) = \frac{b[\tilde{R}_x^d(k, M)]}{R_x(k)}. \quad (5.54)$$

Natomiast względna niepewność standardowa typu A estymatora funkcji autokorelacji przyjmuje następującą postać:

$$u_{\xi\tilde{R}_x^d}(k, M) = \frac{\sqrt{\text{Var}[\tilde{R}_x^d(k, M)]}}{R_x(k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}. \quad (5.55)$$

Można wykazać, że wartość oczekiwana estymatora (5.50) funkcji autokorelacji jest identyczna jak estymatora uzyskanego ze skwantowanego sygnału x_{1q} i może być wyrażona za pomocą łącznej funkcji charakterystycznej $\Phi_{x_{1q}x_{1q}}(v_1, v_2)$ [59].

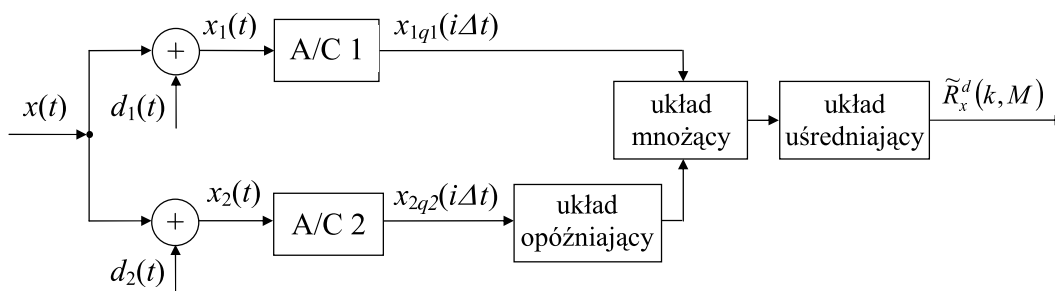
Zależności (5.29 – 5.31) nie mają tu zastosowania, ponieważ ten sam *dither* występuje w obu sygnałach poddawanych mnożeniu.

W warunkach odtwarzalności dla kwantowania (spełnienia założeń twierdzenia Widrowa) wartość oczekiwana estymatora $\tilde{R}_x^d(k, M)$ jest równa [53, 55, 56, 59]:

$$E[\tilde{R}_x^d(k, M)] = \begin{cases} R_x(k) + R_d(k) + \frac{q^2}{12} & (k = 0) \\ R_x(k) + R_d(k) & (k \neq 0). \end{cases} \quad (5.56)$$

Ponieważ nie istnieją sygnały rzeczywiste, które dokładnie spełniałyby warunki twierdzenia Widrowa, należy dodatkowo uwzględnić obciążenie b estymatora.

Pomiar funkcji autokorelacji może być zrealizowany metodą dwukanałową z wykorzystaniem korelacji wzajemnej [55, 59, 74]. Metoda ta polega na tym, że sygnał $x(t)$ podawany jest jednocześnie do obu wejść korelatora (rys. 5.9), co wymaga rozbudowy analizatora funkcji autokorelacji. Zaletą takiego rozwiązania jest to, że błąd estymacji jest mniejszy. Mogą być także stosowane zależności (5.28) oraz (5.29).



Rysunek 5.9. Cyfrowy analizator funkcji autokorelacji z sygnałem *ditherowym* z wykorzystaniem korelacji wzajemnej

Wartość obciążenia b estymatora wynikającego z operacji kwantowania równomiernego z sygnałem *ditherowym* w pomiarze autokorelacji z wykorzy-

staniem korelacji wzajemnej można wyrazić za pomocą wzoru [55, 59, 74]:

$$\begin{aligned}
b = & \frac{q_1}{2\pi} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \Phi_{d1} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i \right) \frac{\partial \Phi_{xx}(v_1 - 2\pi i/q_1, v_2)}{\partial v_2} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \\
& + \frac{q_2}{2\pi} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \Phi_{d2} \left(-\frac{2\pi}{q_2} l \right) \frac{\partial \Phi_{xx}(v_1, v_2 - 2\pi l/q_2)}{\partial v_1} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \\
& - \frac{q_1 q_2}{4\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+l}}{il} \Phi_{d1} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i \right) \Phi_{d2} \left(-\frac{2\pi}{q_2} l \right) \Phi_{xx} \left(-\frac{2\pi}{q_1} i, -\frac{2\pi}{q_2} l \right). \quad (5.57)
\end{aligned}$$

Warunkiem niewystępowania obciążenia cyfrowego estymatora funkcji autokorelacji (tak, jak w przypadku funkcji korelacji wzajemnej) jest spełnienie przez sygnały pomocnicze $d_1(t)$ oraz $d_2(t)$ następujących założeń [55, 59, 74]:

1. założenia o zerowych wartościach średnich,
2. statystycznej niezależności od sygnałów mierzonych i jednego od drugiego,
3. spełnienie przez ich funkcje charakterystyczne następujących warunków:

$$\Phi_{d1} \left(\frac{2\pi}{q_1} i \right) = 0 \quad \forall i \neq 0, \quad (5.58)$$

$$\Phi_{d2} \left(\frac{2\pi}{q_2} l \right) = 0 \quad \forall l \neq 0. \quad (5.59)$$

Obciążenie przyjmie wartość równą zero także, gdy sygnały *ditherowe* spełnią następujące warunki [54]:

$$\Phi_{d1}(v_1) = 0 \quad \text{dla} \quad |v_1| > \frac{2\pi}{q_1} - \epsilon, \quad (5.60)$$

$$\Phi_{d2}(v_2) = 0 \quad \text{dla} \quad |v_2| > \frac{2\pi}{q_2} - \epsilon, \quad (5.61)$$

gdzie ϵ jest dowolnie małą liczbą dodatnią, zgodnie z teorią kwantowania wg Widrowa [9].

Funkcja charakterystyczna sygnału o rozkładzie normalnym z dobrym przybliżeniem spełnia twierdzenia Widrowa i dlatego obciążenie estymatora w pomiarze wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego) osiąga znaczące poziomy dopiero dla stosunkowo dużych wartości

kroku kwantowania ($q > \sigma$) [59, 60]. Sygnał ten jest łatwiejszy do wygenerowania niż inne sygnały *ditherowe*, a ponadto może występować w układzie w postaci szumu samoistnego (*self-dither*) [59]. Dodatkowo w [60] wykazano, że w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego obciążenie wynikające z niespełnienia przez funkcję charakterystyczną warunku ograniczonej dziedziny może:

- wielokrotnie przewyższać obciążenie spowodowane nieuwzględnieniem poprawki Shepparda ($q^2/12$) do wyniku,
- ulec zmniejszeniu w przypadku pomiaru wraz z dodatkowym sygnałem *ditherowym* o rozkładzie normalnym.

6. Wpływ kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na dokładność wyznaczania funkcji korelacyjnych – badania własne

Podczas przeprowadzanych w tym rozdziale badań analitycznych (w programie Mathcad) oraz symulacyjnych (za pomocą wirtualnego korelatora) założono, że:

- rozważania dotyczą niezakłóconych sygnałów badanych,
- przetwarzanie odbywa się za pomocą idealnego przetwornika a-c,
- występują tylko błędy związane z kwantowaniem.

Rozważania dotyczą w szczególności przetworników małobitowych, dla których błędy wynikające z obliczeń numerycznych mają mniejszy wpływ na wyniki badań w porównaniu z analizą przetworników wielobitowych, co zostanie przedstawione w tym rozdziale.

6.1. Ocena poprawności działania wirtualnego korelatora

W ramach rozprawy doktorskiej wykonano badania symulacyjne z zastosowaniem wirtualnego korelatora (patrz dodatek A) oraz przeprowadzono szereg analiz matematycznych w programie Mathcad. Jednym z etapów przeprowadzonych eksperymentów była ocena poprawności działania wirtualnego korelatora. W tym celu wyznaczono wartości względnego obciążenia w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnałów: sinusoidalnego i trójkątnego bez obecności oraz w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładach: normalnym, równomiernym oraz trójkątnym. Obliczenia wykonano na podstawie

wzorów: (6.7), (6.14), (6.28), (6.43), (6.59), (6.71), (6.83), (6.94). Badania przeprowadzono dla różnej liczby próbek sygnałów M , różnej liczby powtórzeń eksperymentu N oraz przetworników o różnej rozdzielczości.

Oceny dokładności wirtualnego korelatora dokonano za pomocą wzorów:

$$\delta_{wk} = \frac{\delta - \delta_M}{\delta_M} \cdot 100, \quad (6.1)$$

$$\delta_{wk_d[GRT]} = \frac{\delta_{d[GRT]} - \delta_{d[GRT]M}}{\delta_{d[GRT]M}} \cdot 100, \quad (6.2)$$

gdzie:

- δ_{wk} – różnica w [%] pomiędzy wynikami uzyskanymi w programie Mathcad oraz za pomocą wirtualnego korelatora,
- $\delta_{wk_d[GRT]}$ – różnica w [%] pomiędzy wynikami uzyskanymi w programie Mathcad oraz za pomocą wirtualnego korelatora – pomiar z udziałem sygnału *ditherowego* o rozkładzie:
 - dG – normalnym,
 - dR – równomiernym,
 - dT – trójkątnym,
- δ – względne obciążenie – wynik uzyskany z korelatora,
- δ_M – względne obciążenie – wynik uzyskany w wyniku analizy matematycznej,
- $\delta_{d[GRT]}$ – względne obciążenie z sygnałem *ditherowym* – wynik uzyskany z korelatora,
- $\delta_{d[GRT]M}$ – względne obciążenie z sygnałem *ditherowym* – wynik uzyskany w wyniku analizy matematycznej.

W (tab. 6.1 – 6.3) przedstawiono wartości procentowej różnicy δ_{wk} oraz $\delta_{wk_d[GRT]}$ pomiędzy wynikami analizy matematycznej i badań symulacyjnych. Wartości poszczególnych wyników eksperymentu zawarte są w (dodatek B).

Podczas wykonywania badań symulacyjnych z użyciem wirtualnego korelatora ważnym zadaniem było odpowiednie dobranie liczby próbek sygnałów M oraz liczby powtórzeń eksperymentu N , aby wartości (6.1) oraz (6.2) były jak najmniejsze. W przypadku pomiaru sygnałów przetwarzanych nie było to

zadanie trudne. Dodatkowo czas wykonywania eksperymentu, w zależności od ustawionej liczby próbek sygnałów oraz mocy obliczeniowej komputerów, wynosił od kilku do kilkunastu sekund.

Można stwierdzić, że w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego wzrost liczby próbek sygnału przyczynia się do większej zbieżności pomiędzy wynikami analizy matematycznej i badań symulacyjnych (tab. 6.1). Podobną zależność można zaobserwować dla sygnału sinusoidalnego i przetworników co najmniej 10-bitowych. Natomiast stosując przetwornik 6-bitowy otrzyma się podobną zbieżność wyników ustawiając liczbę próbek o wartości $M = 2^{16}$ oraz $M = 2^{22}$. Z kolei dla przetwornika 8-bitowego uzyska się lepszą zbieżność wyników ustawiając liczbę próbek o wartości $M = 2^{19}$ niż o wartości $M = 2^{22}$ (tab. 6.1).

Trudniejszym zadaniem jest dobór parametrów N , M w przypadku pomiaru sygnałów w obecności sygnałów *ditherowych*. Na przykład, w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym, im większa jest liczba próbek sygnału, tym mniejszą ilość razy należy powtórzyć eksperyment uzyskując wartość $\delta_{wk_dR} < 1\%$, np. dla $B = 6$:

- $M = 2^{16}$, $N = 200\ 000$, $\delta_{dR} = \delta_{dRM} = -1,14 \cdot 10^{-5}$ ($\delta_{wk_dR} = -2,6 \cdot 10^{-1}\%$),
- $M = 2^{19}$, $N = 100\ 000$, $\delta_{dR} = \delta_{dRM} = -1,14 \cdot 10^{-5}$ ($\delta_{wk_dR} = -5,6 \cdot 10^{-1}\%$).

Jest to zgodne z intuicją.

Podczas przeprowadzania badań symulacyjnych, dla wartości względnego obciążenia δ_M oraz $\delta_{d[GRT]M}$ rzędu 10^{-8} i mniejszej należy wygenerować sygnały o dużej liczbie próbek, aby różnice pomiędzy wynikami analizy matematycznej i badań symulacyjnych były jak najmniejsze (tab. 6.1 – 6.3, kolor niebieski). W przypadku pomiaru wartości średniokwadratowej sumy sygnału przetwarzanego z sygnałem *ditherowym* należy dodatkowo zapewnić bardzo dużą liczbę powtórzeń eksperymentu.

Dla przykładu rozważmy względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* przy użyciu przetwornika 12-bitowego, ustawieniu liczby próbek sygnału $M = 65\ 536$ oraz powtórzeniu eksperymentu 50 000 razy:

- $\delta_{dTM} = 1,3 \cdot 10^{-6}$, $\delta_{dT} = 1,3 \cdot 10^{-6}$, $\delta_{wk_dT} = -1,2 \cdot 10^{-1}\%$,
- $\delta_{dGM} = 2,2 \cdot 10^{-8}$, $\delta_{dG} = 2,8 \cdot 10^{-8}$, $\delta_{wk_dG} = 27\%$,
- $\delta_{dRM} = -3,2 \cdot 10^{-10}$, $\delta_{dR} = -1,1 \cdot 10^{-8}$, $\delta_{wk_dR} = 3,3 \cdot 10^3\%$.

W pomiarze z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie trójkątnym uzyskano największą wartość modułu względnego obciążenia $|\delta_{dTM}|$ oraz najmniejszą wartość współczynnika δ_{wk_dT} . Zaobserwowano, że im mniejsza jest wartość względnego obciążenia estymatora, tym trudniej jest uzyskać zbieżność pomiędzy wynikami analizy matematycznej, a wynikami badań symulacyjnych (tab. 6.2).

Tabela 6.1. Różnice w [%] pomiędzy wartościami względnych obciążeń δ oraz δ_M w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego i trójkątnego o amplitudach $A = 4,7$ V ($N = 1$)

B	Sygnał sinusoidalny			Sygnał trójkątny		
	$\delta_{wk}[\%]$			$\delta_{wk}[\%]$		
	$M = 2^{16}$	$M = 2^{19}$	$M = 2^{22}$	$M = 10^5$	$M = 10^6$	$M = 10^7$
6	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$-6,2 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$
8	1,3	$-4,4 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$	-6,7	$-4,2 \cdot 10^{-1}$	$-1,7 \cdot 10^{-2}$
10	-13	$4,1 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-2}$	30	$-4,2 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$
12	30	-4,3	$-2,9 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^2$	29	$7,2 \cdot 10^{-1}$
14	$-2,9 \cdot 10^2$	12	$2,2 \cdot 10^{-1}$	-50	-50	-6,3
16	$-5,0 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^2$	-9,4	$1,2 \cdot 10^3$	-51	-96

Tabela 6.2. Różnice w [%] pomiędzy wartościami względnych obciążeń δ oraz δ_M w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego oraz sygnału *ditherowego*

B	$\delta_{wk_dG}[\%]$		$\delta_{wk_dR}[\%]$		$\delta_{wk_dT}[\%]$	
	$N = 50\ 000$ $M = 2^{16}$	$N = 100\ 000$ $M = 2^{19}$	$N = 50\ 000$ $M = 2^{16}$	$N = 100\ 000$ $M = 2^{19}$	$N = 50\ 000$ $M = 2^{16}$	$N = 100\ 000$ $M = 2^{19}$
6	-24	-39	2,1	$-5,6 \cdot 10^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	$-1,4 \cdot 10^{-3}$
8	-56	-40	-51	3,4	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$-3,2 \cdot 10^{-4}$
10	-35	-41	-13	-13	$-4,8 \cdot 10^{-2}$	$-1,1 \cdot 10^{-2}$
12	27	-54	$3,3 \cdot 10^3$	$4,5 \cdot 10^2$	$-1,2 \cdot 10^{-1}$	$-6,0 \cdot 10^{-2}$
14	$1,3 \cdot 10^2$	-55	$-1,4 \cdot 10^4$	$-8,9 \cdot 10^3$	9,6	$-7,2 \cdot 10^{-2}$
16	-6,0	-9,9	$1,5 \cdot 10^5$	$-1,2 \cdot 10^4$	$-2,0 \cdot 10^2$	-3,8

Tabela 6.3. Różnice w [%] pomiędzy wartościami względnych obciążeń δ oraz δ_M w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału trójkątnego oraz sygnału *ditherowego*

B	$\delta_{wk_dG}[\%]$			$\delta_{wk_dT}[\%]$		
	$N = 50\ 000$ $M = 10^5$	$N = 50\ 000$ $M = 10^6$	$N = 100\ 000$ $M = 10^6$	$N = 50\ 000$ $M = 10^5$	$N = 50\ 000$ $M = 10^6$	$N = 100\ 000$ $M = 10^6$
6	-39	-40	-32	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$9,8 \cdot 10^{-2}$	$6,1 \cdot 10^{-2}$
8	27	-43	-5,8	$-2,2 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-1}$	$-3,9 \cdot 10^{-2}$
10	$-8,8 \cdot 10^2$	$-1,8 \cdot 10^2$	$-2,4 \cdot 10^2$	1,2	1,3	$-1,5 \cdot 10^{-1}$
12	$1,1 \cdot 10^3$	$-3,0 \cdot 10^2$	$1,9 \cdot 10^2$	-20	12	1,0
14	$7,8 \cdot 10^3$	$-3,3 \cdot 10^3$	$2,1 \cdot 10^3$	-26	8,7	-32
16	$4,0 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^3$	-43	-21

Dla sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym nie można obliczyć wartości procentowej różnicy pomiędzy wynikami analizy matematycznej i badań symulacyjnych, ponieważ $\delta_{dRM} = 0$.

6.2. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej wybranych klas sygnałów w obecności sygnału ditherowego – badania własne

Sygnał sinusoidalny

Sygnałowi sinusoidalnemu o funkcji gęstości rozkładu wartości [37]:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} & , |x| \leq A \\ 0 & , |x| > A \end{cases} \quad (6.3)$$

odpowiada funkcja charakterystyczna o postaci [24, 60, 65]:

$$\Phi_x(v) = J_0(A \cdot v), \quad (6.4)$$

gdzie: J_0 jest funkcją Bessel'a pierwszego rodzaju 0-rzędu, $v = 2\pi/q$.

Pochodna funkcji $\Phi_x(v)$ wyraża się wzorem:

$$\dot{\Phi}_x(v) = \dot{J}_0(A \cdot v) = -J_1(A \cdot v), \quad (6.5)$$

gdzie J_1 jest funkcją Bessel'a pierwszego rodzaju 1-rzędu.

Zgodnie z (5.48) wartość średniokwadratowa skwantowanego równomiernie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [59, 60]:

$$E[x_q^2] = E[x^2] + \frac{q^2}{12} + b = \frac{A^2}{2} + \frac{q^2}{12} + b, \quad (6.6)$$

gdzie b stanowi składową obciążenia.

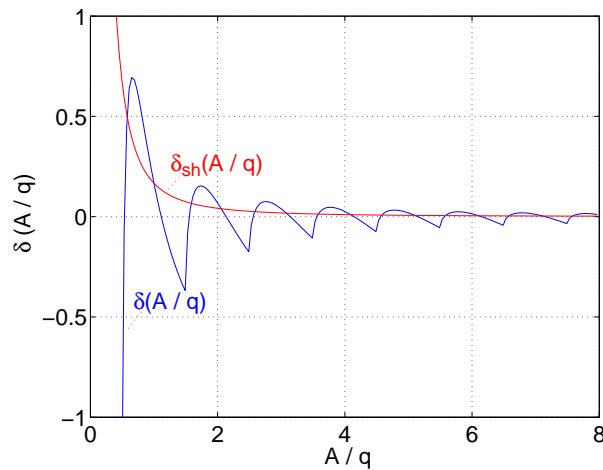
Podstawiając (6.4) i (6.5) do (5.49) oraz zgodnie z (5.54) dzieląc przez wartość średniokwadratową sygnału, czyli przez $A^2/2$ dla sygnału sinusoidalnego, otrzymamy wyrażenie na postać analityczną względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego w funkcji A/q [59]:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{A}{q}\right) &= \frac{b}{A^2/2} = \\ &= 4 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \left[(-1)^i \cdot \left[\frac{1}{\pi i} \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \cdot J_1(\beta) + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{\pi i} \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \right]^2 \cdot J_0(\beta) \right] \right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

gdzie $\beta = 2\pi i \frac{A}{q}$.

Jak wynika z (rys. 6.1) względne obciążenie estymatora uzyskanego na podstawie skwantowanej reprezentacji jest (po uwzględnieniu poprawki Shepparda) oscylacyjnie tłumioną funkcją stosunku A/q i może przyjmować wartości przewyższające znacznie obciążenie $\delta_{sh}(A/q)$ wynikające z nieuwzględnienia poprawki Shepparda do wyniku [60]:

$$\delta_{sh}(A/q) = \frac{1}{6} \left(\frac{A}{q} \right)^{-2} \quad (6.8)$$



Rysunek 6.1. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności $\delta(A/q)$ oraz niezastosowania poprawki Shepparda $\delta_{sh}(A/q)$

Przy przyjętych założeniach dotyczących argumentów funkcji charakterystycznej znalezienie dla zadanej wartości amplitudy sygnału rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{cases} \Phi_x(v) = 0 \\ \dot{\Phi}_x(v) = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

może wymagać zastosowania metod numerycznych. Rozwiązanie analityczne układu równań (6.9) ze względu na występującą funkcję Bessela będącą składnikiem funkcji charakterystycznej nie jest możliwe.

Sygnal trójkątny

Sygnalowi trójkątnemu o funkcji gęstości rozkładu wartości [63]:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & , |x| \leq A \\ 0 & , |x| > A \end{cases} \quad (6.10)$$

odpowiada funkcja charakterystyczna o postaci [63]:

$$\Phi_x(v) = \frac{\sin(A \cdot v)}{A \cdot v}, \quad (6.11)$$

gdzie $v = 2\pi/q$.

Pochodna funkcji $\Phi_x(v)$ wyraża się wzorem:

$$\dot{\Phi}_x(v) = \frac{\cos(A \cdot v)}{v} - \frac{\sin(A \cdot v)}{A \cdot v^2}. \quad (6.12)$$

Zgodnie z (5.48) wartość średniokwadratowa skwantowanego równomiernie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [59, 60]:

$$E[x_q^2] = E[x^2] + \frac{q^2}{12} + b = \frac{A^2}{3} + \frac{q^2}{12} + b, \quad (6.13)$$

gdzie b stanowi składową obciążenia.

Podstawiając (6.11) i (6.12) do (5.49) oraz zgodnie z (5.54) dzieląc przez wartość średniokwadratową sygnału trójkątnego ($A^2/3$), otrzymamy wyrażenie na postać analityczną względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego w funkcji A/q (rys. 6.2) [63]:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{A}{q}\right) &= \frac{b}{A^2/3} = \\ &= 3 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \left[(-1)^i \cdot \left[\left(\frac{1}{\pi i} \cdot \left(\frac{A}{q} \right)^{-1} \right)^3 \cdot \sin(\beta) - \left(\frac{1}{\pi i} \cdot \left(\frac{A}{q} \right)^{-1} \right)^2 \cdot \cos(\beta) \right] \right], \end{aligned} \quad (6.14)$$

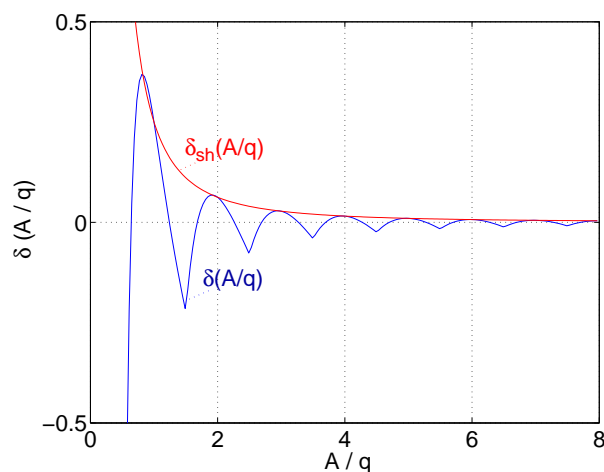
gdzie $\beta = 2\pi i \frac{A}{q}$.

Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego wynikające z nieuwzględnienia poprawki Shepparda do wyniku można wyznaczyć na podstawie wzoru:

$$\delta_{sh}(A/q) = \frac{1}{4} \left(\frac{A}{q} \right)^{-2}. \quad (6.15)$$

Funkcja charakterystyczna sygnału trójkątnego $\Phi_x(v)$ posiada miejsca zerowe w punktach $A = k \cdot \frac{q}{2}$ ($k \in N \setminus \{0\}$). Ponieważ dla przyjętych założeń dotyczących amplitudy sygnału $\dot{\Phi}_x(v) \neq 0$, nie można odtworzyć, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartości $E[x^2]$ na podstawie $E[x_q^2]$.

Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego $\delta(A/q)$ uzyskanego na podstawie skwantowanej reprezentacji (rys. 6.2), podobnie jak w przypadku pomiaru wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego (rys. 6.1), jest oscylacyjnie tłumioną funkcją stosunku A/q . Można zaobserwować, że $\delta(A/q)$ dla takich samych wartości stosunku A/q osiąga mniejsze wartości dla sygnału trójkątnego niż dla sygnału sinusoidalnego.



Rysunek 6.2. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności $\delta(A/q)$ oraz niezastosowania poprawki Shepparda $\delta_{sh}(A/q)$

Jak wynika z (tab. 6.4) wartości względnego obciążenia (6.14) mogą jedynie nieznacznie przewyższać wartości względnego obciążenia (6.15) wynikającego z nieuwzględnienia poprawki Shepparda do wyniku.

Zbadano, że dla $A/q > 67$ wartość względnego obciążenia wynikającego z niezastosowania poprawki Shepparda do wyniku zaczyna nieznacznie przewyższać wartość względnego obciążenia wynikającego z niespełnienia

warunku odtwarzalności. Różnice pomiędzy wartościami błędów $\delta(A/q)$ oraz $\delta_{sh}(A/q)$:

$$\Delta\delta(A/q) = \delta(A/q) - \delta_{sh}(A/q) \quad (6.16)$$

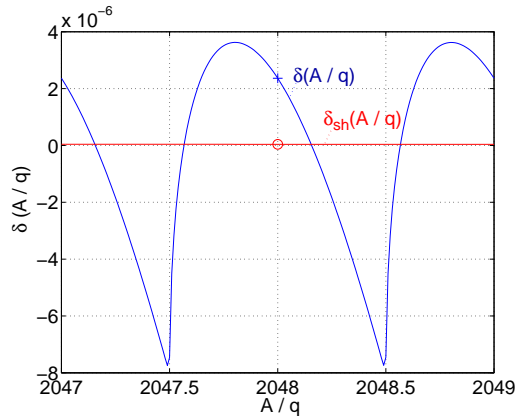
są bardzo małe (np. dla $A/q = 2048$, czyli przetwornika 12-bitowego, są to wartości rzędu 10^{-12}).

Tabela 6.4. Maksymalne wartości różnic $\Delta\delta(A/q)$, jakie mogą wystąpić pomiędzy względnym obciążeniem estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego wynikającego z niespełnienia warunku odtwarzalności $\delta(A/q)$ oraz niezastosowania poprawki Shepparda $\delta_{sh}(A/q)$

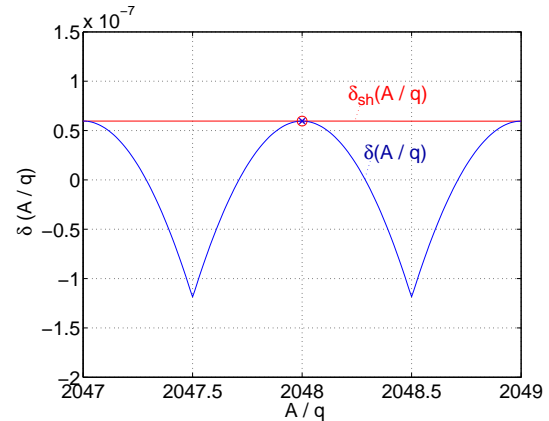
A/q	$\delta(A/q)$	$\delta_{sh}(A/q)$	$\Delta\delta(A/q)$
0,9	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$
1,96	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
2,97	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$
3,98	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$8,5 \cdot 10^{-5}$
4,98	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$
31,996	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$

W dalszej części rozprawy zostaną przedstawione m.in. wyniki analiz matematycznych względnego obciążenia (6.14) dla wartości stosunku A/q odpowiadających przetwornikom o rozdzielczości: 6, 8, 10, 12, 14 i 16 bitów. W tych konkretnych punktach wartości obciążenia $\delta_{sh}(A/q)$ wynikającego z nieuwzględnienia poprawki Shepparda do wyniku nieznacznie przewyższają wartości obciążenia $\delta(A/q)$ wynikającego z niespełnienia warunku odtwarzalności. Dla przetwornika 6-bitowego ($A/q = 32$) $\Delta\delta(A/q) = -1,5 \cdot 10^{-8}$, natomiast dla przetwornika 16-bitowego ($A/q = 32768$) $\Delta\delta(A/q) = -1,4 \cdot 10^{-14}$.

Dodatkową ilustrację omawianych zagadnień stanowią poniższe wykresy:



Rysunek 6.3. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej $\delta(A/q)$ oraz $\delta_{sh}(A/q)$ sygnału sinusoidalnego dla $A/q = 2\,048$



Rysunek 6.4. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej $\delta(A/q)$ oraz $\delta_{sh}(A/q)$ sygnału trójkątnego dla $A/q = 2\,048$

Przebieg eksperymentu – pomiar sygnału przetwarzanego

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego) sygnałów sinusoidalnego oraz trójkątnego z zastosowaniem metody bezpośredniej. W celu zbadania wartości względnego obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora oraz wykonano obliczenia w programie Mathcad na podstawie (6.7) oraz (6.14).

Badania symulacyjne przebiegały w ten sposób, że w wirtualnym korelatorze zostały wygenerowane sygnały o amplitudzie $A = 4,7$ lub $4,9$ V i częstotliwości $f_s = 1$ kHz oraz przesunięciu fazowym $\varphi = 0$. Ustalono liczbę próbek dla sygnału sinusoidalnego odpowiednio: $M = 2^{16}, 2^{19}$. Podczas pomiaru wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego w przypadku, gdy liczbę próbek ustalono w ten sam sposób, czyli $M = 2^x$, uzyskano wyniki niezgodne z wynikami analizy matematycznej przeprowadzonej na podstawie (6.14). Dlatego dla sygnału trójkątnego ustalono liczbę próbek odpowiednio: $M = 10^5, 10^6$. Sygnały skwantowano kolejno w przetworniku A/C o liczbie

bitów: $B = 6, 8, 10, 12, 14, 16$. Wartość kroku kwantowania dobrano zgodnie z zależnością:

$$q = \frac{2A}{2^B}. \quad (6.17)$$

Przyjęto liczbę powtórzeń eksperymentu $N = 1$. Do wyznaczania estymatorów wartości średniokwadratowej pobierano M próbek z pełnego okresu sygnału.

Po wprowadzeniu do wirtualnego korelatora obliczonych parametrów, dokonano pomiaru wartości względnego obciążenia określonego na podstawie zależności:

$$\delta = \frac{\tilde{R}_x^q(0, M) - R_x^q(0)}{A^2/2}, \quad (6.18)$$

gdzie:

– $\tilde{R}_x^q(0, M)$ jest wartością średniokwadratową skwantowanego sygnału:

$$\tilde{R}_x^q(0, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q^2(i), \quad (6.19)$$

– $R_x^q(0)$ jest wartością dokładną i dla sygnału sinusoidalnego wynosi:

$$R_x^q(0) = \frac{A^2}{2} + \frac{q^2}{12}, \quad (6.20)$$

natomiast dla sygnału trójkątnego jest równa:

$$R_x^q(0) = \frac{A^2}{3} + \frac{q^2}{12}. \quad (6.21)$$

W kolejnych rozdziałach dokonano oceny względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego oraz trójkątnego powodowanego przetwarzaniem a-c oraz przetwarzaniem a-c z sygnałem *ditherowym*.

6.2.1. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z gaussowskim *ditherem*

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa sygnału o rozkładzie normalnym i zerowej wartości średniej ma następującą postać [24, 37, 63]:

$$p_d(x) = \frac{1}{\sigma_{dG}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{dG}^2}\right). \quad (6.22)$$

Odpowiadająca jej funkcja charakterystyczna oraz pochodna funkcji charakterystycznej przyjmują postaci [24, 63]:

$$\Phi_{dG}(v) = \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_{dG}^2\right), \quad (6.23)$$

$$\dot{\Phi}_{dG}(v) = -\sigma_{dG}^2 \cdot v \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_{dG}^2\right). \quad (6.24)$$

Dla sygnału sinusoidalnego $x(t)$ występującego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym $x_{dG}(t)$, gdzie $x(t)$ oraz $x_{dG}(t)$ są realizacjami statystycznie niezależnych procesów losowych, postać analityczna funkcji charakterystycznej oraz wyrażenie na jej pochodną przyjmują postaci:

$$\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_{dG}(v) = J_0(A \cdot v) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_{dG}^2\right), \quad (6.25)$$

$$\dot{\Phi}_z(v) = \left(-\sigma_{dG}^2 \cdot v \cdot J_0(A \cdot v) - A \cdot J_1(A \cdot v)\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_{dG}^2\right). \quad (6.26)$$

Warunkiem dostatecznym odtwarzalności kwantowania wg teorii Widrowa jest założenie o ograniczonej dziedzinie funkcji charakterystycznej. Na (rys. 6.5) widać jak w wyniku dodania sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym o dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_{dG}(v)$ do sygnału sinusoidalnego o amplitudzie $A = 1$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_x(v)$ otrzymujemy sygnał $z(t)$ o funkcji charakterystycznej $\Phi_z(v)$ zanikającej szybciej niż $\Phi_x(v)$.

Zgodnie z (5.48) wartość średniokwadratowa skwantowanego równomiernie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [59, 60]:

$$E[x_q^2] = \frac{A^2}{2} + \sigma_{dG}^2 + \frac{q^2}{12} + b, \quad (6.27)$$

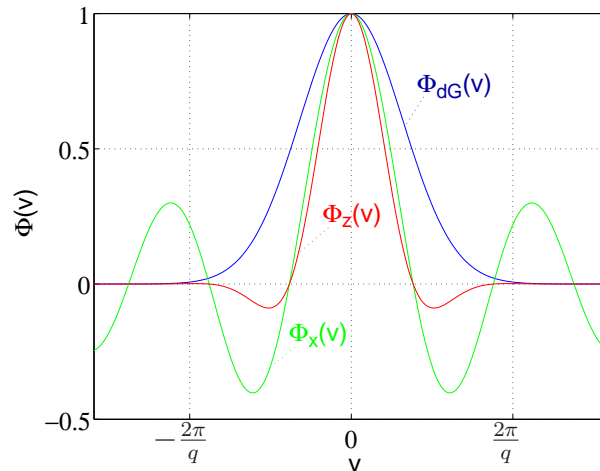
gdzie b jest składową obciążenia.

Podstawiając (6.23) oraz (6.24) do (5.49) oraz dzieląc przez wartość średniokwadratową sygnału sinusoidalnego można wyznaczyć postać analityczną względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej dla sumy

sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym w funkcji A/q :

$$\begin{aligned} \delta_{dG}\left(\frac{A}{q}\right) &= \frac{b}{A^2/2} = \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \left[(-1)^i \cdot \left[\left(\left(2 \cdot \frac{\sigma_{dG}}{q} \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \right)^2 + \beta^{-2} \right) \cdot J_0(2\beta) + 2\beta^{-1} \cdot J_1(2\beta) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp\left(-2\left(\pi i \frac{\sigma_{dG}}{q}\right)^2\right) \right], \end{aligned} \quad (6.28)$$

gdzie $\beta = \pi i \frac{A}{q}$.



Rysunek 6.5. Funkcje charakterystyczne: $\Phi_x(v)$ – sygnału sinusoidalnego, $\Phi_{dG}(v)$ – *dithera* o rozkładzie normalnym oraz $\Phi_z(v)$ będąca ich iloczynem

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym z zastosowaniem metody bezpośredniej. W celu zbadania wartości względnego obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora oraz wykonano obliczenia w programie Mathcad na podstawie (6.28). Oceny względnej niepewności standardowej typu A dokonano wyłącznie za pomocą wirtualnego korelatora.

Badania symulacyjne przebiegały w ten sposób, że w wirtualnym korelatorze zostały wygenerowane sygnały sinusoidalne o amplitudzie $A = 4,7$ V i częstotliwości $f_s = 1$ kHz, przesunięciu fazowym $\varphi = 0$ oraz *ditherowe* o rozkładzie normalnym i zerowej wartości średniej. Liczba próbek sygnałów wynosiła odpowiednio: $M = 2^{16}, 2^{19}$.

Sygnał będący sumą sygnału sinusoidalnego i sygnału *ditherowego* skwantowano kolejno w przetworniku A/C o liczbie bitów: $B = 6, 8, 10, 12, 14, 16$. Aby sygnał z *ditherem* nie przekroczył zakresu przetwornika, dobrano maksymalną wartość generowanego sygnału zgodnie z zależnością:

$$U_{FS} = A + 3 \cdot \sigma_{dG_max}, \quad (6.29)$$

gdzie σ_{dG_max} jest maksymalną wartością dyspersji sygnału *ditherowego* równą $1q$ [38, 43, 45, 60]. Wartość kroku kwantowania wyznaczono na podstawie wzoru:

$$q = \frac{2 \cdot U_{FS}}{2^B} = \frac{2A}{2^B - 6}. \quad (6.30)$$

Przyjęto wartość sygnału *ditherowego* na poziomie $\sigma_{dG} = 0,5q$ oraz $1q$, ustalono liczbę powtórzeń eksperymentu $N = 50\ 000, 100\ 000$. Do wyznaczania estymatorów wartości średniokwadratowej pobierano M próbek z pełnego okresu sygnału.

Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w poniższej tabeli:

Tabela 6.5. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym

$A[V]$	$f_s[Hz]$	φ	σ_{dG}	σ_{dG_max}	M	N	B
4,7	1 000	0	0,5q,	1q	2 ¹⁶	50 000,	6, 8,
			1q		2 ¹⁹	100 000,	10, 12,
					500 000	14, 16	

Po wprowadzeniu do wirtualnego korelatora obliczonych parametrów, dokonano pomiaru wartości względnego obciążenia określonego na podstawie zależności:

$$\delta_{dG} = \frac{\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} - R_x^d(0)}{A^2/2}, \quad (6.31)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d}(0, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d}(0, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(0, M), \quad (6.32)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(0, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji wartości średniokwadratowej:

$$\tilde{R}_{xi}^d(0, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}^2(j), \quad (6.33)$$

- $R_x^d(0)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(0) = \frac{A^2}{2} + \sigma_{dG}^2 + \frac{q^2}{12}. \quad (6.34)$$

Wartość względnej niepewności standardowej typu A obliczono na podstawie:

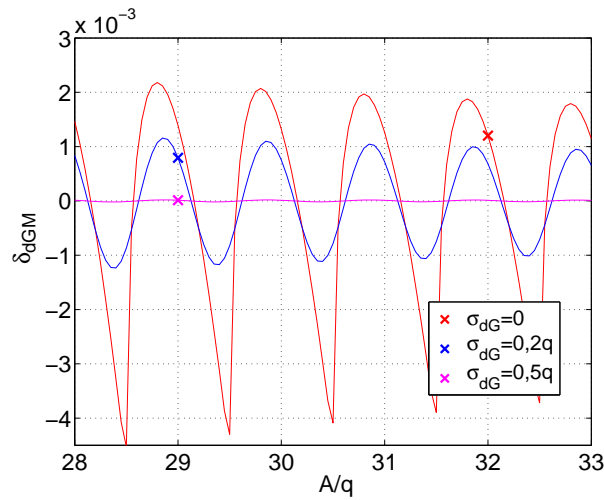
$$u_{\xi dG} = \frac{2}{A^2} \cdot \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(0, M) - \overline{\tilde{R}_x^d}(0, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.35)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

Jednym z ważnych etapów przeprowadzanych w pracy eksperymentów było dobranie odpowiedniej wartości poziomu sygnału *ditherowego*. Na podstawie przeprowadzonych badań literaturowych [43, 45, 60] wartość maksymalną sygnału *ditherowego* ustalono na poziomie $\sigma_{dG_max} = q$. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału o rozkładzie normalnym wynikające z niespełnienia warunku odtwarzalności osiąga znaczące poziomy dopiero dla stosunkowo dużych wartości kroku kwantowania ($q > \sigma_{dGM}$) [40, 42, 43].

Na (rys. 6.6) przedstawiono zależność δ_{dGM} w funkcji A/q dla $\sigma_{dG} = 0, 0, 2q$ oraz $0, 5q$.

Jak wynika z wykresów względne obciążenie dla sygnału z *ditherem* osiąga mniejsze wartości niż dla sygnału bez *dithera*, a poziom obciążenia zmniejsza się wraz ze wzrostem wartości skutecznej σ_{dG} sygnału *ditherowego*.



Rysunek 6.6. δ_{dGM} w funkcji A/q dla $\sigma_{dG} = 0, 0,2q$ oraz $0,5q$, wyniki pomiarów dla $B = 6$

Wyznaczając wartość względnego obciążenia (6.28) w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy analizowanych sygnałów dla 6-bitowego przetwornika i wartości sygnału *ditherowego* $\sigma_{dG} = 0,5q$ oraz $1q$ otrzymano znacznie różniące się wyniki: rzędu 10^{-5} oraz 10^{-12} . Przeprowadzono więc badania symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora dla różnych parametrów N , M oraz σ_{dG} (tab. 6.6).

Analizując otrzymane wyniki można stwierdzić, że dla $\sigma_{dG} = 1q$ wartość δ_{dG} znacznie różni się od δ_{dGM} . Przyjmując taki poziom sygnału *ditherowego* należałoby zapewnić bardzo dużą liczbę powtórzeń eksperymentu, aby przeprowadzając badania symulacyjne uzyskać wynik zbieżny z modelem matematycznym. Niestety, czas wykonywania takiego eksperymentu wydłużałby się wraz ze wzrostem liczby powtórzeń. Dodatkowo można zauważyć, że wzrost poziomu sygnału *ditherowego* powoduje wzrost względnej niepewności standardowej typu A $u_{\xi dG}$. Podczas dalszych badań przyjęto wartość sygnału *ditherowego* na poziomie $\sigma_{dG} = 0,5q$.

Tabela 6.6. Względne obciążenie δ_{dG} , δ_{dGM} oraz względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dG}$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym dla $B = 6$

N	σ_{dG}	δ_{dG}	δ_{dGM}	$u_{\xi dG}$
$M = 2^{16} = 65\,536$				
50 000	0,5q	$9,4 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$9,8 \cdot 10^{-7}$
50 000	1q	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$3,8 \cdot 10^{-12}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$
500 000	1q	$6,2 \cdot 10^{-7}$		$5,6 \cdot 10^{-7}$
$M = 2^{19} = 524\,288$				
100 000	0,5q	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-7}$
100 000	1q	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-12}$	$4,4 \cdot 10^{-7}$

Na (rys. 2–5, dodatek C, str. 183) przedstawiono wyniki symulacji oraz analizy matematycznej względnego obciążenia w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego oraz względnego obciążenia i względnej niepewności standardowej typu A sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym dla B -bitowych przetworników, liczby próbek sygnałów $M = 2^{19}$ oraz liczby powtórzeń eksperymentu $N = 100\,000$.

Kwantowanie z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie normalnym wpływa na zmniejszenie względnego obciążenia wynikającego z niespełnienia przez funkcję charakterystyczną sygnału warunku ograniczonej dziedziny (rys. 3, 5, dodatek C, str. 184). Niestety, nie umożliwia odtworzenia wartości średniokwadratowej na podstawie wartości średniokwadratowej sygnału skwantowanego z dokładnością do poprawki Shepparda.

W celu dokładnego zbadania wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym na względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* wprowadzono następujące współczynniki redukcji obciążenia:

$$P_{dG} = \frac{|\delta|}{|\delta_{dG}|}, \quad (6.36)$$

$$P_{dGM} = \frac{|\delta_M|}{|\delta_{dGM}|}. \quad (6.37)$$

Na podstawie wyników analizy matematycznej można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym i $\sigma_{dG} = 0,5q$, bez względu na liczbę bitów zastosowanego przetwornika, powoduje około 100-krotne zmniejszenie wartości względnego obciążenia (tab. 23, dodatek D, str. 196). Jednak jest także przyczyną powstawania względnej niepewności standardowej typu A, która jednak osiąga wartości mniejsze niż wartość względnego obciążenia. Zwiększając liczbę próbek sygnałów można dodatkowo wpłynąć na zmniejszenie wartości $u_{\xi dG}$.

Kwantowanie sygnału sinusoidalnego wraz z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie normalnym nie gwarantuje odtworzenia, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartości $E[x^2]$ na podstawie wartości $E[x_q^2]$.

6.2.2. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

Sygnałowi losowemu o rozkładzie równomiernym i funkcji gęstości prawdopodobieństwa [63]:

$$p_d(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A_{dR}} & , |x| \leq A_{dR} \\ 0 & , |x| > A_{dR}, \end{cases} \quad (6.38)$$

gdzie $2A_{dR}$ jest wartością międzyszczytową sygnału, odpowiada funkcja charakterystyczna postaci [63, 84]:

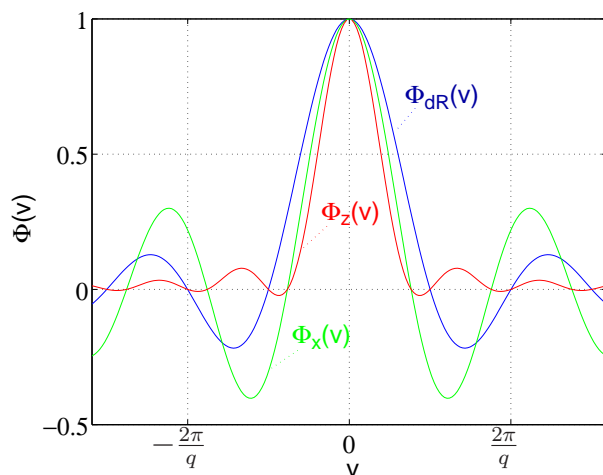
$$\Phi_{dR}(v) = \frac{\sin(A_{dR} \cdot v)}{A_{dR} \cdot v}, \quad (6.39)$$

Dla sygnału sinusoidalnego $x(t)$ występującego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym $x_{dR}(t)$, gdzie $x(t)$ oraz $x_{dR}(t)$ są realizacjami statystycznie niezależnych procesów losowych, postać analityczna funkcji charakterystycznej oraz wyrażenie na jej pochodną przyjmują postaci:

$$\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_{dR}(v) = J_0(A \cdot v) \cdot \frac{\sin(A_{dR} \cdot v)}{A_{dR} \cdot v}, \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_z(v) = & -J_1(A \cdot v) \cdot A \cdot \frac{\sin(A_{dR} \cdot v)}{A_{dR} \cdot v} + \\ & + J_0(A \cdot v) \cdot \left(\frac{\cos(A_{dR} \cdot v)}{v} - \frac{\sin(A_{dR} \cdot v)}{A_{dR} \cdot v^2} \right). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Na (rys. 6.7) widać jak w wyniku dodania sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym o amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_{dR}(v)$ do sygnału sinusoidalnego o amplitudzie $A = 1$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_x(v)$ otrzymujemy sygnał $z(t)$ o funkcji charakterystycznej $\Phi_z(v)$ zanikającej szybciej niż $\Phi_x(v)$, choć nie z tak dobrym skutkiem, jak funkcja charakterystyczna sygnału z *ditherem* o rozkładzie normalnym (rys. 6.5).



Rysunek 6.7. Funkcje charakterystyczne: $\Phi_x(v)$ – sygnału sinusoidalnego, $\Phi_{dR}(v)$ – *dithera* o rozkładzie równomiernym oraz $\Phi_z(v)$ będąca ich iloczynem

Zgodnie z (5.48) wartość średniokwadratowa skwantowanego równomiernie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [59, 60]:

$$E[x_q^2] = \frac{A^2}{2} + \frac{A_{dR}^2}{3} + \frac{q^2}{12} + b, \quad (6.42)$$

gdzie b jest składową obciążenia.

Podstawiając (6.40) oraz (6.41) do (5.49) oraz dzieląc przez wartość średniokwadratową sygnału sinusoidalnego otrzymujemy postać analityczną względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej dla sumy sygnału

sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym w funkcji A/q [41]:

$$\begin{aligned} \delta_{dR}\left(\frac{A}{q}\right) &= \frac{b}{A^2/2} = \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \left[(-1)^i \cdot J_0(\beta) \cdot \sin\left(2\pi i \frac{A_{dR}}{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{A_{dR}}{q}\right)^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{1}{\pi i} - \frac{A_{dR}}{q} \cdot \operatorname{ctg}\left(2\pi i \frac{A_{dR}}{q}\right) + \frac{A}{q} \cdot \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\right) \right], \end{aligned} \quad (6.43)$$

gdzie $\beta = 2\pi i \frac{A}{q}$

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym i zerowej wartości średniej. Eksperyment został przeprowadzony analogicznie jak w (rozdział 6.2.1, str. 68). Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c podano w (tab. 6.7).

Tabela 6.7. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

A [V]	f_s [Hz]	φ	A_{dR}, A_{dR_max} [V]	M	N	B
4, 9	1 000	0	0, 5 <i>q</i> , 1 <i>q</i> ,	$2^{12}, 2^{14}$,	1 000,	6, 8,
			1, 5 <i>q</i> , 2 <i>q</i> ,	$2^{16}, 2^{18}$,	25 000,	10, 12,
			2, 5 <i>q</i> , 3 <i>q</i>	$2^{19}, 2^{20}$	50 000, 100 000, 200 000	14, 16

Zależność na krok kwantowania przetwornika:

$$q = \frac{2A}{2^B - k} \quad (6.44)$$

otrzymano rozwiązując następujący układ równań:

$$\begin{cases} U_{FS} = A + A_{dR_max} \\ q = \frac{2 \cdot U_{FS}}{2^B}, \end{cases} \quad (6.45)$$

gdzie:

- U_{FS} – zakres przetwornika a-c,
- A_{dR_max} – maksymalna wartość amplitudy sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym wyznaczona na podstawie zależności [45, 60]:

$$A_{dR} = k \cdot \frac{q}{2} \quad \text{dla } k \in N \setminus \{0\}. \quad (6.46)$$

W celu zbadania wartości względnego obciążenia wykonano obliczenia w programie Mathcad na podstawie (6.7) i (6.43) oraz przeprowadzono badania symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$\delta_{dR} = \frac{\overline{\tilde{R}_x^d}(0, N) - R_x^d(0)}{A^2/2}, \quad (6.47)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d}(0, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d}(0, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(0, M), \quad (6.48)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(0, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji wartości średniokwadratowej:

$$\tilde{R}_{xi}^d(0, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}^2(j), \quad (6.49)$$

- $R_x^d(0)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

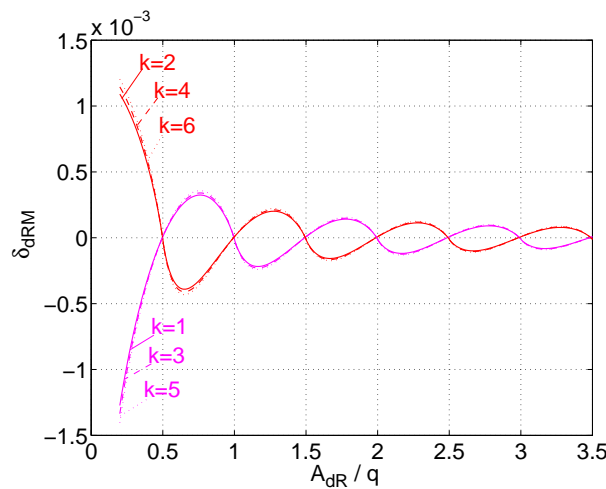
$$R_x^d(0) = \frac{A^2}{2} + \frac{A_{dR}^2}{3} + \frac{q^2}{12}. \quad (6.50)$$

Oceny względnej niepewności standardowej typu A dokonano za pomocą wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$u_{\xi dR} = \frac{2}{A^2} \cdot \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(0, M) - \overline{\tilde{R}_x^d}(0, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.51)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

Na rys. 6.8 przedstawiono wykresy względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym w funkcji A_{dR}/q wykonane na podstawie wzoru (6.43). W zależności od doboru maksymalnej wartości amplitudy A_{dR_max} względne obciążenie przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne.



Rysunek 6.8. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym w funkcji A_{dR}/q

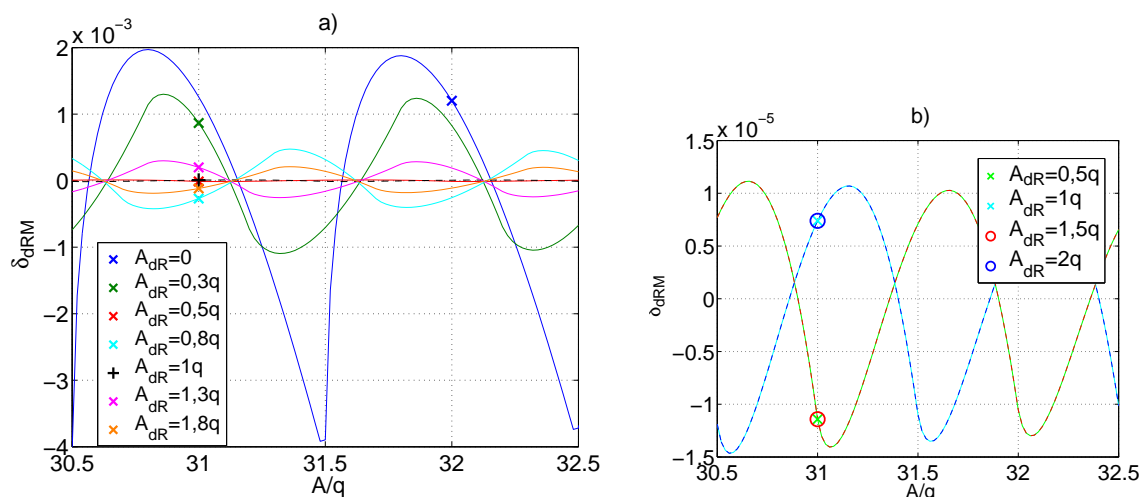
Wykresy (rys. 6.8, 6.9) potwierdzają, że wskazany jest dobór amplitudy sygnału *ditherowego* zgodnie z zależnością (6.46), dla której moduł względnego obciążenia jest najmniejszy. Nasuwa się jednak pytanie, czy dobór amplitudy dla dowolnej wartości $k \in N \setminus \{0\}$ ma wpływ na względną niepewność standardową typu A (6.51)?

W odpowiedzi na to pytanie przeprowadzono badania symulacyjne względnego obciążenia (6.47) oraz względnej niepewności standardowej typu A (6.51) w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy analizowanych sygnałów dla liczby próbek $M = 2^{19}$ oraz liczby powtórzeń eksperymentu $N = 100\,000$. Porównano także wyniki względnego obciążenia uzyskane na drodze symulacji z wynikami analizy matematycznej na podstawie (6.43) potwierdzając ich zbieżność.

Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji w zerze) dla sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym, po uwzględnieniu poprawki Shepparda, w zależności od przyjętej wartości A_{dR_max} przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne (tab. 6.8).

Tabela 6.8. Względne obciążenie $\delta_{dRM}(A_{dR}/q)$ oraz $\delta_{dR}(A_{dR}/q)$, względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dR}(A_{dR}/q)$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym dla $N = 100\,000$

A_{dR_max}	$\delta_{dRM}(0, 5)$	$\delta_{dR}(0, 5)$	$u_{\xi dR}(0, 5)$
$0,5q$	$7,1 \cdot 10^{-6}$	$6,9 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
$1q$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
$1,5q$	$7,7 \cdot 10^{-6}$	$7,7 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$
$2q$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$
$2,5q$	$8,4 \cdot 10^{-6}$	$8,2 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$
$3q$	$-1,3 \cdot 10^{-5}$	$-1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$



Rysunek 6.9. a) b) Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym w funkcji A/q , przetworznik 6-bitowy

W zależności od przyjętej wartości A_{dR_max} względna niepewność standardowa typu A przyjmuje wartości $1,6 \cdot 10^{-7}$ lub $1,7 \cdot 10^{-7}$. Podczas wykonywania dalszych badań przyjęto $A_{dR} = 0,5q$ oraz $A_{dR_max} = 1q$.

W (tab. 6.9) przedstawiono wartości względnego obciążenia (6.7), (6.43) obliczonego w programie Mathcad w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego ($A_{dR} = 0$) oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym o amplitudzie $A_{dR} = 0,495q, 0,5q, 0,505q$ oraz B -bitowych przetworników [41].

Tabela 6.9. Względne obciążenie $\delta_M(A/q)$ oraz $\delta_{dRM}(A_{dR}/q)$ obliczone dla B -bitowych przetworników oraz różnych wartości A_{dR} ($M = 2^{19}$, $N = 100\,000$)

B	$\delta_M(A/q)$ $A_{dR} = 0$	$\delta_{dRM}(A_{dR}/q)$		
		$A_{dR} - 1\%A_{dR}$	$A_{dR} = 0,5q$	$A_{dR} + 1\%A_{dR}$
6	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$-4,9 \cdot 10^{-5}$
8	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-6}$	$-3,4 \cdot 10^{-7}$	$-4,9 \cdot 10^{-6}$
10	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$5,7 \cdot 10^{-7}$	$-1,0 \cdot 10^{-8}$	$-5,8 \cdot 10^{-7}$
12	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$7,2 \cdot 10^{-8}$	$-3,2 \cdot 10^{-10}$	$-7,1 \cdot 10^{-8}$
14	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$9,1 \cdot 10^{-9}$	$-1,0 \cdot 10^{-11}$	$-8,9 \cdot 10^{-9}$
16	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$-3,1 \cdot 10^{-13}$	$-1,1 \cdot 10^{-9}$

Kwantowanie z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie równomiernym znacząco wpływa na wartość względnego obciążenia δ_{dRM} (tab. 6.9, kol. 2 i 4). Dodatkowo dla $B \rightarrow \infty$ δ_M oraz $\delta_{dRM} \rightarrow 0$. Ze względu na kształt przebiegu funkcji $\delta_{dRM}(A_{dR}/q)$ zmiana poziomu sygnału *ditherowego* już o 1% może znacznie wpływać na wartość obciążenia (rys. 6.8, 6.9, tab. 6.9). Podczas rzeczywistych pomiarów odpowiedni dobór amplitudy sygnału *ditherowego* nie będzie zadaniem łatwym.

W (tab. 6.10, 6.11) przedstawiono wyniki δ_{dR} oraz $u_{\xi dR}$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie równomiernym dla $B = 6$ oraz różnej liczby powtórzeń eksperymentu (tab. 6.10) i różnej liczby próbek sygnałów (tab. 6.11).

Zarówno parametr N , jak i M mają wpływ na wartości analizowanych błędów. Poddając analizie wyniki uzyskane dla $M = 2^{16}$ i $N = 50\,000$ można zauważyć, że czterokrotne zwiększenie liczby próbek (do $M = 2^{18}$) przy takiej samej liczbie powtórzeń eksperymentu, jak i czterokrotne zwiększenie liczby powtórzeń (do $N = 200\,000$) przy takiej samej liczbie próbek sygnału powoduje otrzymanie takiej samej wartości $u_{\xi dR} = 3,1 \cdot 10^{-7}$ (tab. 6.10, 6.11). Można więc dla każdego pomiaru ustalić minimalną wartość parametrów N , M , aby uzyskać odpowiednią wartość składowych niepewności. Ponadto błąd $u_{\xi dR}$ jest odwrotnie proporcjonalny do \sqrt{M} oraz \sqrt{N} .

Tabela 6.10. Względne obciążenie δ_{dR} oraz względny błąd standardowy $u_{\xi dR}$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie równomiernym dla $B = 6$, $M = 2^{16}$ oraz różnych wartości N

N	δ_{dR}	$u_{\xi dR}$	δ_{dRM}
1 000	$-1,3 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$
25 000	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$8,9 \cdot 10^{-7}$	
50 000	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$	
100 000	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-7}$	
200 000	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$	

Tabela 6.11. Względne obciążenie δ_{dR} oraz względny błąd standardowy $u_{\xi dR}$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie równomiernym dla $B = 6$, $N = 50\,000$ oraz różnych wartości M

M	δ_{dR}	$u_{\xi dR}$
$2^{12} = 4\,096$	$-1,3 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$
$2^{14} = 16\,384$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
$2^{16} = 65\,536$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$
$2^{18} = 262\,144$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$
$2^{19} = 524\,288$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$
$2^{20} = 1\,048\,576$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$

Na kolejnych wykresach (rys. 6 – 9, dodatek C, str. 185) przedstawiono wyniki symulacji oraz analizy matematycznej względnego obciążenia w po-

miarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego oraz względnego obciążenia i względnej niepewności standardowej typu A sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym dla B -bitowych przetworników, liczby próbek sygnałów $M = 2^{19}$ oraz liczby powtórzeń eksperymentu $N = 100\,000$. Potwierdzają one zbieżność wyników analizy matematycznej i badań symulacyjnych (rys. 6, dodatek C, str. 185).

Kwantowanie z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie równomiernym powoduje zmniejszenie wartości względnego obciążenia (rys. 7, dodatek C, str. 186). Dla przetwornika 10-bitowego δ_{dRM} osiąga mniejsze wartości niż w pomiarze bez udziału sygnału *ditherowego* z zastosowaniem przetwornika 16-bitowego. Jednak należy pamiętać, że sygnał *ditherowy* powoduje pojawienie się względnej niepewności standardowej typu A (rys. 8, 9, dodatek C, str. 186). Dla $B \rightarrow \infty$ δ_{dR} oraz $u_{\xi dR} \rightarrow 0$. Jak już wcześniej zauważono, można wpłynąć na zmniejszenie wartości $u_{\xi dR}$ poprzez zwiększenie parametrów N , M , co jednak znacznie wydłuża czas trwania eksperymentu.

Stosując kwantyzatory o większej rozdzielczości (12, 14 i 16-bitów) należy spodziewać się wystąpienia względnego obciążenia o bardzo małych wartościach rzędu 10^{-11} oraz 10^{-13} , co podczas wykonywania badań symulacyjnych, powoduje większe błędy obliczeń oraz rozbieżność pomiędzy wynikami analizy matematycznej oraz badań symulacyjnych (rys. 9, dodatek C, str. 187). Jednocześnie można zaobserwować, że dla kwantyzatorów o takiej rozdzielczości względna niepewność standardowa typu A osiąga większą wartość niż względne obciążenie.

W celu dokładnego zbadania, jaki wpływ ma sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym na względne obciążenie wynikające z niespełnienia warunków odtwarzalności dla kwantowania wprowadzono następujące współczynniki redukcji obciążenia:

$$P_{dR} = \frac{|\delta|}{|\delta_{dR}|}, \quad (6.52)$$

$$P_{dRM} = \frac{|\delta_M|}{|\delta_{dRM}|}. \quad (6.53)$$

Przedstawione w (tab. 24, dodatek D, str. 197) wartości współczynników P_{dR}

oraz P_{dRM} potwierdzają wzrost poprawy dokładności estymacji wartości średniokwadratowej wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika. Stosując sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym, bez względu na liczbę bitów przetwornika, współczynnik P_{dGM} osiągał wartości około 100. Zdaniem autorki, pomimo, że łączna funkcja charakterystyczna analizowanych sygnałów nie spełnia założeń twierdzenia Widrowa i nie gwarantuje odtworzenia wartości $E[x^2]$ na podstawie $E[x_q^2]$, to dodanie *dithera* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$, w zależności od liczby bitów przetwornika, powoduje zmniejszenie wartości względnego obciążenia o dwa, a nawet o trzy lub cztery rzędy wielkości.

6.2.3. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

Sygnałowi losowemu o rozkładzie trójkątnym i funkcji gęstości prawdopodobieństwa [63, 84]:

$$p_d(x) = \begin{cases} \frac{1}{A_{dT}} \left(1 - \frac{|x|}{A_{dT}}\right) & , |x| \leq A_{dT} \\ 0 & , |x| > A_{dT} \end{cases} \quad (6.54)$$

odpowiada funkcja charakterystyczna postaci [63]:

$$\Phi_{dT}(v) = \frac{2 - 2\cos(A_{dT} \cdot v)}{A_{dT}^2 \cdot v^2}, \quad (6.55)$$

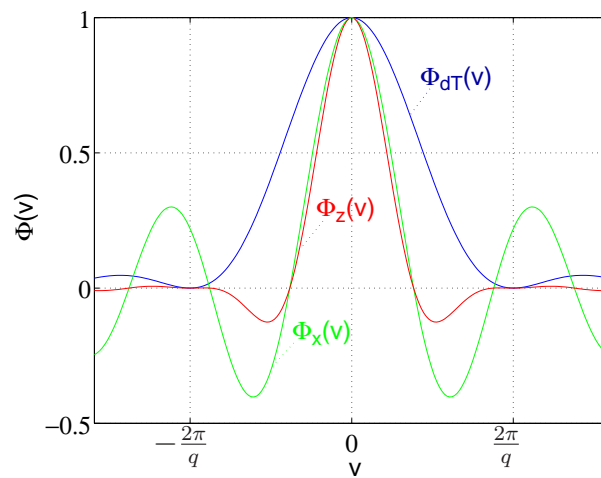
Na (rys. 6.10) widać, jak w wyniku dodania sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym o amplitudzie $A_{dT} = 1q$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_{dT}(v)$ do sygnału sinusoidalnego o amplitudzie $A = 1$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_x(v)$ otrzymujemy sygnał $z(t)$ o funkcji charakterystycznej $\Phi_z(v)$ zanikającej szybciej niż $\Phi_x(v)$, choć nie z tak dobrym skutkiem, jak funkcja charakterystyczna sygnału z *ditherem* o rozkładzie normalnym (rys. 6.5).

Dla sygnału sinusoidalnego $x(t)$ występującego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym $x_{dT}(t)$, gdzie $x(t)$ oraz $x_{dT}(t)$ są realizacjami statystycznie niezależnych procesów losowych, postać analityczna funkcji charakterystycznej przyjmuje postać [63]:

$$\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_{dT}(v) = J_0(A \cdot v) \cdot \frac{2 - 2\cos(A_{dT} \cdot v)}{A_{dT}^2 \cdot v^2}. \quad (6.56)$$

Pochodna funkcji charakterystycznej $\Phi_z(v)$ wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_z(v) = & -A \cdot J_1(A \cdot v) \cdot \frac{2 - 2\cos(A_{dT} \cdot v)}{A_{dT} \cdot v} + \\ & + 2 \cdot J_0(A \cdot v) \cdot \frac{\sin(A_{dT} \cdot v)}{v} - J_0(A \cdot v) \cdot \frac{2 - 2\cos(A_{dT} \cdot v)}{A_{dT} \cdot v^2}. \end{aligned} \quad (6.57)$$



Rysunek 6.10. Funkcje charakterystyczne: $\Phi_x(v)$ – sygnału sinusoidalnego, $\Phi_{dT}(v)$ – *dithera* o rozkładzie trójkątnym oraz $\Phi_z(v)$ będąca ich iloczynem

Zgodnie z (5.48) wartość średniokwadratowa skwantowanego równomier-
nie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [59, 60]:

$$E[x_q^2] = \frac{A^2}{2} + \frac{A_{dT}^2}{6} + \frac{q^2}{12} + b, \quad (6.58)$$

gdzie b jest składową obciążenia.

Podstawiając (6.56) oraz (6.57) do (5.49) oraz dzieląc przez wartość średnio-
kwadratową sygnału sinusoidalnego otrzymujemy postać analityczną wzglę-
dnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej dla sumy sygnału

sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym w funkcji A/q [63]:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{A}{q}\right) &= \frac{b}{A^2/2} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(\frac{1}{\pi i}\right)^3 \cdot \left(\frac{A_{dT}}{q}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \cdot J_0(\beta) \cdot \\ &\cdot \left[\frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)} - \frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)} \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \cdot \frac{A_{dT}}{q} + \right. \\ &\left. + \frac{3}{2} \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\pi i} - \frac{3}{2} \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\pi i} \cdot \cos(\alpha) \right], \end{aligned} \quad (6.59)$$

gdzie: $\alpha = 2\pi i \frac{A_{dT}}{q}$, $\beta = 2\pi i \frac{A}{q}$.

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego występującego w obecności sygnału *dithero-*
wego o rozkładzie trójkątnym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c podano w (tab. 6.12).

Tabela 6.12. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

A [V]	f_s [Hz]	φ	A_{dT} [V]	A_{dT_max} [V]	M	N	B
4,9	1 000	0	0,5 q ,	1 q	2 ¹⁹	100 000	6, 8, 10, 12, 14, 16

Zależność na krok kwantowania przetwornika:

$$q = \frac{2A}{2^B - 2} \quad (6.60)$$

otrzymano rozwiązując następujący układ równań:

$$\begin{cases} U_{FS} = A + A_{dT_max} \\ q = \frac{2 \cdot U_{FS}}{2^B} \\ A_{dT_max} = k \cdot q \quad \text{dla } k = 1, \end{cases} \quad (6.61)$$

gdzie U_{FS} jest zakresem przetwornika a-c.

W celu zbadania wartości względnego obciążenia wykonano obliczenia w programie Mathcad na podstawie (6.7) i (6.59) oraz przeprowadzono badania symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$\delta_{dT} = \frac{\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} - R_x^d(0)}{A^2/2}, \quad (6.62)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)}$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(0, M), \quad (6.63)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(0, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji wartości średniokwadratowej:

$$\tilde{R}_{xi}^d(0, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}^2(j), \quad (6.64)$$

- $R_x^d(0)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(0) = \frac{A^2}{2} + \frac{A_{dT}^2}{6} + \frac{q^2}{12}. \quad (6.65)$$

Oceny względnej niepewności standardowej typu A dokonano za pomocą wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

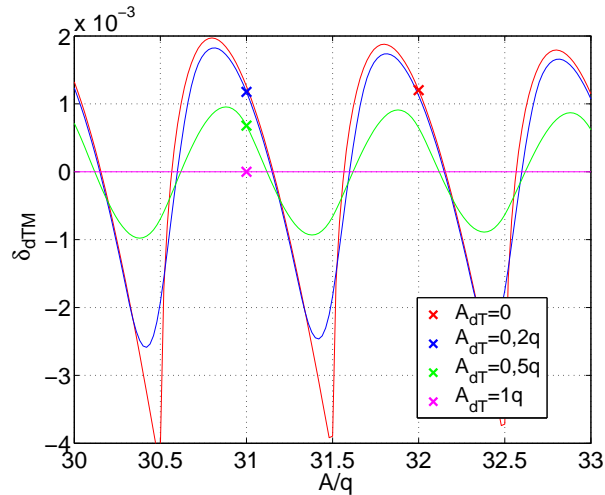
$$u_{\xi dT} = \frac{2}{A^2} \cdot \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(0, M) - \overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.66)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

Na (rys. 6.11) przedstawiono zależność δ_{dT} w funkcji A/q dla $A_{dT} = 0, 0, 2q, 0, 5q$ oraz $1q$. Jak wynika z wykresów, względne obciążenie dla sygnału z *ditherem* maleje szybciej niż dla sygnału bez *dithera*.

Pomimo, że nie jest możliwe dobranie takiej wartości kroku kwantowania, dla którego zarówno funkcja charakterystyczna sygnału sinusoidalnego $\Phi_x(v)$ jak i jej pochodna $\dot{\Phi}_x(v)$ przyjmą wartość równą zero, to w przypadku sumy sygnału sinusoidalnego oraz *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym zarówno $\Phi_z(v)$ oraz $\dot{\Phi}_z(v)$ przyjmują wartość równą zero dla $A_{dT} = k \cdot q$ ($k \in N \setminus \{0\}$).

Dlatego wartość względnego obciążenia δ_{dTM} dla $A_{dT} = k \cdot q$ także przyjmuje wartość równą zero.



Rysunek 6.11. δ_{dTM} w funkcji A/q dla $A_{dT} = 0, 0, 2q, 0, 5q$ oraz $1q$, wyniki pomiarów dla $B = 6$

W poprzednich rozdziałach wykazano, że wzrost poziomu sygnałów *ditherowych* o rozkładach: normalnym i równomiernym miał wpływ na wzrost względnej niepewności standardowej typu A wynikającej z operacji kwantowania.

Rozważmy więc wpływ sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym na względną niepewność standardową typu A. Zawarte w (tab. 6.13) oraz przedstawione w formie graficznej (rys. 10, dodatek C, str. 187) wyniki eksperymentu potwierdzają, że odpowiednim poziomem sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym jest wartość $1q$, dla której względne obciążenie $\delta_{dTM} = 0$, podczas gdy względna niepewność standardowa typu A osiąga wartości tego samego rzędu, co dla $A_{dT} = 0, 5q$.

W (tab. 25, dodatek D, str. 198) przedstawiono w formie tabelarycznej oraz na (rys. 11, 12, dodatek C, str. 188) w formie graficznej wyniki symulacji oraz analizy matematycznej względnego obciążenia w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego oraz względnego obciążenia i względnej niepewności standardowej typu A sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym o amplitudzie równej q dla B -bitowych przetworni-

ków, liczby próbek sygnałów $N = 2^{19}$ oraz liczby powtórzeń eksperymentu $M = 100\,000$.

Wprowadzony współczynnik redukcji obciążenia P_{dT} umożliwia zbadanie wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym na względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej:

$$P_{dT} = \frac{|\delta|}{|\delta_{dT}|}. \quad (6.67)$$

Poddając analizie wartości względnego obciążenia δ_{dT} (rzędu 10^{-9} i mniejsze) oraz współczynnika P_{dT} ($2,6 \cdot 10^3 \div 1,4 \cdot 10^5$) można stwierdzić, że dodanie sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym (o odpowiednio dobranej wartości w stosunku do kroku kwantowania) do sygnału sinusoidalnego, zapewnia odtwarzalność wartości średniokwadratowej na podstawie sygnału skwantowanego z dokładnością do poprawki Shepparda $q^2/12$ (tab. 25, dodatek D, str. 198).

Tabela 6.13. Względne obciążenie $\delta_{dT}(A_{dT}/q)$ oraz względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dT}(A_{dT}/q)$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym, $M = 2^{19} = 524\,288$, $N = 100\,000$

B	$\delta_{dT}(0,5)$	$\delta_{dT M}(0,5)$	$u_{\xi dT}(0,5)$	$\delta_{dT}(1)$	$u_{\xi dT}(1)$
6	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$8,7 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^{-7}$
8	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$8,3 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$	$4,9 \cdot 10^{-8}$
10	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$8,2 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$
12	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-9}$	$3,2 \cdot 10^{-10}$	$3,0 \cdot 10^{-9}$
14	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^{-10}$	$-8,8 \cdot 10^{-11}$	$7,5 \cdot 10^{-10}$
16	$1,9 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$-2,8 \cdot 10^{-11}$	$1,9 \cdot 10^{-10}$

6.2.4. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z gaussowskim *ditherem*

Sygnałowi o rozkładzie normalnym, zerowej wartości średniej i funkcji gęstości prawdopodobieństwa (6.38, str. 73) odpowiada funkcja charakterystyczna postaci (6.39, str. 73) [24, 37, 63]. Dla sygnału trójkątnego $x(t)$ występującego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym $x_{dG}(t)$, gdzie

$x(t)$ oraz $x_{dG}(t)$ są realizacjami statystycznie niezależnych procesów losowych, postać analityczna funkcji charakterystycznej oraz wyrażenie na jej pochodną przyjmują postaci [63]:

$$\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_{dG}(v) = \frac{\sin(A \cdot v)}{A \cdot v} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_{dG}^2\right), \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_z(v) &= \frac{\cos(A \cdot v)}{v} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_{dG}^2\right) - \sigma_{dG}^2 \cdot \sin(A \cdot v) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{A} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_{dG}^2\right) - \sin(A \cdot v) \frac{1}{A \cdot v^2} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\sigma_{dG}^2\right). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Zgodnie z (5.48) wartość średniokwadratowa skwantowanego równomier-
nie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [59, 60]:

$$E[x_q^2] = \frac{A^2}{3} + \sigma_d^2 + \frac{q^2}{12} + b, \quad (6.70)$$

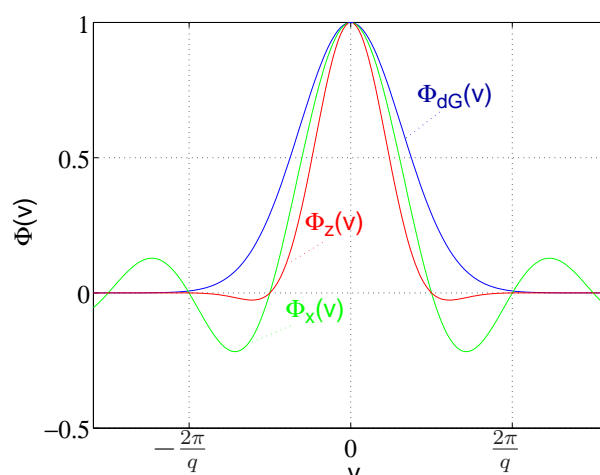
gdzie b jest składową obciążenia.

Podstawiając (6.68) oraz (6.69) do (5.49) oraz dzieląc przez wartość średnio-
kwadratową sygnału trójkątnego można wyznaczyć postać analityczną wzglę-
dnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej dla sumy sygnału
trójkątnego i *dithera* o rozkładzie normalnym w funkcji σ_{dG}/q :

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\sigma_{dG}}{q}\right) &= \frac{b}{A^2/3} = \\ &= 3 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{\pi i} \left(\frac{A}{q}\right)^{-3} \cdot \sin(\beta) \exp\left[-2\left(\pi i \frac{\sigma_{dG}}{q}\right)^2\right] \cdot \\ &\cdot \left[2\left(\frac{\sigma_{dG}}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi i}\right)^2 - \frac{1}{\pi i} \frac{A}{q} \operatorname{ctg}(\beta)\right], \end{aligned} \quad (6.71)$$

gdzie $\beta = 2\pi i \frac{A}{q}$.

Warunkiem dostatecznym odtwarzalności kwantowania wg teorii Widro-
wa jest założenie o ograniczonej dziedzinie funkcji charakterystycznej. W wy-
niku dodania sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym o dyspersji
 $\sigma_{dG} = 0,5q$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_{dG}(v)$ do sygnału trójkątnego o am-
plitudzie $A = 1$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_x(v)$ otrzymujemy sygnał $z(t)$
o funkcji charakterystycznej $\Phi_z(v)$ zanikającej szybciej niż $\Phi_x(v)$ (rys. 6.12).



Rysunek 6.12. Funkcje charakterystyczne: $\Phi_x(v)$ – sygnału trójkątnego, $\Phi_{dG}(v)$ – *dithera* o rozkładzie normalnym oraz $\Phi_z(v)$ będąca ich iloczynem

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). Poziom sygnału *ditherowego* oraz zależność na krok kwantowania przetwornika wyznaczono w (rozdział 6.2.1, str. 69):

$$q = \frac{2A}{2^B - 6} \quad (6.72)$$

Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w poniższej tabeli.

Tabela 6.14. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji wartości średniokwadratowej sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym

$A[V]$	$f_s[\text{Hz}]$	φ	σ_{dG}	$\sigma_{dG_{max}}$	M	N	B
4,7	1 000	0	$0,5q$	$1q$	10^6	100 000	6, 8, 10, 12, 14, 16

W celu zbadania wartości względnego obciążenia wykonano obliczenia w programie Mathcad na podstawie (6.14) i (6.71) oraz przeprowadzono bada-

nia symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$\delta_{dG} = \frac{\overline{\widetilde{R}_x^d}(0, N) - R_x^d(0)}{A^2/3}, \quad (6.73)$$

gdzie:

- $\overline{\widetilde{R}_x^d}(0, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\widetilde{R}_x^d}(0, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widetilde{R}_{xi}^d(0, M), \quad (6.74)$$

gdzie $\widetilde{R}_{xi}^d(0, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji wartości średniokwadratowej:

$$\widetilde{R}_{xi}^d(0, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}^2(j), \quad (6.75)$$

- $R_x^d(0)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(0) = \frac{A^2}{3} + \sigma_{dG}^2 + \frac{q^2}{12}. \quad (6.76)$$

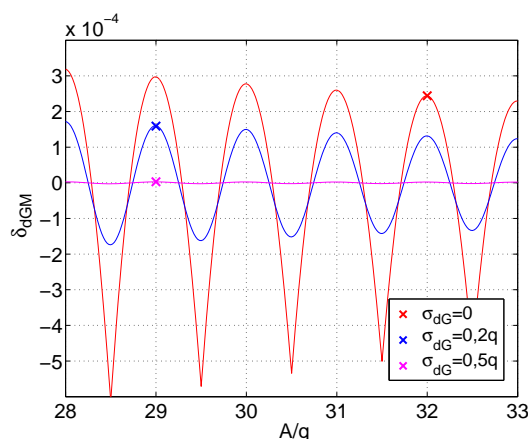
Wartość względnego błędu standardowego obliczono na podstawie:

$$u_{\xi dG} = \frac{3}{A^2} \cdot \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\widetilde{R}_{xi}^d(0, M) - \overline{\widetilde{R}_x^d}(0, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.77)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

Na (rys. 6.13) przedstawiono zależność δ_{dGM} w funkcji A/q dla $\sigma_{dG} = 0, 0, 2q$ oraz $0, 5q$. Jak wynika z wykresów względne obciążenie dla sygnału z *ditherem* osiąga mniejsze wartości niż dla sygnału bez *dithera*, a poziom obciążenia zmniejsza się wraz ze wzrostem wartości skutecznej σ_{dG} sygnału *dithero*wego.

Na (rys. 13 – 15, dodatek C, str. 189) przedstawiono w formie graficznej wyniki symulacji oraz analizy matematycznej względnego obciążenia w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego oraz względnego obciążenia i względnej niepewności standardowej typu A sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie normalnym dla wartości parametrów sygnału oraz przetwarzania a-c zawartych w (tab. 6.14).



Rysunek 6.13. δ_{dGM} w funkcji A/q dla $\sigma_{dG} = 0, 0,2q$ oraz $0,5q$, wyniki pomiarów dla $B = 6$

W celu zbadania wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym na względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego, podobnie jak w poprzednich rozdziałach, wprowadzono następujące współczynniki redukcji obciążenia (tab. 26, dodatek D, str. 199):

$$P_{dG} = \frac{|\delta|}{|\delta_{dG}|}, \quad (6.78)$$

$$P_{dGM} = \frac{|\delta_M|}{|\delta_{dGM}|}. \quad (6.79)$$

Poddając analizie uzyskane wyniki można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym wpływa na poprawę dokładności operacji kwantowania. Bez względu na rozdzielczość kwantyzatora dla $\sigma_{dG} = 0,5q$ wartość δ_{dGM} jest około 100-krotnie mniejsza od δ_M . Niestety, dodanie przed operacją kwantowania sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym do sygnału trójkątnego nie umożliwia odtworzenia, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartości średniokwadratowej sygnału na podstawie wartości średniokwadratowej sygnału skwantowanego. Dodatkowo kwantowanie z sygnałem *ditherowym* jest przyczyną powstawania względnej niepewności standardowej typu A, która dla przyjętych parametrów N, M , dla przetworników o rozdzielczości 10-bitów i większych przewyższa wartość względnego obciążenia. Zwiększając liczbę próbek sygnałów oraz liczbę powtórzeń eksperymentu można dodatkowo wpłynąć na zmniejszenie wartości $u_{\xi dG}$.

6.2.5. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z ditherem o rozkładzie równomiernym

Sygnałowi o rozkładzie równomiernym, zerowej wartości średniej i funkcji gęstości prawdopodobieństwa (6.38, str. 73) odpowiada funkcja charakterystyczna postaci (6.39, str. 73) [63, 84]. Dla sumy sygnału trójkątnego $x(t)$ i sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym $x_{dR}(t)$, gdzie $x(t)$ oraz $x_{dR}(t)$ są realizacjami statystycznie niezależnych procesów losowych, postać analityczna funkcji charakterystycznej oraz wyrażenie na jej pochodną przyjmują postaci:

$$\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_{dR}(v) = \frac{\sin(A \cdot v) \cdot \sin(A_{dR} \cdot v)}{A_{dR} \cdot Av^2}, \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_z(v) = \cos(A \cdot v) \cdot \frac{\sin(A_{dR} \cdot v)}{A_{dR} \cdot v^2} + \sin(A \cdot v) \cdot \\ \cdot \frac{\cos(A_{dR} \cdot v)}{A \cdot v^2} - 2\sin(A \cdot v) \cdot \frac{\sin(A_{dR} \cdot v)}{A_{dR} \cdot A \cdot v^3}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Zgodnie z (5.48) wartość średniokwadratowa skwantowanego równomiernie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [59, 60]:

$$E[x_q^2] = \frac{A^2}{3} + \frac{A_{dR}^2}{3} + \frac{q^2}{12} + b, \quad (6.82)$$

gdzie b jest składową obciążenia.

Podstawiając (6.80) oraz (6.81) do (5.49) oraz dzieląc przez wartość średniokwadratową sygnału trójkątnego otrzymujemy postać analityczną względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej dla sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym w funkcji A_{dR}/q [41]:

$$\begin{aligned} \delta_{dR}\left(\frac{A_{dR}}{q}\right) &= \frac{b}{A^2/3} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \alpha^{-3} \left(\frac{A_{dR}}{q}\right)^{-1} \sin(2\alpha) \sin(\beta) \cdot \\ &\cdot \left[\frac{3}{2} \frac{1}{\pi i} - \frac{A}{q} \operatorname{ctg}(2\alpha) - \frac{A_{dR}}{q} \operatorname{ctg}(\beta) \right], \end{aligned} \quad (6.83)$$

gdzie $\alpha = \pi i \frac{A}{q}$, $\beta = 2\pi i \frac{A_{dR}}{q}$.

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). Poziom sygnału *ditherowego* oraz zależność na krok kwantowania przetwornika wyznaczono w (rozdział 6.2.2, str. 75):

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.84)$$

Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w poniższej tabeli.

Tabela 6.15. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji wartości średniokwadratowej sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

$A[\text{V}]$	$f_s[\text{Hz}]$	φ	$A_{dR}[\text{V}]$	$A_{dR_max}[\text{V}]$	M	N	B
4,9	1 000	0	$0,5q$	$1q$	10^6	100 000	6, 8, 10, 12, 14, 16

W celu zbadania wartości względnego obciążenia wykonano obliczenia w programie Mathcad na podstawie (6.14) i (6.83) oraz przeprowadzono badania symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$\delta_{dR} = \frac{\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} - R_x^d(0)}{A^2/3}, \quad (6.85)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)}$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(0, M), \quad (6.86)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(0, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji wartości średniokwadratowej:

$$\tilde{R}_{xi}^d(0, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}^2(j), \quad (6.87)$$

- $R_x^d(0)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

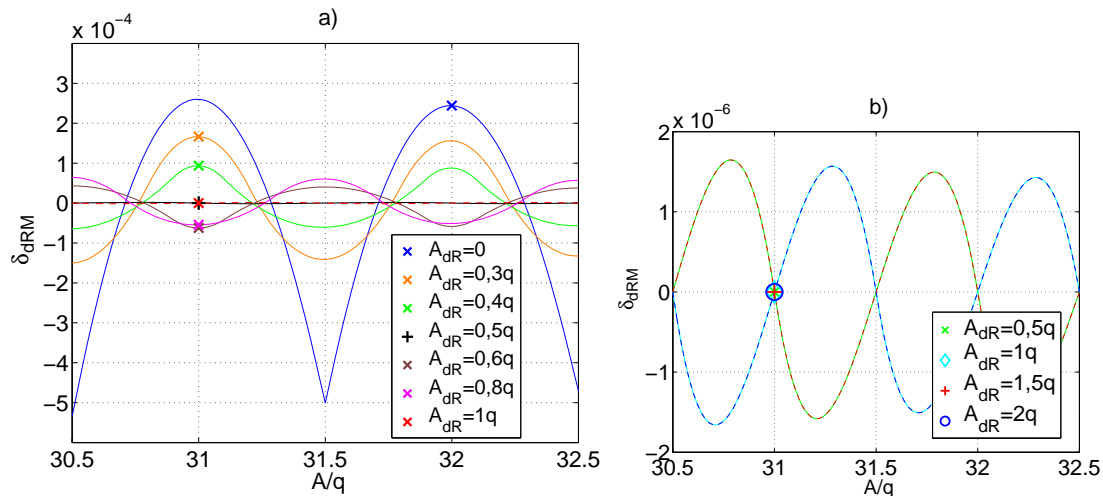
$$R_x^d(0) = \frac{A^2}{3} + \frac{A_{dR}^2}{3} + \frac{q^2}{12}. \quad (6.88)$$

Oceny względnej niepewności standardowej typu A dokonano za pomocą wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$u_{\xi_{dR}} = \frac{3}{A^2} \cdot \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(0, M) - \overline{\tilde{R}_x^d}(0, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.89)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

Na (rys. 6.14) przedstawiono zależność δ_{dRM} w funkcji A/q dla różnych wartości amplitudy sygnału *ditherowego*.



Rysunek 6.14. a) b) Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym w funkcji A/q , $B = 6$

Jak wynika z wykresów, względne obciążenie dla sygnału z *ditherem* o rozkładzie równomiernym osiąga mniejsze wartości niż dla sygnału bez *dithera*.

Zbadano, że zarówno funkcja charakterystyczna sygnału trójkątnego $\Phi_x(v)$, jak i *dithera* o rozkładzie równomiernym $\Phi_{dR}(v)$ posiadają miejsca zerowe w punktach $A = A_{dR} = k \cdot \frac{q}{2}$ dla $k \in N \setminus \{0\}$. Zatem, rozpatrując funkcje charakterystyczną $\Phi_z(v)$ będącą ich iloczynem uzyskano następujące wyniki:

- $\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_{dR}(v) = 0$ dla $A = A_{dR} = k \cdot \frac{q}{2}$,
- $\dot{\Phi}_z(v) = 0$ dla $A = A_{dR} = k \cdot \frac{q}{2}$.

Można zatem stwierdzić, że możliwy jest taki dobór kroku kwantowania, aby możliwe było, z dokładnością do poprawki Shepparda, odtworzenie warto-

ści średniokwadratowej sygnału na podstawie wartości średniokwadratowej sygnału skwantowanego.

Na (rys. 16 – 18, dodatek C, str. 190) przedstawiono wyniki symulacji oraz analizy matematycznej względnego obciążenia w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego oraz względnego obciążenia i względnej niepewności standardowej typu A sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym. Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zostały przedstawione w (tab. 6.15). Analogicznie, jak w poprzednich rozdziałach, w (tab. 27, dodatek D, str. 200) podano wartości współczynnika redukcji obciążenia:

$$P_{dR} = \frac{|\delta|}{|\delta_{dR}|} \quad (6.90)$$

w celu zbadania wpływu sygnału *ditherowego* na względne obciążenie estymatora.

Uzyskane wyniki potwierdzają korzystny wpływ sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym na wartość względnego obciążenia wynikającego z niespełnienia warunków odtwarzalności dla kwantowania. Dla 6-bitowych przetworników sygnał *ditherowy* o amplitudzie równej $0,5q$ powoduje zmniejszenie jego wartości o trzy rzędy wielkości, natomiast dla 8 i 10-bitowych przetworników o dwa rzędy wielkości.

Ze względu na bardzo małe wartości względnego obciążenia (rzędu 10^{-9} i mniejszych) wykonywanie badań symulacyjnych powoduje większe błędy obliczeń oraz rozbieżność pomiędzy wynikami analizy matematycznej i badań symulacyjnych. Z powodu zerowej wartości względnego obciążenia uzyskanego na drodze analizy matematycznej δ_{dRM} nie można wyznaczyć wartości procentowej różnicy pomiędzy wynikami δ_{dRM} , a wynikami badań symulacyjnych δ_{dR} . Dodatkowo, przeprowadzając badania symulacyjne mamy do czynienia z sygnałami pseudolosowymi. Uzyskanie więc wartości zerowej, tak jak ma to miejsce w przypadku analizy matematycznej modelu, jest niemożliwe.

Podsumowując, można stwierdzić, że stosując małobitowe przetworniki, dla których wartość względnego obciążenia sygnału trójkątnego jest większa niż $1 \cdot 10^{-7}$, zastosowanie sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomier-

nym ma swoje uzasadnienie. Powoduje znaczną poprawę dokładności operacji kwantowania, a względna niepewność standardowa typu A osiąga wartości rzędu 10^{-7} oraz 10^{-10} (rys. 17, 18, dodatek C, str. 191).

6.2.6. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z ditherem o rozkładzie trójkątnym

Sygnałowi o rozkładzie trójkątnym, zerowej wartości średniej i funkcji gęstości prawdopodobieństwa (6.54, str. 82) odpowiada funkcja charakterystyczna postaci (6.55, str. 82) [63, 84].

W wyniku dodania sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym o amplitudzie $A_{dT} = 1q$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_{dT}(v)$ do sygnału trójkątnego o amplitudzie $A = 1$ i funkcji charakterystycznej $\Phi_x(v)$ otrzymujemy sygnał $z(t)$ o funkcji charakterystycznej $\Phi_z(v)$ zanikającej szybciej niż $\Phi_x(v)$ (rys. 6.15).

Dla sygnału trójkątnego $x(t)$ występującego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym $x_{dT}(t)$, gdzie $x(t)$ oraz $x_{dT}(t)$ są realizacjami statystycznie niezależnych procesów losowych, postać analityczna funkcji charakterystycznej jest następująca [63]:

$$\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_{dT}(v) = \frac{\sin(A \cdot v)}{A \cdot v} \cdot \frac{2 - 2\cos(A_{dT} \cdot v)}{A_{dT}^2 \cdot v^2}. \quad (6.91)$$

Pochodna funkcji charakterystycznej $\Phi_z(v)$ wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_z(v) = & \frac{\cos(A \cdot v) \cdot (2 - 2\cos(A_{dT} \cdot v))}{A_{dT}^2 \cdot v^3} - \frac{3\sin(A \cdot v) \cdot (2 - 2\cos(A \cdot v))}{A \cdot A_{dT}^2 \cdot v^4} + \\ & + 2\sin(A \cdot v) \cdot \frac{\sin(A_{dT}v)}{A \cdot A_{dT} \cdot v^3}. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Zgodnie z (5.48) wartość średniokwadratowa skwantowanego równomiernie sygnału $x_q(t)$ przyjmuje postać [59, 60]:

$$E[x_q^2] = \frac{A^2}{3} + \frac{A_{dT}^2}{6} + \frac{q^2}{12} + b, \quad (6.93)$$

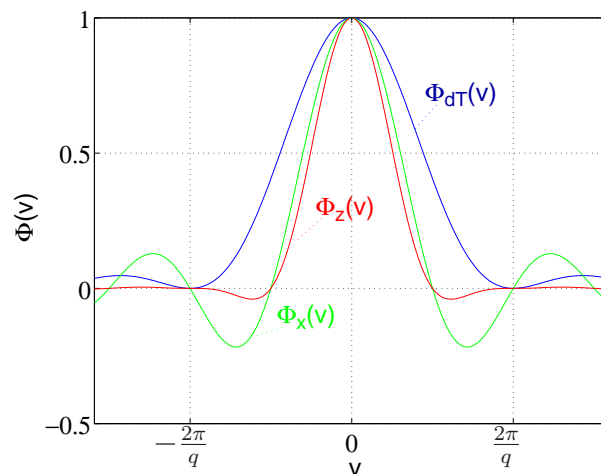
gdzie b jest składową obciążenia.

Podstawiając (6.91) oraz (6.92) do (5.49) oraz dzieląc przez wartość średniokwadratową sygnału trójkątnego otrzymujemy postać analityczną względne-

go obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej dla sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym w funkcji A/q [63]:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{A}{q}\right) &= \frac{b}{A^2/3} = \\ &= 3 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(\frac{1}{\pi i}\right)^4 \left(\frac{A}{q}\right)^{-2} \left(\frac{A_{dT}}{q}\right)^{-2} \sin(\alpha) \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{2} \operatorname{ctg}(\alpha) \cdot (\cos(\beta) - 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \cdot \frac{A_{dT}}{q} \cdot \sin(\beta) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{A}{q}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\pi i} (1 - \cos(\beta)) \right], \end{aligned} \quad (6.94)$$

gdzie $\alpha = 2\pi i \frac{A}{q}$, $\beta = 2\pi i \frac{A_{dT}}{q}$.



Rysunek 6.15. Funkcje charakterystyczne: $\Phi_x(v)$ – sygnału trójkątnego, $\Phi_{dT}(v)$ – *dithera* o rozkładzie trójkątnym oraz $\Phi_z(v)$ będąca ich iloczynem

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). Poziom sygnału *ditherowego* oraz zależność na krok kwantowania przetwornika wyznaczono w (rozdział 6.2.3, str. 84):

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.95)$$

Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w poniższej tabeli.

Tabela 6.16. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji wartości średniokwadratowej sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

$A[\text{V}]$	$f_s[\text{Hz}]$	φ	$A_{dT}, A_{dT_max}[\text{V}]$	M	N	B
4,9	1 000	0	$1q$	10^6	100 000	6, 8, 10, 12, 14, 16

W celu zbadania wartości względnego obciążenia wykonano obliczenia w programie Mathcad na podstawie (6.14) i (6.94) oraz przeprowadzono badania symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$\delta_{dT} = \frac{\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} - R_x^d(0)}{A^2/3}, \quad (6.96)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)}$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji wartości średniokwadratowej (funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(0, M), \quad (6.97)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(0, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji wartości średniokwadratowej:

$$\tilde{R}_{xi}^d(0, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}^2(j), \quad (6.98)$$

- $R_x^d(0)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

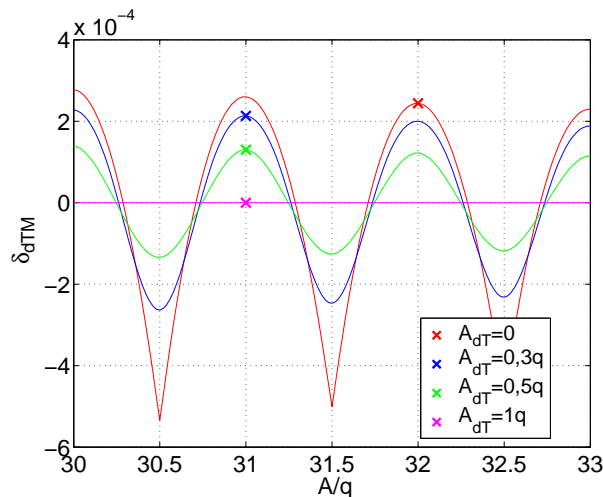
$$R_x^d(0) = \frac{A^2}{3} + \frac{A_{dT}^2}{6} + \frac{q^2}{12}. \quad (6.99)$$

Oceny względnej niepewności standardowej typu A dokonano za pomocą wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$u_{\xi_{dT}} = \frac{3}{A^2} \cdot \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(0, M) - \overline{\tilde{R}_x^d(0, N)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.100)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

Na (rys. 6.16) przedstawiono zależność δ_{dT_M} w funkcji A/q dla $A_{dT} = 0, 0, 2q, 0, 5q$ oraz $1q$.



Rysunek 6.16. δ_{dT_M} w funkcji A/q dla $A_{dT} = 0, 0, 3q, 0, 5q$ oraz $1q$, wyniki pomiarów dla $B = 6$

Jak wynika z wykresów, względne obciążenie dla sygnału z *ditherem* osiąga mniejsze wartości niż dla sygnału bez *dithera*. Na podstawie analizy matematycznej stwierdzono, że funkcja charakterystyczna sygnału trójkątnego $\Phi_x(v)$ posiada miejsca zerowe w punktach $A = k \cdot \frac{q}{2}$ dla $k \in N \setminus \{0\}$. Natomiast funkcja charakterystyczna sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym $\Phi_{dT}(v)$ posiada miejsca zerowe w punktach $A_{dT} = k \cdot q$. Zatem, rozpatrując funkcję charakterystyczną $\Phi_z(v)$ będącą ich iloczynem uzyskano następujące wyniki:

- $\Phi_z(v) = \Phi_x(v) \cdot \Phi_{dT}(v) = 0$ dla $A = A_{dR} = k \cdot \frac{q}{2}$,
- $\dot{\Phi}_z(v) = 0$ dla $A = A_{dR} = k \cdot q$.

Wartość względnego obciążenia $\delta_{dT_M} = 0$ dla $A = A_{dT} = k \cdot q$. Można więc stwierdzić, że dla sumy analizowanych sygnałów możliwy jest odpowiedni dobór wartości kroku kwantowania, dla którego można odtworzyć, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartość $E[x^2]$ na podstawie $E[x_q^2]$.

Na (rys. 19–21, dodatek C, str. 192) przedstawiono w formie graficznej wyniki symulacji oraz analizy matematycznej względnego obciążenia w pomia-

rze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego oraz względnego obciążenia i względnej niepewności standardowej typu A sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym. Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zostały przedstawione w (tab. 6.16). Wyniki w formie tabelarycznej przedstawiono w (tab. 28, dodatek C, str. 201), gdzie tak jak w poprzednich rozdziałach, wprowadzono współczynnik redukcji obciążenia umożliwiający ocenę wpływu sygnału *ditherowego* na względne obciążenie:

$$P_{dT} = \frac{|\delta|}{|\delta_{dT}|}. \quad (6.101)$$

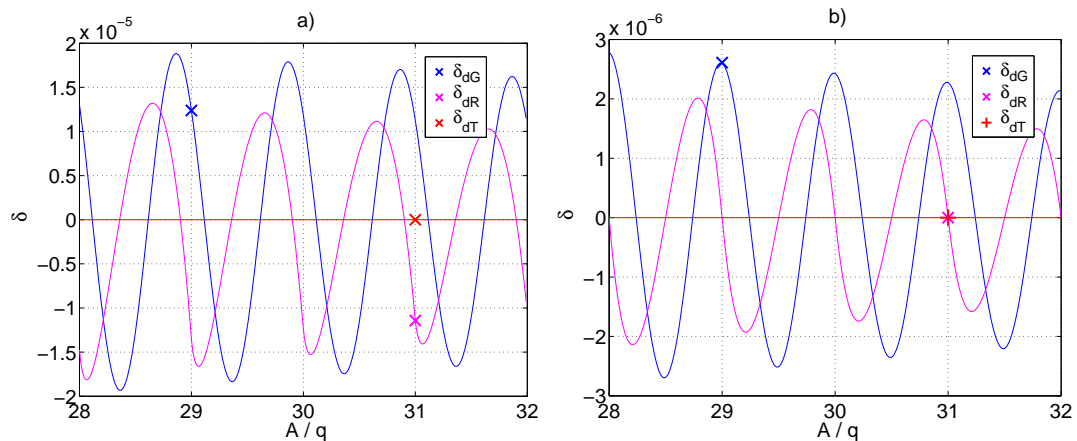
Poddając analizie uzyskane wyniki można zauważyć, że w przypadku przetworników 6 ÷ 10-bitowych uzyskuje się poprawę dokładności kwantowania zmniejszając względne obciążenie o dwa lub dla $B = 6$ nawet o trzy rzędy wielkości. Tak, jak w przypadku zastosowania *dithera* o rozkładzie równomiernym, wartość względnego obciążenia uzyskanego w wyniku symulacji jest różna od zera, pomimo zerowej wartości uzyskanej w wyniku analizy matematycznej. Na podstawie analizy wartości δ_{dT} , $\delta_{dT M}$ oraz współczynnika P_{dT} ($1,1 \cdot 10^2 \div 1,4 \cdot 10^3$) można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym skutecznie eliminuje wpływ błędu wynikającego z operacji kwantowania. Względna niepewność standardowa typu A dla liczby powtórzeń eksperymentu $N = 100\,000$ osiąga wartości $1,8 \cdot 10^{-7}$ i mniejsze.

6.2.7. Dokładność estymacji wartości średniokwadratowej sygnału okresowego z sygnałem *ditherowym* – porównanie wyników

Przy przyjętych założeniach dotyczących amplitudy sygnału sinusoidalnego nie jest możliwe w sposób analityczny znalezienie takiej wartości amplitudy, dla której $\Phi_x(v) = 0$ oraz $\dot{\Phi}_x(v) = 0$. Podobnie w przypadku założeń dotyczących amplitudy sygnału trójkątnego nie jest możliwe znalezienie takiej wartości amplitudy, dla której $\dot{\Phi}_x(v) = 0$. Oznacza to, że nie jest możliwe odtworzenie (z dokładnością do poprawki Shepparda) ich wartości średniokwadratowej na podstawie wartości średniokwadratowej sygnału skwantowanego. Odpowiedni dobór parametrów sygnału *ditherowego* kwantowanego wraz

z sygnałem badanym daje taką możliwość (rys. 6.17), a przynajmniej zapewnia poprawę dokładności operacji kwantowania (rys. 6.18).

Przeprowadzone badania wykazały, że spośród analizowanych sygnałów *ditherowych*, w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego najlepsze rezultaty uzyskano kwantując sygnał badany z sygnałem o rozkładzie trójkątnym, dla którego $\delta_{dT} = 0$ dla $A_{dT} = k \cdot q$ ($k \in N \setminus \{0\}$) (rys. 6.17 a)). W przypadku pomiaru sygnału trójkątnego odtworzenie, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartości $E[x^2]$ na podstawie wartości $E[x_q^2]$ umożliwia zarówno kwantowanie z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie $A_{dT} = 1q$ jak i równomiernym o amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ (rys. 6.17 b)).

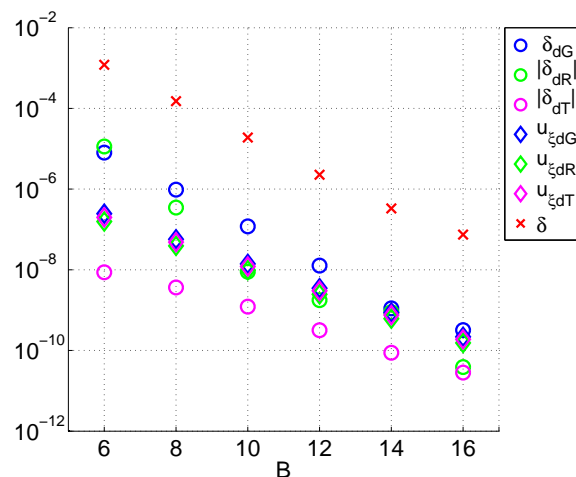


Rysunek 6.17. Względne obciążenie $\delta_{d[GR]}$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnałów: a) sinusoidalnego, b) trójkątnego i *ditherów* o rozkładach: normalnym (G), równomiernym (R) i trójkątnym (T), wyniki dla przetwornika 6-bitowego

Dodatkowo można zaobserwować, że względna niepewność standardowa typu A bez względu na rodzaj zastosowanego sygnału *ditherowego* osiąga dla $N = 100\,000$ wartości tego samego rzędu (rys. 6.18).

W (tab. 29, 30, dodatek D, str. 202) zawarto wyniki symulacji względnego obciążenia oraz względnej niepewności standardowej typu A w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnałów badanych (sinusoidalnego oraz trójkątnego) z każdym z trzech analizowanych sygnałów *ditherowych*. Ustalono odpowiedni poziom dla każdego z sygnałów *ditherowych* zgodnie

z ustaleniami w poprzednich rozdziałach ($\sigma_{dG} = 0,5q$, $A_{dR} = 0,5q$, $A_{dT} = q$). Przyjęto wartość amplitudy sygnału badanego $A = 4,9$ V, liczbę próbek sygnałów $M = 2^{19}$ dla sygnałów sinusoidalnych oraz $M = 10^6$ dla sygnałów trójkątnych. Liczba powtórzeń eksperymentu wynosiła $N = 100\,000$.



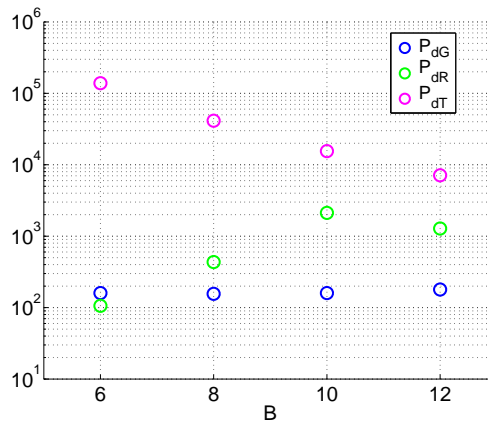
Rysunek 6.18. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ oraz względne obciążenie $\delta_{d[GRT]}$ i określona dla $N = 100\,000$ względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi d[GRT]}$ sumy sygnału sinusoidalnego i dithera o rozkładach: normalnym (G), równomiernym (R) i trójkątnym (T) – porównanie wyników

Na podstawie uzyskanych wyników (tab. 29, 30, dodatek D, str. 202) stwierdzono, że:

- Każdy ze stosowanych sygnałów ditherowych wpływa na zmniejszenie błędów powodowanych kwantowaniem (rys. 6.18).
- Sygnał ditherowy o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie $A_{dT} = 1q$ skuteczniej niż inne badane sygnały ditherowe wpływa na zmniejszenie wartości względnego obciążenia (w pomiarze z sygnałem sinusoidalnym, dla $B = 6$ $P_{dT} \approx 1,4 \cdot 10^5$).
- W pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i dithera o rozkładzie równomiernym wzrost liczby bitów przetwornika A/C przyczynia się do skuteczniejszej redukcji wpływu kwantowania (wartość P_{dR} wzrasta wraz ze wzrostem liczby bitów), w przeciwieństwie

do sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym ($P_{dG} \approx 1,6 \cdot 10^2$ dla $B = 6 \div 10$) (rys. 6.19).

- Zastosowanie sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym w pomiarze z sygnałem trójkątnym powoduje redukcję względnego obciążenia o dwa, a nawet o trzy rzędy wielkości. Porównywalne efekty można otrzymać w wyniku zastosowania sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym.
- Względna niepewność standardowa typu A bez względu na rodzaj zastosowanego sygnału *ditherowego* przyjmuje wartości tego samego rzędu.
- *Dither* o rozkładzie normalnym, stosowany obecnie ze względu na łatwy sposób wygenerowania, okazuje się być sygnałem najmniej skutecznym pod względem redukcji obciążenia oraz niepewności typu A.



Rysunek 6.19. Współczynniki $P_{d[GRT]}$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładach: normalnym (G), równomiernym (R) i trójkątnym (T) – porównanie wyników

Na wykresach (rys. 22 – 24, dodatek C, str. 193) przedstawiono histogramy względnego obciążenia w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z każdym z trzech analizowanych sygnałów *ditherowych*. Przyjęto poziom sygnałów *ditherowych* ustalony w poprzednich rozdziałach oraz $B = 6$, $M = 2^{16}$. Dla sumy sygnału sinusoidalnego oraz *dithera* o rozkładzie normalnym przyjęto liczbę powtórzeń eksperymentu równą $N = 10\ 000$, w pozostałych przypadkach $N = 50\ 000$. Można przypuszczać, że w każdym przypadku względne obciążenie ma rozkład normalny, co wymaga potwier-

dzenia w dalszych badaniach. Znajomość rozkładu umożliwiłaby w przyszłości określenie niepewności rozszerzonej.

6.3. Dokładność estymacji funkcji autokorelacji wybranych klas sygnałów w obecności sygnału *ditherowego* – badania własne

Zgodnie z teorią kwantowania wg Widrowa modelowanie błędów parametrów i charakterystyk sygnałów wymaga znajomości odpowiadających im funkcji charakterystycznych. W pracy [63] wykazano, że funkcje charakterystyczne można otrzymać na podstawie funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozważanych sygnałów korzystając z następującego twierdzenia [33]:

Twierdzenie

Jeżeli dana jest zmienna losowa T o gęstości $f(t)$ i różnowartościowa funkcja $x = h(t)$, to nowa zmienna losowa X ma gęstość:

$$p(x) = f(h^{-1}(x)) \left| \frac{dt}{dx} \right|, \quad (6.102)$$

gdzie $h^{-1}(x)$ jest funkcją odwrotną do $h(t)$.

Dla rozważanych w pracy sygnałów, można wykazać, że [63, 73]:

$$f(h^{-1}(x)) = \frac{\omega}{\pi}. \quad (6.103)$$

Funkcję autokorelacji ergodycznego i stacjonarnego procesu $\{x(t)\}$ można wyznaczyć na podstawie jednej dowolnie wybranej realizacji $x(t)$ procesu zgodnie z zależnością [7, 9, 59]¹:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt. \quad (6.104)$$

¹ Definicja dotyczy sygnałów o ograniczonej mocy średniej, które są przedmiotem niniejszej rozprawy

Dla przykładu poddajmy analizie sygnał sinusoidalny wyrażony wzorem:

$$x = A \cdot \sin(\omega(t + \tau)). \quad (6.105)$$

Funkcję odwrotną sygnału sinusoidalnego można wyrazić zależnością:

$$t = h^{-1}(x) = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{x}{A}\right) - \tau. \quad (6.106)$$

Obliczając pochodną otrzymujemy:

$$\left| \frac{dt}{dx} \right| = \left(\omega A \left(1 - \frac{x^2}{A^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}. \quad (6.107)$$

Korzystając z (6.102), (6.103) i (6.107) funkcję gęstości odpowiadającą sygnałowi sinusoidalnemu można opisać wzorem:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}. \quad (6.108)$$

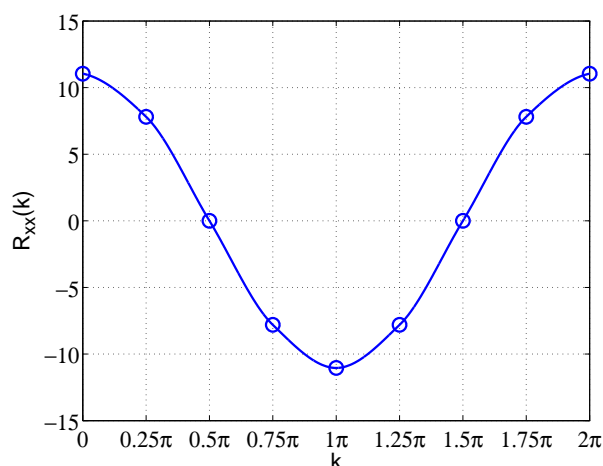
Podobną analizę można przeprowadzić dla sygnału trójkątnego, dla którego funkcja gęstości wynosi [63]:

$$p(x) = \frac{1}{2A}. \quad (6.109)$$

Można zauważyć, że w (6.108) oraz (6.109) nie występuje przesunięcie τ . Zatem, stosując teorię kwantowania wg Widrowa, z zastosowaniem funkcji charakterystycznych, możliwe jest wyznaczenie modeli błędów analizowanych sygnałów jedynie dla argumentu $k = j \cdot \pi, j \in N$.

Podczas estymacji funkcji korelacyjnych uzasadnione jest zatem przeprowadzenie badań symulacyjnych z zastosowaniem zaproponowanego w pracy wirtualnego korelatora.

Pomiary zostały przeprowadzone zgodnie z układem (5.8, str. 49) dla poszczególnych wartości przesunięć $k = \omega\tau$ zaznaczonych na (rys. 6.20).

Rysunek 6.20. Uśredniona funkcja autokorelacji sygnału sinusoidalnego dla $B = 6$

6.3.1. Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego z gaussowskim *ditherem*

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości autokorelacji sygnału sinusoidalnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). Poziom sygnału *ditherowego* oraz zależność na krok kwantowania przetwornika wyznaczono w (rozdział 6.2.1, str. 69):

$$q = \frac{2A}{2^B - 6}. \quad (6.110)$$

Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w poniższej tabeli.

Tabela 6.17. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym

A [V]	f_s [Hz]	φ	σ_{dG}	$\sigma_{dG_{max}}$	M	N	B
4,7	1 000	0	$0,5q$	$1q$	2^{19}	100 000	6, 8, 10, 12, 14, 16

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne z użyciem wirtualnego korelatora na podstawie zależności:

$$b_{dG} = \overline{\tilde{R}_x^d}(k, N) - R_x^d(k), \quad (6.111)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji autokorelacji dla $k = 0, 0, 25\pi, 0, 5\pi, \dots, 2\pi$ i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(k, M), \quad (6.112)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji autokorelacji:

$$\tilde{R}_{xi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot x_{q,i}(j+k), \quad (6.113)$$

- $R_x^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(k) = \begin{cases} \frac{A^2}{2} + \sigma_{dG}^2 + \frac{q^2}{12} & , k = 0 \\ \frac{A^2}{2} \cdot \cos(k) & , k > 0. \end{cases} \quad (6.114)$$

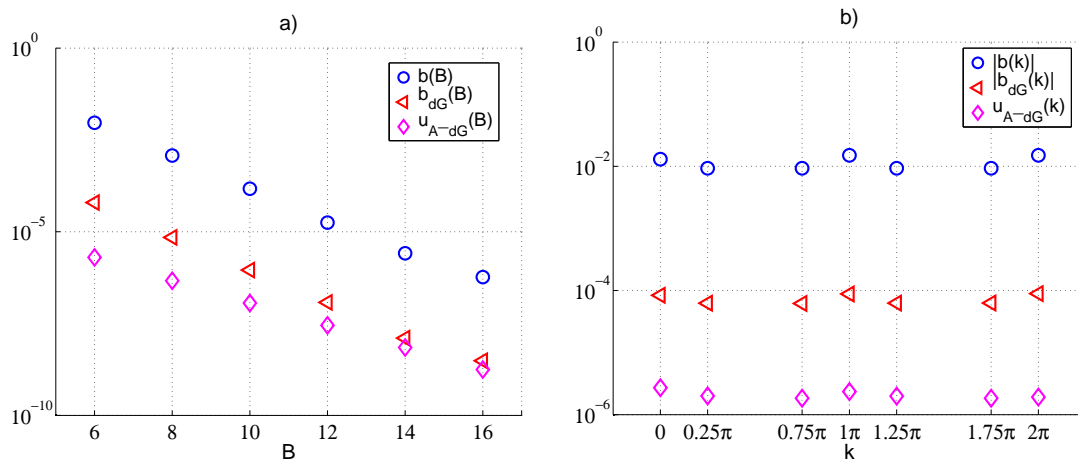
Wartość niepewności standardowej typu A obliczono na podstawie:

$$u_{A_dG} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_x^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.115)$$

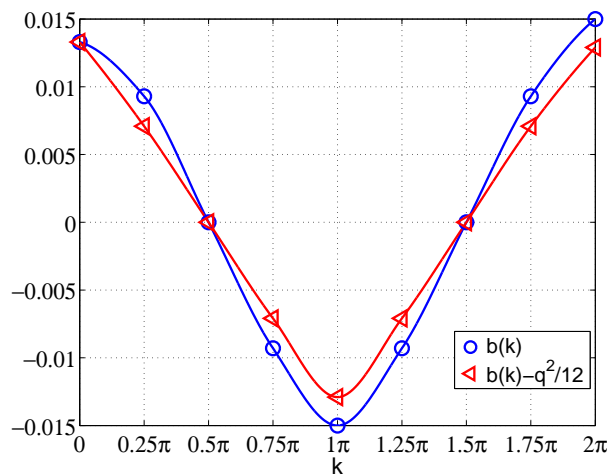
Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 31 – 36, dodatek E, str. 205) zawarto wyniki autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym dla parametrów zawartych w (tab. 6.17). Na ich podstawie można stwierdzić, że obciążenie oraz niepewność standardowa typu A są zależne od liczby bitów przetwornika i maleją wraz ze wzrostem ich wartości (rys. 6.21 a)).

W pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego dla $k > 0$, $R_{xx}(k) \neq 0$ zastosowanie poprawki Shepparda do wyniku umożliwia zmniejszenie wartości obciążenia $b(k)$ powodowanego kwantowaniem (rys. 6.22).



Rysunek 6.21. b , b_{dG} oraz u_{A-dG} w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz jego sumy z *ditherem* o rozkładzie normalnym a) w funkcji B ($k = 0, 25\pi$), b) w funkcji k ($B = 6$)



Rysunek 6.22. Obciążenie w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego ($M = 2^{19}$, $N = 1$, $B = 6$)

Wartość obciążenia, jaka może wystąpić zarówno w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz jego sumy z *ditherem* o rozkładzie normalnym osiąga maksimum dla argumentów $k \cdot \pi$ ($k \in N$) (rys. 6.21 b)). W zależności od rozdzielczości przetwornika, wynosi odpowiednio:

- $B = 6$ $|b(k)| = 1,3 \cdot 10^{-2}$, $|b_{dG}(k)| = 8,9 \cdot 10^{-5}$,
- $B = 8$ $|b(k)| = 1,7 \cdot 10^{-3}$, $|b_{dG}(k)| = 9,6 \cdot 10^{-6}$,

- $B = 10$ $|b(k)| = 2,1 \cdot 10^{-4}$, $|b_{dG}(k)| = 1,2 \cdot 10^{-6}$,
- $B = 12$ $|b(k)| = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $|b_{dG}(k)| = 1,8 \cdot 10^{-7}$,
- $B = 14$ $|b(k)| = 3,7 \cdot 10^{-6}$, $|b_{dG}(k)| = 2,1 \cdot 10^{-8}$,
- $B = 16$ $|b(k)| = 8,2 \cdot 10^{-7}$, $|b_{dG}(k)| = 3,5 \cdot 10^{-9}$.

Natomiast niepewność standardowa typu A osiąga wartości rzędu 10^{-6} dla przetworników 6-bitowych oraz rzędu 10^{-9} dla przetworników 16-bitowych.

W celu zbadania, ile razy sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym zmniejsza wartość obciążenia $b(k)$ wprowadzono następujące współczynniki redukcji obciążenia:

$$Pb_{dG}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dG}(k)|}, \quad (6.116)$$

$$Pb_{dGM}(0) = \frac{|b_M(0)|}{|b_{dGM}(0)|}, \quad (6.117)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego,
- $b_{dG}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie normalnym,
- $b_M(0)$ – obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego, obliczone na podstawie iloczynu względnego obciążenia (6.7) i wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego ($A^2/2$),
- $b_{dGM}(0)$ – obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie normalnym, obliczone na podstawie iloczynu względnego obciążenia (6.28) i wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego ($A^2/2$).

Biorąc pod uwagę uzyskane wyniki można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym oraz $\sigma_{dG} = 0,5q$, bez względu na liczbę bitów zastosowanego przetwornika, powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o dwa rzędy wielkości (tab. 31 – 33, dodatek E, str. 205). Zastosowanie sygnału *ditherowego* jest także przyczyną powstawania niepewności typu A, która dla $N = 100\,000$ osiąga wartości mniejsze od wartości obciążenia.

6.3.2. Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano, za pomocą wirtualnego korelatora, serię pomiarów wartości autokorelacji sygnału sinusoidalnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). W wyniku przeprowadzonych badań symulacyjnych (rozdział 6.2.2, str. 75) ustalono odpowiednią wartość sygnału *ditherowego* oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetwornika:

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.118)$$

Wyboru rozdzielczości przetworników dokonano na podstawie wartości procentowej różnicy pomiędzy względnym obciążeniem estymatora wartości średniokwadratowej uzyskanym na drodze analizy matematycznej, a względnym obciążeniem uzyskanym w wyniku symulacji w wirtualnym korelatorze (rozdział 6.1, str. 53). Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w poniższej tabeli.

Tabela 6.18. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji autokorelacji sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

A [V]	f_s [Hz]	φ	A_{dR} [V]	A_{dR_max} [V]	M	N	B
4,9	1 000	0	$0,5q$	$1q$	2^{19}	100 000	6, 8, 10, 12

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dR} = \overline{\tilde{R}_x^d(k, N)} - R_x^d(k), \quad (6.119)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d(k, N)}$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji autokorelacji dla $k = 0, 0,25\pi, 0,5\pi, \dots, 2\pi$ i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d(k, N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(k, M), \quad (6.120)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji autokorelacji:

$$\tilde{R}_{xi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot x_{q,i}(j+k), \quad (6.121)$$

– $R_x^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(k) = \begin{cases} \frac{A^2}{2} + \frac{A_{dR}^2}{3} + \frac{q^2}{12} & , k = 0 \\ \frac{A^2}{2} \cdot \cos(k) & , k > 0. \end{cases} \quad (6.122)$$

Wartość niepewności standardowej typu A wyznaczono na podstawie:

$$u_{A_{dR}} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_x^d(k, N)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.123)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 37 – 40, dodatek E, str. 211) zawarto wyniki autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym. Na ich podstawie można stwierdzić, że obciążenie oraz niepewność standardowa typu A są skorelowane z liczbą bitów przetwornika i maleją wraz ze wzrostem ich wartości (rys. 6.23 a)).

W pomiarze z sygnałem *ditherowym* wartość bezwzględna z obciążenia $|b_{dR}(k)|$ oraz niepewność standardowa typu A $u_{A_{dR}}(k)$ osiągają maksymalne wartości dla wartości średniokwadratowej ($k = 0$). Są zależne od rozdzielczości przetwornika i wynoszą odpowiednio (rys. 6.23 b)):

- $B = 6$ $|b_{dR}(0)| = 1,4 \cdot 10^{-4}$, $u_{A_{dR}}(0) = 1,9 \cdot 10^{-6}$,
- $B = 8$ $|b_{dR}(0)| = 4,2 \cdot 10^{-6}$, $u_{A_{dR}}(0) = 4,7 \cdot 10^{-7}$,
- $B = 10$ $|b_{dR}(0)| = 1,1 \cdot 10^{-7}$, $u_{A_{dR}}(0) = 1,2 \cdot 10^{-7}$,
- $B = 12$ $|b_{dR}(0)| = 1,8 \cdot 10^{-10}$, $u_{A_{dR}}(0) = 3,8 \cdot 10^{-8}$.

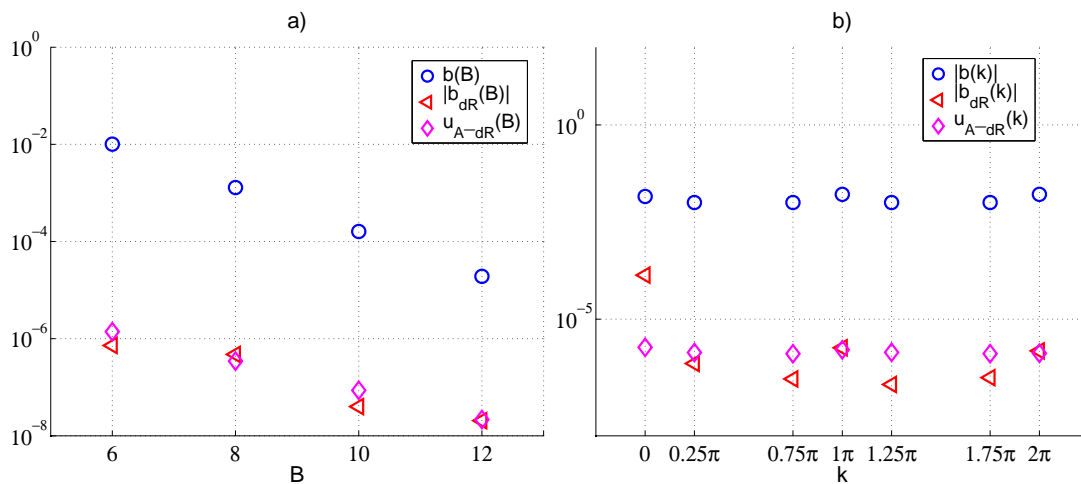
W celu analizy wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym na wartość obciążenia estymatora funkcji autokorelacji sumy analizowanych sygnałów wprowadzono następujące współczynniki redukcji obciążenia:

$$Pb_{dR}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dR}(k)|}, \quad (6.124)$$

$$Pb_{dRM}(0) = \frac{|b_M(0)|}{|b_{dRM}(0)|}, \quad (6.125)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego,
- $b_{dR}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie równomiernym,
- $b_M(0)$ – obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego, obliczone na podstawie iloczynu względnego obciążenia (6.7) i wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego ($A^2/2$),
- $b_{dRM}(0)$ – obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie równomiernym, obliczone na podstawie iloczynu względnego obciążenia (6.43) i wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego ($A^2/2$).



Rysunek 6.23. b , b_{dR} oraz u_{A-dR} w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz jego sumy z *ditherem* o rozkładzie równomiernym a) w funkcji B ($k = 0, 25\pi$), b) w funkcji k ($B = 6$)

Na podstawie uzyskanych wyników (tab. 37 – 40, dodatek E, str. 211) można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym w pomiarze funkcji autokorelacji powoduje zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem. W przeciwieństwie do wyników estymacji wartości średniokwadratowej ($k = 0$) sygnału sinusoidalnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym, zastosowanie *dithera* o rozkładzie równomiernym powoduje znaczny wzrost wartości współczynnika $Pb_{dR}(0)$ wraz ze wzro-

stem rozdzielczości przetwornika ($1, 0 \cdot 10^2 \div 1, 5 \cdot 10^5$). Dodatkowo, dla pozostałych wartości przesunięć ($k \neq 0$) uzyskuje się dużo lepszą dokładność – od kilku do kilkunastu tysięcy razy zmniejszenie wartości obciążenia (współczynnik $Pb_{dR}(k)$). Niepewność standardowa typu A osiąga wartości rzędu 10^{-6} dla przetworników 6-bitowych oraz 10^{-8} dla przetworników 12-bitowych (dla $N = 100\,000$).

Można więc stwierdzić, że pomimo, iż funkcja charakterystyczna sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym nie spełnia warunku odtwarzalności wg Widrowa, to zastosowanie tego sygnału w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego przyczynia się do znacznego zmniejszenia wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem (dla $B = 6$ i $k = 0$ o dwa rzędy wielkości, dla $k \neq 0$ o cztery rzędy wielkości; dla $B = 12$ o trzy rzędy wielkości).

6.3.3. Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano za pomocą wirtualnego korelatora serię pomiarów wartości autokorelacji sygnału sinusoidalnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). W wyniku przeprowadzonych badań symulacyjnych (rozdział 6.2.3, str. 84) ustalono odpowiednią wartość sygnału *ditherowego* oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetwornika:

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.126)$$

Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w poniższej tabeli.

Tabela 6.19. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji autokorelacji sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

A [V]	f_s [Hz]	φ	A_{dT}, A_{dT_max} [V]	M	N	B
4,9	1 000	0	$1q$	2^{19}	100 000	6, 8, 10, 12

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dT} = \overline{\widetilde{R}_x^d}(k, N) - R_x^d(k), \quad (6.127)$$

gdzie:

- $\overline{\widetilde{R}_x^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji autokorelacji dla $k = 0, 0, 25\pi, 0, 5\pi, \dots, 2\pi$ i wyraża się wzorem:

$$\overline{\widetilde{R}_x^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widetilde{R}_{xi}^d(k, M), \quad (6.128)$$

gdzie $\widetilde{R}_{xi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji autokorelacji:

$$\widetilde{R}_{xi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot x_{q,i}(j+k), \quad (6.129)$$

- $R_x^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(k) = \begin{cases} \frac{A^2}{2} + \frac{A_{dT}^2}{6} + \frac{q^2}{12} & , k = 0 \\ \frac{A^2}{2} \cdot \cos(k) & , k > 0 \end{cases} \quad (6.130)$$

Wartość niepewności standardowej typu A wyznaczono na podstawie:

$$u_{A_dT} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\widetilde{R}_{xi}^d(k, M) - \overline{\widetilde{R}_x^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.131)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 41 – 46, dodatek E, str. 215) zawarto wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych estymacji funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym. Na ich podstawie można stwierdzić, że zastosowanie sygnału *ditherowego* ma znaczny wpływ na obniżenie wartości obciążenia (rys. 6.24). Niestety, kwantowanie z sygnałem *ditherowym* powoduje pojawienie się niepewności typu A, która dla przetworników 6-bitowych osiąga wartości rzędu 10^{-6} , natomiast dla przetworników 16-bitowych rzędu 10^{-9} .

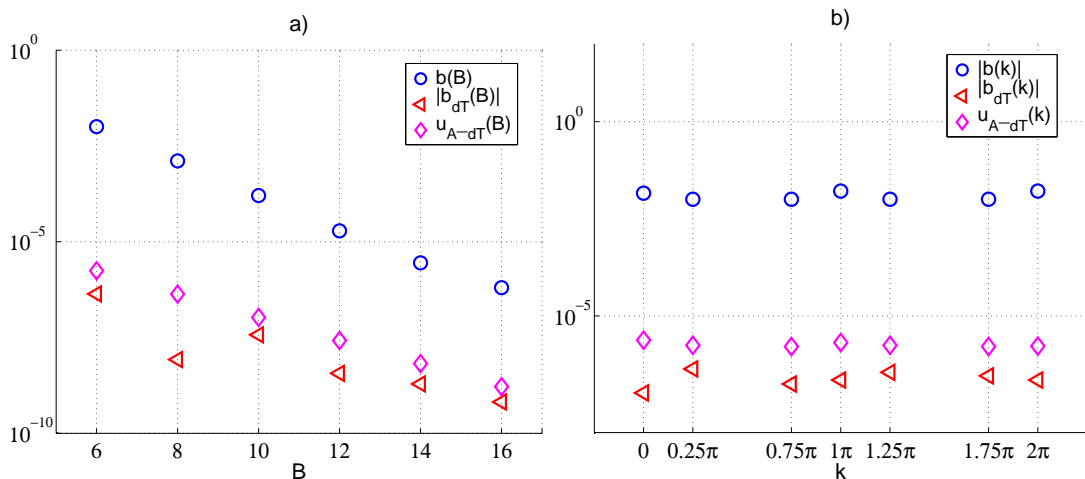
Wprowadzenie następującego współczynnika redukcji obciążenia:

$$Pb_{dT}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dT}(k)|}, \quad (6.132)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego,
- $b_{dT}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sumy sygnału sinusoidalnego i *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym,

umożliwiło analizę wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym na wartość obciążenia estymatora funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego. Wyniki przedstawiono w (tab. 41 – 46, dodatek E, str. 215).



Rysunek 6.24. b , b_{dT} oraz u_{A-dT} w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz jego sumy z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym a) w funkcji B ($k = 0, 25\pi$), b) w funkcji k ($B = 6$)

Ponieważ funkcje charakterystyczne oraz pochodne funkcji charakterystycznych sumy sygnału sinusoidalnego i sygnału o rozkładzie trójkątnym o amplitudzie $A_{dT} = q$ przyjmują wartości równe zero, możliwe jest odtworzenie, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartości średniokwadratowej na podstawie wartości średniokwadratowej sygnału skwantowanego (rozdział 6.2.3). W wyniku przeprowadzonych badań symulacyjnych estymacji funkcji autokorelacji sumy analizowanych sygnałów wartość obciążenia uległa zmniejszeniu nawet o pięć rzędów wartości (tab. 41, dodatek E, str. 215). Porów-

nując wartości obciążenia dla przesunięcia zerowego oraz pozostałych wartości k , a także biorąc pod uwagę wartości współczynników $Pb_{dT_M}(0)$ oraz $Pb_{dT}(k)$ można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym skutecznie zmniejsza obciążenie powodowane kwantowaniem w pomiarze autokorelacji sumy analizowanych sygnałów. Niestety, jest także przyczyną pojawienia się niepewności typu A, która w zależności od liczby bitów przetwornika, dla liczby powtórzeń eksperymentu $N = 100\ 000$ przyjmuje wartości rzędu $10^{-6} \div 10^{-9}$.

6.3.4. Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego z gaussowskim ditherem

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości autokorelacji sygnału trójkątnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). Poziom sygnału *ditherowego* oraz zależność na krok kwantowania przetwornika wyznaczono w rozdziale 6.2.1 (str. 69):

$$q = \frac{2A}{2^B - 6}. \quad (6.133)$$

Rozdzielczość przetworników dobrano na podstawie wartości procentowej różnicy pomiędzy względnym obciążeniem estymatora wartości średniokwadratowej uzyskanym na drodze analizy matematycznej, a względnym obciążeniem uzyskanym w wyniku symulacji w wirtualnym korelatorze, dla których różnica ta nie przekroczyła 50% (tab. 6.3, rozdział 6.1, str. 59). Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w (tab. 6.20).

Tabela 6.20. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji autokorelacji sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym

A [V]	f_s [Hz]	φ	σ_{dG}	σ_{dG_max}	M	N	B
4, 7	1 000	0	0, 5q	1q	10^6	100 000	6, 8

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dT} = \overline{\tilde{R}_x^d}(k, N) - R_x^d(k), \quad (6.134)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji autokorelacji dla $k = 0, \frac{1}{8}T, \frac{1}{4}T, \frac{3}{8}T, \dots, T$ (dla $T = 1/f_s$) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(k, M), \quad (6.135)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji autokorelacji:

$$\tilde{R}_{xi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot x_{q,i}(j+k), \quad (6.136)$$

- $R_x^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(k) = \begin{cases} \frac{A^2}{3} + \sigma_{dG}^2 + \frac{q^2}{12} & , k = 0 \\ R_x(k) & , k > 0, \end{cases} \quad (6.137)$$

gdzie:

$$R_x(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t+k\Delta t) dt, \quad (6.138)$$

przy czym:

$$x(t) = 8 \cdot \frac{A}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \sin\left[(2i+1) \cdot 2\frac{\pi}{T} \cdot t\right]}{(2i+1)^2} \quad (6.139)$$

jest sygnałem trójkątnym o okresie T opisanym z zastosowaniem szeregu Fouriera.

Wartość niepewności standardowej typu A wyznaczono na podstawie:

$$u_{A-dG} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_x^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.140)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 47, 48, dodatek E, str. 221) zawarto wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie normalnym. Na ich podstawie stwierdzono, że:

- sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym ma wpływ na obciążenie estymatora wartości autokorelacji sygnału trójkątnego jedynie dla wartości przesunięcia $k = 0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$ (rys. 6.25),
- dla $k = 0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$ zarówno obciążenie estymatora sygnału trójkątnego $b(k)$, jak i jego sumy z sygnałem *ditherowym* $b_{dG}(k)$ zależą od liczby bitów przetwornika i maleją wraz ze wzrostem ich wartości, np.:
 - $B = 6, \quad b\left(\frac{1}{2}T\right) = -3,6 \cdot 10^{-3}, \quad b_{dG}\left(\frac{1}{2}T\right) = -1,2 \cdot 10^{-5},$
 - $B = 8, \quad b\left(\frac{1}{2}T\right) = -2,2 \cdot 10^{-4}, \quad b_{dG}\left(\frac{1}{2}T\right) = -8,9 \cdot 10^{-7},$
- dla analizowanych w pracy pozostałych wartości funkcji autokorelacji ($\frac{1}{8}T, \frac{3}{8}T, \frac{5}{8}T$ oraz $\frac{7}{8}T$), bez względu na liczbę bitów przetwornika, moduł obciążenia $|b_{dG}(k)|$ przyjmuje wartość $2,6 \cdot 10^{-3}$ przewyższając wartość modułu obciążenia $|b(k)|$,
- niepewność standardowa typu A maleje wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika i dla $N = 100\,000$ oraz $k = 0$ osiąga maksymalne wartości odpowiednio: $2,3 \cdot 10^{-6}$ oraz $5,3 \cdot 10^{-7}$.

W celu dokładniejszej analizy wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym na wartość obciążenia estymatora funkcji autokorelacji wprowadzono następujące współczynniki redukcji obciążenia:

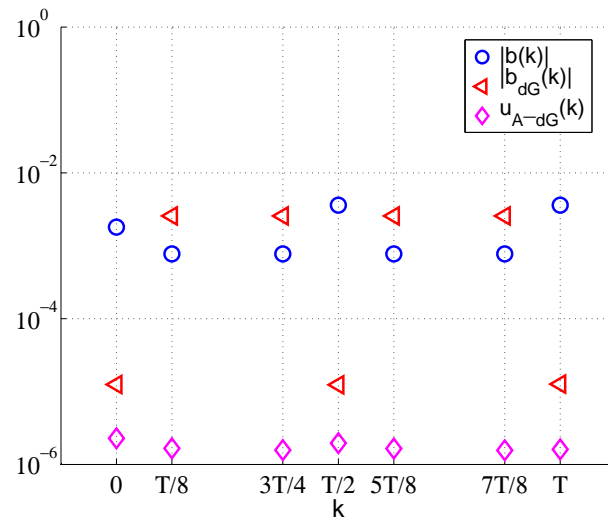
$$Pb_{dG}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dG}(k)|}, \quad (6.141)$$

$$Pb_{dGM}(0) = \frac{|b_M(0)|}{|b_{dGM}(0)|}, \quad (6.142)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego,
- $b_{dG}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie normalnym,
- $b_M(0)$ – obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego, obliczone na podstawie iloczynu względnego obciążenia (6.14) i wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego ($A^2/3$),
- $b_{dGM}(0)$ – obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sumy sy-

gnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie normalnym, obliczone na podstawie iloczynu względnego obciążenia (6.71) i wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego ($A^2/3$).



Rysunek 6.25. b , b_{dG} oraz u_{A-dG} w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątnego oraz jego sumy z *ditherem* o rozkładzie normalnym w funkcji k ($B = 6$)

Dla przetworników 6-bitowych współczynnik $Pb_{dG}(k)$ osiąga kolejno wartości:

- $Pb_{dG}(0) = 1,4 \cdot 10^2$, ($Pb_{dGM}(0) = 86$),
- $Pb_{dG}\left(\frac{1}{2}T\right) = 2,9 \cdot 10^2$,
- $Pb_{dG}(T) = 2,8 \cdot 10^2$.

Natomiast dla przetworników 8-bitowych współczynnik $Pb_{dG}(k)$ przyjmuje następujące wartości:

- $Pb_{dG}(0) = 1,9 \cdot 10^2$, ($Pb_{dGM}(0) = 1,1 \cdot 10^2$),
- $Pb_{dG}\left(\frac{1}{2}T\right) = 2,5 \cdot 10^2$,
- $Pb_{dG}(T) = 4,2 \cdot 10^2$

Poddając analizie wartości obciążeń $b(k)$, $b_{dG}(k)$ oraz wartości współczynnika $Pb_{dG}(k)$ stwierdza się, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o dwa rzędy wielkości dla $k = 0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$.

Na podstawie przeprowadzonej w poprzednich rozdziałach analizy wyników estymacji wartości średniokwadratowej oraz przedstawionych wyników w tym rozdziale, stwierdza się, że kwantowanie sygnału pierwotnego wraz z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie normalnym i dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$ nie gwarantuje odtworzenia wartości funkcji autokorelacji sygnału na podstawie wartości funkcji autokorelacji sygnału skwantowanego. Dodatkowo udowodniono, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym w pomiarze z sygnałem trójkątnym wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia jedynie dla wartości przesunięcia czasowego funkcji autokorelacji $k = 0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$.

6.3.5. Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości autokorelacji sygnału trójkątnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). Poziom sygnału *ditherowego* oraz zależność na krok kwantowania przetwornika wyznaczono w rozdziale 6.2.2 (str. 75):

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.143)$$

Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w (tab. 6.21).

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dR} = \overline{\widetilde{R}_x^d(k, N)} - R_x^d(k), \quad (6.144)$$

gdzie:

- $\overline{\widetilde{R}_x^d(k, N)}$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji autokorelacji dla $k = 0, \frac{1}{8}T, \frac{1}{4}T, \frac{3}{8}T, \dots, T$ (dla $T = 1/f_s$) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\widetilde{R}_x^d(k, N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widetilde{R}_{xi}^d(k, M), \quad (6.145)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji autokorelacji:

$$\tilde{R}_{xi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot x_{q,i}(j+k), \quad (6.146)$$

– $R_x^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(k) = \begin{cases} \frac{A^2}{3} + \frac{A_{dR}^2}{3} + \frac{q^2}{12}, & k = 0 \\ R_x(k) & , k > 0, \end{cases} \quad (6.147)$$

gdzie:

$$R_x(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t+k\Delta t) dt, \quad (6.148)$$

przy czym:

$$x(t) = 8 \cdot \frac{A}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \sin\left[(2i+1) \cdot 2\frac{\pi}{T} \cdot t\right]}{(2i+1)^2} \quad (6.149)$$

jest sygnałem trójkątnym o okresie T opisanym z zastosowaniem szeregu Fouriera.

Wartość niepewności standardowej typu A wyznaczono na podstawie:

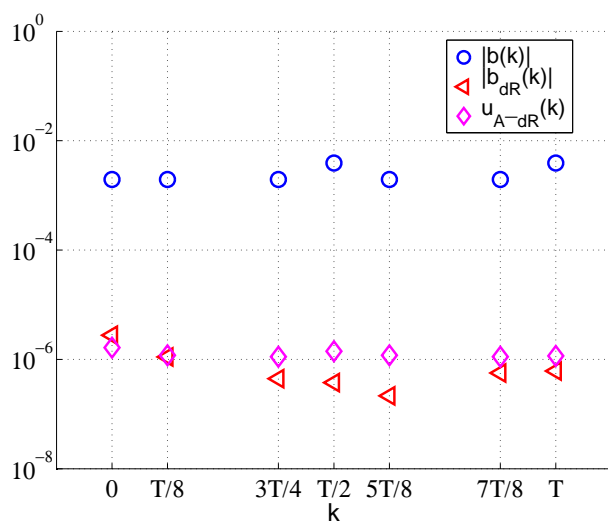
$$u_{A_{dR}} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_x^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.150)$$

Tabela 6.21. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji autokorelacji sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

A [V]	f_s [Hz]	φ	A_{dR} [V]	$A_{dR_{max}}$ [V]	M	N	B
4,9	1 000	0	0,5 q	1 q	10 ⁶	100 000	6, 8, 10, 12

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 49 – 52, dodatek E, str. 223) zawarto wyniki badań symulacyjnych estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym. W przeciwieństwie do sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym, sygnał o rozkładzie równomiernym wpływa na wartość obciążenia estymatora funkcji autokorelacji dla wszystkich analizowanych wartości przesunięć (rys. 6.26).



Rysunek 6.26. b , b_{dR} oraz u_{A-dR} w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątnego oraz jego sumy z *ditherem* o rozkładzie równomiernym w funkcji k ($B = 6$)

W celu dokładniejszej analizy wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym na wartość obciążenia estymatora funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego wprowadzono następujący współczynnik redukcji obciążenia:

$$P_{b_{dR}}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dR}(k)|}, \quad (6.151)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego,
- $b_{dR}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym.

Poddając analizie wartości obciążenia $|b_{dR}(k)|$ oraz niepewności standardowej typu A $u_{A-dR}(k)$ estymatora funkcji autokorelacji sumy sygnału trójkątnego oraz *dithera* o rozkładzie równomiernym można zauważyć, że zgodnie z wynikami uzyskanymi w poprzednich rozdziałach, wartości błędów zazwyczaj osiągają maksymalne wartości w pomiarze wartości średniokwadratowej ($k = 0$). Dla poszczególnych rozdzielczości przetworników wynoszą one odpowiednio (dla $N = 100\,000$):

- $B = 6$, $|b_{dR}(0)| = 2,8 \cdot 10^{-6}$, $u_{A-dR}(0) = 1,6 \cdot 10^{-6}$,
- $B = 8$, $|b_{dR}(0)| = 5,5 \cdot 10^{-7}$, $u_{A-dR}(0) = 4,0 \cdot 10^{-7}$,

- $B = 10$, $|b_{dR}(0)| = 6,7 \cdot 10^{-8}$, $u_{A_{dR}}(0) = 9,9 \cdot 10^{-8}$,
- $B = 12$, $\left|b_{dR}\left(\frac{1}{8}T\right)\right| = 1,6 \cdot 10^{-8}$, $u_{A_{dR}}(0) = 2,5 \cdot 10^{-8}$.

Analizując wartości współczynnika $Pb_{dR}(k)$ dla przetworników $6 \div 10$ bitowych można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o dwa, a nawet o trzy rzędy wielkości (tab. 49 – 51, dodatek E, str. 223).

Na podstawie wyników przeprowadzonych badań symulacyjnych stwierdzono, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym w pomiarze funkcji autokorelacji wraz z sygnałem trójkątnym powoduje znaczne zmniejszenie wartości obciążenia.

Można więc stwierdzić, że pomimo, iż funkcja charakterystyczna sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ nie spełnia warunku odtwarzalności wg Widrowa, to zastosowanie tego sygnału w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątnego przyczynia się do znacznego zmniejszenia wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem. Dodatkowo sygnał ten skuteczniej wpływa na obniżenie wartości obciążenia niż *dither* o rozkładzie normalnym, który ze względu na redukcję wartości obciążenia, okazał się skuteczny jedynie dla wartości przesunięcia czasowego funkcji autokorelacji $k = 0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$.

6.3.6. Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości autokorelacji sygnału trójkątnego w obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym i zerowej wartości średniej. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.2.1 (str. 68). W wyniku przeprowadzonych badań symulacyjnych (rozdział 6.2.3, str. 84) ustalono odpowiednią wartość sygnału *ditherowego* oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetwornika:

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.152)$$

Wartości parametrów sygnałów oraz przetwarzania a-c zawarto w (tab. 6.22).

Tabela 6.22. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji autokorelacji sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

$A[\text{V}]$	$f_s[\text{Hz}]$	φ	$A_{dT}, A_{dT_max}[\text{V}]$	M	N	B
4,9	1 000	0	1q	10^6	100 000	6, 8, 10, 12

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dT} = \overline{\tilde{R}_x^d(k, N)} - R_x^d(k), \quad (6.153)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_x^d(k, N)}$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji autokorelacji dla $k = 0, \frac{1}{8}T, \frac{1}{4}T, \frac{3}{8}T, \dots, T$ (dla $T = 1/f_s$) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_x^d(k, N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xi}^d(k, M), \quad (6.154)$$

gdzie $\tilde{R}_{xi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji autokorelacji:

$$\tilde{R}_{xi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot x_{q,i}(j+k), \quad (6.155)$$

- $R_x^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_x^d(k) = \begin{cases} \frac{A^2}{3} + \frac{A_{dT}^2}{6} + \frac{q^2}{12} & , k = 0 \\ R_x(k) & , k > 0, \end{cases} \quad (6.156)$$

gdzie:

$$R_x(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t+k\Delta t) dt, \quad (6.157)$$

przy czym:

$$x(t) = 8 \cdot \frac{A}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \sin\left[(2i+1) \cdot 2\frac{\pi}{T} \cdot t\right]}{(2i+1)^2} \quad (6.158)$$

jest sygnałem trójkątnym o okresie T opisanym z zastosowaniem szeregu Fouriera.

Wartość niepewności standardowej typu A wyznaczono na podstawie:

$$u_{A_dT} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xi}^d(k, M) - \overline{R}_x^d(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.159)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 53 – 56, dodatek E, str. 227) zawarto wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych estymacji funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym. Na ich podstawie wyciągnięto następujące wnioski:

- zastosowanie sygnału *ditherowego* ma istotny wpływ na obniżenie wartości obciążenia estymatora funkcji autokorelacji (rys. 6.27),
- zarówno wartość obciążenia, jak i niepewność standardowa typu A estymacji funkcji autokorelacji sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym zależą od liczby bitów przetwornika i maleją wraz ze wzrostem ich wartości; w zależności od rozdzielczości przetwornika osiągają następujące maksymalne wartości dla $N = 100\,000$:

$$\begin{aligned} \text{— } B = 6, \quad |b_{dT}(k)| &= 8,4 \cdot 10^{-7}, \quad u_{A_dT}(k) = 2,0 \cdot 10^{-6}, \\ \text{— } B = 8, \quad |b_{dT}(k)| &= 5,3 \cdot 10^{-7}, \quad u_{A_dT}(k) = 4,9 \cdot 10^{-7}, \\ \text{— } B = 10, \quad |b_{dT}(k)| &= 8,0 \cdot 10^{-8}, \quad u_{A_dT}(k) = 1,2 \cdot 10^{-7}, \\ \text{— } B = 12, \quad |b_{dT}(k)| &= 2,8 \cdot 10^{-8}, \quad u_{A_dT}(k) = 3,0 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

W (tab. 53 – 56, dodatek E, str. 227) podano również wartości współczynnika redukcji obciążenia, którego celem jest dokładniejsza analiza wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym na wartość obciążenia estymatora:

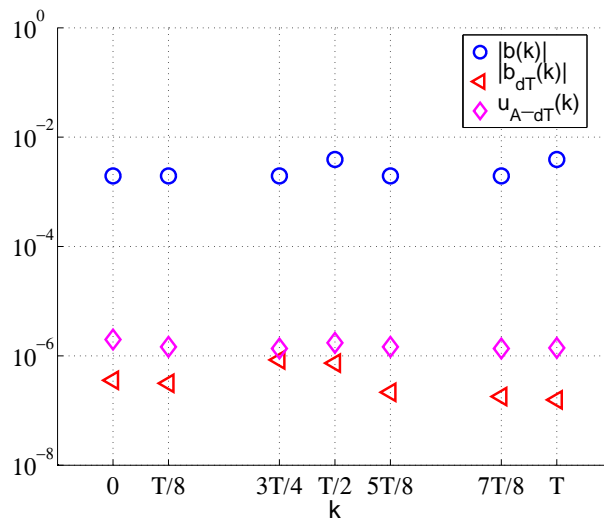
$$Pb_{dT}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dT}(k)|}, \quad (6.160)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego,
- $b_{dT}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji autokorelacji sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym.

Poddając analizie wyniki badań symulacyjnych dla przetwornika 6-bitowego, dla którego wartość obciążenia estymacji sygnału trójkątnego jest naj-

większa, stwierdza się, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie $A_{dT} = 1q$ znacznie ogranicza wpływ operacji kwantowania na wartość obciążenia estymatora zmniejszając tę wartość aż o cztery rzędy wielkości. Zwiększenie liczbę próbek sygnałów lub powtórzeń eksperymentu może dodatkowo wpłynąć na zmniejszenie obciążenia, co np. dla przetwornika 12-bitowego pozwoliłoby uzyskać lepsze wyniki (tab. 56, dodatek E, str. 230).



Rysunek 6.27. b , b_{dT} oraz u_{A-dT} w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątnego oraz jego sumy z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym w funkcji k ($B = 6$)

Podsumowując, można więc stwierdzić, że zgodnie z teorią kwantowania wg Widrowa, sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym dla odpowiednio dobranej wartości kroku kwantowania, umożliwia odtworzenie wartości funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego na podstawie wartości funkcji autokorelacji sygnału skwantowanego. Korzyści z zastosowania sygnału *ditherowego* są tym większe im mniejsza jest rozdzielczość przetwornika A/C.

6.3.7. Dokładność estymacji funkcji autokorelacji sygnału okresowego z sygnałem *ditherowym* – porównanie wyników

Przeprowadzone badania symulacyjne wykazały, że odpowiedni dobór parametrów sygnału *ditherowego* kwantowanego wraz z sygnałem badanym mo-

że spowodować znaczne ograniczenie wpływu kwantowania na obciążenie estymatora funkcji autokorelacji.

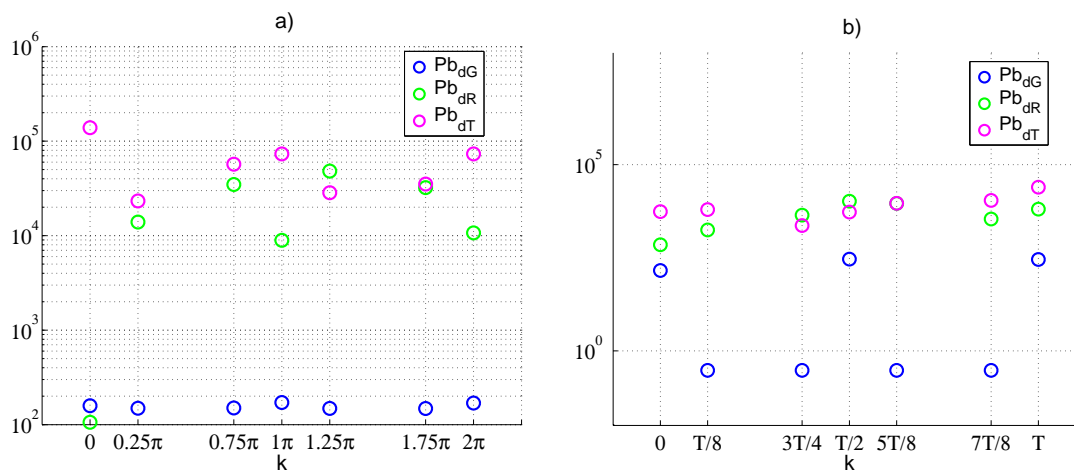
Na podstawie uzyskanych wyników wyciągnięto następujące wnioski:

- uwzględnienie poprawki Shepparda w pomiarze sygnału sinusoidalnego wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem,
- zastosowanie sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym i dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$ w pomiarze z sygnałem sinusoidalnym, bez względu na wartość przesunięcia k oraz liczbę bitów przetwornika, prowadzi do zmniejszenia wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem o dwa rzędy wielkości,
- sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ w pomiarze z sygnałem sinusoidalnym dla $B = 6$ i $k = 0$ powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o dwa rzędy wielkości oraz o cztery rzędy wielkości dla pozostałych wartości przesunięcia k ; dla 10-bitowego przetwornika sygnał ten powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o trzy rzędy wielkości bez względu na wartość przesunięcia,
- sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie $A_{dT} = 1q$ w pomiarze z sygnałem sinusoidalnym powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o co najmniej cztery rzędy wielkości dla przetworników $6 \div 12$ bitowych oraz o trzy rzędy wielkości dla przetworników 14 i 16 bitowych,
- sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia jedynie dla wartości przesunięcia czasowego funkcji autokorelacji sygnału trójkątnego równego $0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$, gdzie T jest okresem sygnału; zastosowanie pozostałych sygnałów *ditherowych*, analizowanych w pracy, pozwala osiągnąć większą redukcję wartości obciążenia (tab. 6.28),
- niepewność standardowa typu A, podobnie jak obciążenie, maleje wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika i dla przetwornika 6-bitowego osiąga wartości rzędu 10^{-6} bez względu na rodzaj stosowanego *dithera* (dla $N = 100\,000$).

Na (rys. 6.28) przedstawiono w formie graficznej wartości współczynni-

ków: Pb_{dG} , Pb_{dR} , Pb_{dT} (tab. 31, 37, 41, 47, 49, 53, dodatek E) będących ilorazem modułu obciążenia estymatora funkcji autokorelacji sygnału badanego a) sinusoidalnego, b) trójkątnego i modułu obciążenia estymatora funkcji autokorelacji sumy sygnału badanego z sygnałem *ditherowym*.

Podsumowując można stwierdzić, że spośród analizowanych sygnałów *ditherowych*, zarówno w pomiarze funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego, jak i trójkątnego najlepsze rezultaty uzyskano kwantując sygnał badany wraz z sygnałem o rozkładzie trójkątnym o amplitudzie równej $A_{dT} = q$ (rys. 6.28). W przypadku pomiaru sygnału trójkątnego porównywalne efekty otrzymano w wyniku zastosowania sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie równej $A_{dR} = 0,5q$.



Rysunek 6.28. Współczynniki: Pb_{dG} , Pb_{dR} , Pb_{dT} w pomiarze funkcji autokorelacji sumy sygnału a) sinusoidalnego b) trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie: normalnym (G), równomiernym (R) i trójkątnym (T) – porównanie wyników dla $B = 6$

Uzyskane w tym rozdziale wyniki dla wartości przesunięcia $k = 0$ są zgodne z wynikami badań estymacji wartości średniokwadratowej przedstawionymi w poprzednich rozdziałach.

6.4. Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej wybranych klas sygnałów w obecności sygnału *ditherowego* – badania własne

Niniejszy rozdział poświęcony jest ocenie wartości obciążenia oraz niepewności standardowej typu A estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów badanych (sinusoidalnych lub trójkątnych) w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładzie: normalnym, równomiernym lub trójkątnym zgodnie z układem (5.6, str. 41). Badania przeprowadzono za pomocą wirtualnego korelatora.

6.4.1. Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych z gaussowskim *ditherem*

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładzie normalnym.

Badania symulacyjne przebiegały w ten sposób, że w każdym z dwóch kanałów wirtualnego korelatora został wygenerowany sygnał sinusoidalny o amplitudzie $A = 4,7$ V i częstotliwości $f_s = 1$ kHz, przesunięciu fazowym $\varphi = 0$ oraz *ditherowe* o rozkładzie normalnym i zerowej wartości średniej. Na podstawie przeprowadzonych badań w rozdziale 6.2.1 (str. 69) ustalono odpowiedni poziom sygnałów *ditherowych* (tab. 6.23) oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetworników:

$$q = \frac{2A}{2^B - 6}. \quad (6.161)$$

Przyjęto liczbę próbek sygnałów o wartości $M = 2^{19}$.

W obu torach korelatora sygnały będące sumą sygnału sinusoidalnego i sygnału *ditherowego* skwantowano kolejno w przetworniku A/C o liczbie bitów $B = 6, 8, 10, 12$. Ustalono liczbę powtórzeń eksperymentu $N = 100\,000$. Do wyznaczania estymatorów funkcji korelacji wzajemnej pobierano M próbek z pełnego okresu sygnału. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c

zawarto w (tab. 6.23).

Tabela 6.23. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie normalnym

$A[V]$	$f_s[Hz]$	φ	σ_{dG}	σ_{dG_max}	M	N	B
4, 7	1 000	0	$0,5q$	$1q$	2^{19}	100 000	6, 8, 10, 12

Po wprowadzeniu do wirtualnego korelatora obliczonych parametrów, dokonano pomiaru wartości obciążenia określonego na podstawie zależności:

$$b_{dG} = \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) - R_{xy}^d(k), \quad (6.162)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji korelacji wzajemnej dla $k = 0, 0,25\pi, 0,5\pi, 0,75\pi, 1\pi, 1,25\pi, 1,75\pi, 2\pi$ i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xyi}^d(k, M), \quad (6.163)$$

gdzie $\tilde{R}_{xyi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji korelacji wzajemnej:

$$\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot y_{q,i}(j+k), \quad (6.164)$$

- $R_{xy}^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_{xy}^d(k) = \frac{A_1 \cdot A_2}{2} \cdot \cos(k). \quad (6.165)$$

Wartość niepewności standardowej typu A obliczono na podstawie:

$$u_{A_dG} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.166)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 57 – 60, dodatek F, str. 232) zawarto wyniki korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie normalnym dla parametrów zawartych w (tab. 6.23). Podobnie,

jak w poprzednich rozdziałach, wprowadzono współczynnik redukcji obciążenia w celu dokładnego zbadania, ile razy sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym zmniejsza wartość obciążenia $b(k)$:

$$Pb_{dG}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dG}(k)|}, \quad (6.167)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych,
- $b_{dG}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie normalnym.

Na podstawie uzyskanych wyników zaobserwowano:

- obciążenie oraz niepewność standardowa typu A zależą od liczby bitów przetwornika i maleją wraz ze wzrostem ich wartości (rys. 6.29 a),
- wartość bezwzględna z obciążenia, jakie może wystąpić zarówno w pomiarze korelacji wzajemnej sygnału sinusoidalnego oraz jego sumy z *ditherem* o rozkładzie normalnym osiąga maksymalną wartość dla argumentów $k = j \cdot \pi, j \in N$ (rys. 6.29 b)); w zależności od rozdzielczości przetwornika, wynosi odpowiednio:

$$\begin{aligned} \text{— } B = 6, \quad |b(k)| &= 1,5 \cdot 10^{-2}, \quad |b(k)| - \frac{q^2}{12} = 1,3 \cdot 10^{-2}, \quad |b_{dG}(k)| = 9,2 \cdot 10^{-5}, \\ \text{— } B = 8, \quad |b(k)| &= 1,8 \cdot 10^{-3}, \quad |b(k)| - \frac{q^2}{12} = 1,7 \cdot 10^{-3}, \quad |b_{dG}(k)| = 1,0 \cdot 10^{-5}, \\ \text{— } B = 10, \quad |b(k)| &= 2,2 \cdot 10^{-4}, \quad |b(k)| - \frac{q^2}{12} = 2,1 \cdot 10^{-4}, \quad |b_{dG}(k)| = 1,1 \cdot 10^{-6}, \\ \text{— } B = 12, \quad |b(k)| &= 2,5 \cdot 10^{-5}, \quad |b(k)| - \frac{q^2}{12} = 2,5 \cdot 10^{-5}, \quad |b_{dG}(k)| = 2,1 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

- niepewność standardowa typu A, podobnie jak obciążenie, osiąga mniejsze wartości od wartości obciążenia estymatora funkcji autokorelacji; w zależności od rozdzielczości przetwornika wynosi odpowiednio:

$$\begin{aligned} \text{— } B = 6, \quad u_{A_{dG}}(k) &= 1,9 \cdot 10^{-6}, \\ \text{— } B = 8, \quad u_{A_{dG}}(k) &= 4,5 \cdot 10^{-7}, \\ \text{— } B = 10, \quad u_{A_{dG}}(k) &= 1,1 \cdot 10^{-7}, \\ \text{— } B = 12, \quad u_{A_{dG}}(k) &= 2,7 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

W przeciwieństwie do wyników estymacji funkcji autokorelacji (rozdział 6.3) otrzymano takie same wartości $u_{A-dG}(k)$ dla poszczególnych wartości przesunięcia k .

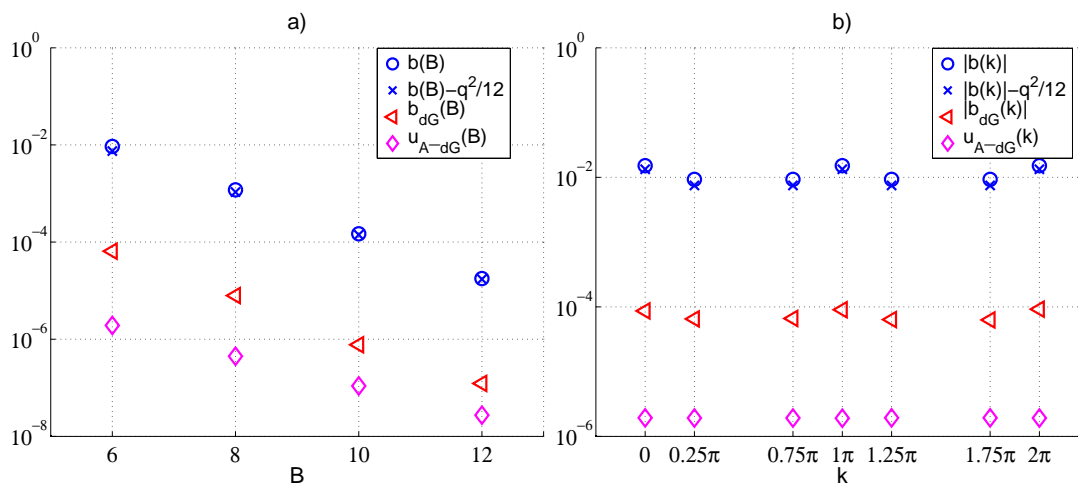
- wartość współczynnika $Pb_{dG}(k)$, w zależności od liczby bitów przetwornika, wynosi odpowiednio:

$$\text{— } B = 6, \quad Pb_{dG}(k) = (1, 4 \div 1, 7) \cdot 10^2,$$

$$\text{— } B = 8, \quad Pb_{dG}(k) = (1, 5 \div 2, 0) \cdot 10^2,$$

$$\text{— } B = 10, \quad Pb_{dG}(k) = (1, 4 \div 2, 0) \cdot 10^2,$$

$$\text{— } B = 12, \quad Pb_{dG}(k) = (1, 2 \div 2, 5) \cdot 10^2.$$



Rysunek 6.29. b , b_{dG} oraz u_{A-dG} w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie normalnym a) w funkcji B ($k = 0, 25\pi$), b) w funkcji k ($B = 6$)

Biorąc pod uwagę wyniki uzyskane dla przetworników 6, 8 i 10-bitowych, dla których procentowa różnica pomiędzy wynikami analizy matematycznej, a symulacji w wirtualnym korelatorze estymacji wartości średniokwadratowej nie przekroczyła 50% (rozdział 6.1), można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym i dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$, bez względu na liczbę bitów zastosowanego przetwornika, powoduje od 140 do 200-krotne zmniejszenie wartości obciążenia. Porównując uzyskane wyniki z wynikami estymacji funkcji autokorelacji zaobserwowano, że obciążenie oraz niepewność standardowa typu A osiągają podobne wartości.

6.4.2. Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładzie równomiernym. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.4.1 (str. 129). Na podstawie przeprowadzonych badań w rozdziale 6.2.2 (str. 75) ustalono odpowiedni poziom sygnałów *ditherowych* (tab. 6.24) oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetworników:

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.168)$$

W obu torach korelatora ustawiono takie same parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c (tab. 6.24).

Tabela 6.24. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie równomiernym

$A[\text{V}]$	$f_s[\text{Hz}]$	φ	$A_{dR}[\text{V}]$	$A_{dR_{max}}[\text{V}]$	M	N	B
4, 9	1 000	0	$0,5q$	$1q$	2^{19}	100 000	6, 8, 10, 12

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dR} = \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) - R_{xy}^d(k), \quad (6.169)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji korelacji wzajemnej dla $k = 0, 0,25\pi, 0,5\pi, 0,75\pi, 1\pi, 1,25\pi, 1,75\pi, 2\pi$ i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xyi}^d(k, M), \quad (6.170)$$

gdzie $\tilde{R}_{xyi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji korelacji wzajemnej:

$$\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot y_{q,i}(j+k), \quad (6.171)$$

– $R_{xy}^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_{xy}^d(k) = \frac{A_1 \cdot A_2}{2} \cdot \cos(k). \quad (6.172)$$

Wartość niepewności standardowej typu A obliczono na podstawie:

$$u_{A_dR} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.173)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 61 – 64, dodatek F, str. 236) zawarto wyniki korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie równomiernym dla parametrów zawartych w (tab. 6.24). Podobnie, jak w poprzednich rozdziałach, wprowadzono współczynnik redukcji obciążenia w celu zbadania wpływu sygnał *ditherowego* o rozkładzie równomiernym na wartość obciążenia $b(k)$:

$$Pb_{dR}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dR}(k)|}, \quad (6.174)$$

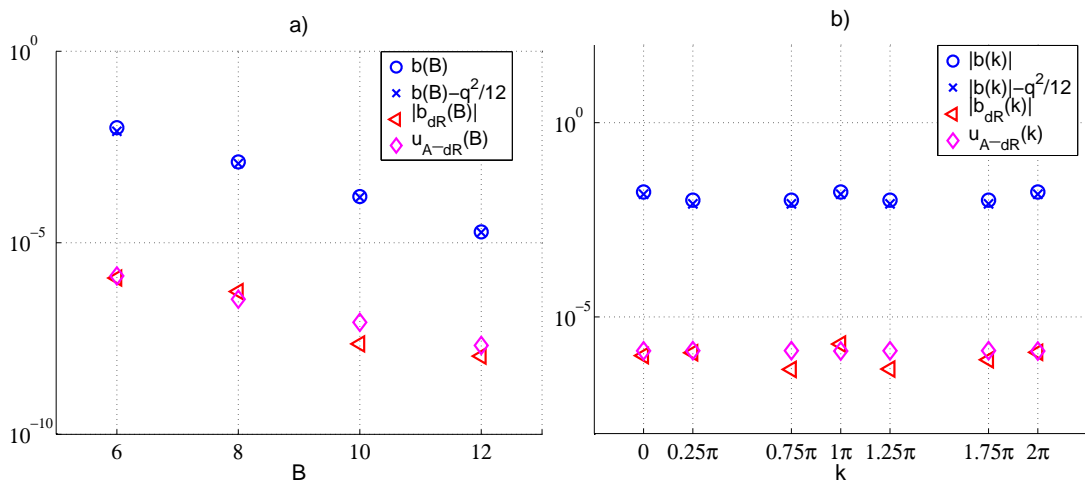
gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych,
- $b_{dR}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie równomiernym.

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że:

- zastosowanie poprawki Shepparda do wyniku estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych może zmniejszyć wartość obciążenia $b(k)$ (rys. 6.30),
- obciążenie oraz niepewność standardowa typu A zależą od liczby bitów przetwornika i maleją wraz ze wzrostem ich wartości (rys. 6.30 a)),
- w zależności od rozdzielczości przetwornika, moduł obciążenia oraz niepewność standardowa typu A przyjmują następujące, maksymalne wartości dla $N = 100\,000$ (w celach porównawczych podano także wartości $b(k)$):
 - $B = 6$, $|b(k)| = 1,6 \cdot 10^{-2}$, $|b_{dR}(k)| = 2,0 \cdot 10^{-6}$, $u_{A_dR}(k) = 1,4 \cdot 10^{-6}$,

- $B = 8$, $|b(k)| = 1,9 \cdot 10^{-3}$, $|b_{dR}(k)| = 5,9 \cdot 10^{-7}$, $u_{A_{dR}}(k) = 3,3 \cdot 10^{-7}$,
 - $B = 10$, $|b(k)| = 2,4 \cdot 10^{-4}$, $|b_{dR}(k)| = 4,6 \cdot 10^{-7}$, $u_{A_{dR}}(k) = 8,4 \cdot 10^{-8}$,
 - $B = 12$, $|b(k)| = 2,8 \cdot 10^{-5}$, $|b_{dR}(k)| = 3,9 \cdot 10^{-8}$, $u_{A_{dR}}(k) = 2,1 \cdot 10^{-8}$.
- w większości pomiarów zaobserwowano, że obciążenie nieznacznie przewyższa wartości obciążenia będącego wynikiem estymacji funkcji autokorelacji analizowanych sygnałów,
 - z kolei w pomiarze autokorelacji obserwuje się większy rozrzut wyników; dodatkowo wyniki $u_{A_{dR}}(k)$ dla poszczególnych wartości przesunięć k różnią się bardziej niż w przypadku pomiaru korelacji wzajemnej,
 - wartość współczynnika $Pb_{dR}(k)$, w zależności od liczby bitów przetwornika, przyjmuje następujące wartości:
 - $B = 6$, $Pb_{dR}(k) = 8,1 \cdot 10^3 \div 2,3 \cdot 10^4$,
 - $B = 8$, $Pb_{dR}(k) = 2,2 \cdot 10^3 \div 2,5 \cdot 10^5$,
 - $B = 10$, $Pb_{dR}(k) = 1,5 \cdot 10^3 \div 1,2 \cdot 10^4$,
 - $B = 12$, $Pb_{dR}(k) = 5,3 \cdot 10^2 \div 8,0 \cdot 10^3$.



Rysunek 6.30. b , b_{dG} oraz $u_{A_{dG}}$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym a) w funkcji

$$B \ (k = 0, 25\pi), \text{ b) w funkcji } k \ (B = 6)$$

Na podstawie uzyskanych wyników (tab. 61 – 64, dodatek F, str. 236) można stwierdzić, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ w pomiarze funkcji korelacji wzajemnej powoduje zmniejszenie

wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem o trzy, a nawet o cztery rzędy wielkości (rys. 6.30). Porównując uzyskane wyniki z wynikami estymacji funkcji autokorelacji zaobserwowano, że obciążenie oraz niepewność standardowa typu A osiągają podobne wartości.

Poddając analizie wyrażenie na obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów badanych z sygnałami *ditherowymi* (5.29) można stwierdzić, że jednym z warunków niewystępowania obciążenia jest zerowa wartość funkcji charakterystycznych sygnałów *ditherowych*. Zbadano, że funkcja charakterystyczna sygnału o rozkładzie równomiernym dla $A_{dR} = k \cdot \frac{q}{2}$, gdzie $k \in N \setminus \{0\}$ przyjmuje wartość równą zero. Na tej podstawie można stwierdzić, że sygnały *ditherowe* o rozkładzie równomiernym stwarzają możliwość odtworzenia funkcji korelacji wzajemnej sygnałów na podstawie funkcji korelacji wzajemnej sygnałów skwantowanych. W praktyce oznacza to znaczne obniżenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem, co potwierdzają przedstawione wyniki badań symulacyjnych.

6.4.3. Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.4.1 (str. 129). Na podstawie przeprowadzonych badań w rozdziale 6.2.3 (str. 84) ustalono odpowiedni poziom sygnałów *ditherowych* (tab. 6.25) oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetworników:

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.175)$$

W obu torach korelatora ustawiono takie same parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c zawartych w (tab. 6.25).

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dT} = \overline{\widetilde{R}_{xy}^d}(k, N) - R_{xy}^d(k), \quad (6.176)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji korelacji wzajemnej dla $k = 0, 0, 25\pi, 0, 5\pi, 0, 75\pi, 1\pi, 1, 25\pi, 1, 75\pi, 2\pi$ i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xyi}^d(k, M), \quad (6.177)$$

gdzie $\tilde{R}_{xyi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji korelacji wzajemnej:

$$\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot y_{q,i}(j+k), \quad (6.178)$$

- $R_{xy}^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_{xy}^d(k) = \frac{A_1 \cdot A_2}{2} \cdot \cos(k). \quad (6.179)$$

Wartość niepewności standardowej typu A obliczono na podstawie:

$$u_{A,dT} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.180)$$

Tabela 6.25. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym

A [V]	f_s [Hz]	φ	A_{dT}, A_{dT_max} [V]	M	N	B
4,9	1 000	0	$1q$	2^{19}	100 000	6, 8, 10, 12

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 65 – 68, dodatek F, str. 240) zawarto wyniki korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym dla parametrów zawartych w (tab. 6.25). Podobnie, jak w poprzednich rozdziałach, wprowadzono współczynnik redukcji obciążenia w celu analizy wpływu sygnał *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym na wartość obciążenia $b(k)$:

$$Pb_{dT}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dT}(k)|}, \quad (6.181)$$

gdzie:

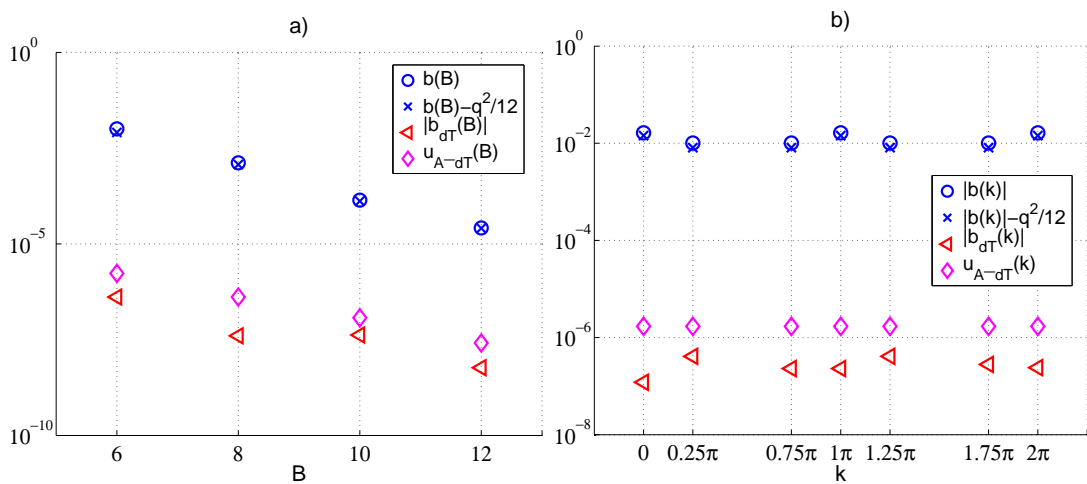
- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych,
- $b_{dT}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów sinusoidalnych i *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym.

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że:

- obciążenie oraz niepewność standardowa typu A zależą od liczby bitów przetwornika i maleją wraz ze wzrostem ich wartości (rys. 6.31 a)),
- zastosowanie poprawki Shepparda do wyniku estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych może spowodować zmniejszenie wartości obciążenia $b(k)$ (rys. 6.31 b)),
- w zależności od rozdzielczości przetwornika, moduł obciążenia $|b(k)|$ oraz $|b_{dT}(k)|$ przyjmują następujące, maksymalne wartości ($k \neq 0, 5\pi$):
 - $B = 6, \quad |b(k)| = 1,6 \cdot 10^{-2}, \quad |b_{dT}(k)| = 3,1 \cdot 10^{-7},$
 - $B = 8, \quad |b(k)| = 1,9 \cdot 10^{-3}, \quad |b_{dT}(k)| = 1,4 \cdot 10^{-7},$
 - $B = 10, \quad |b(k)| = 2,4 \cdot 10^{-4}, \quad |b_{dT}(k)| = 4,9 \cdot 10^{-8},$
 - $B = 12, \quad |b(k)| = 2,8 \cdot 10^{-5}, \quad |b_{dT}(k)| = 5,9 \cdot 10^{-9},$
- niepewność standardowa typu A, bez względu na wartość przesunięcia k , dla $N = 100\,000$ przyjmuje następujące wartości:
 - $B = 6, \quad u_{A_{dT}}(k) = 1,7 \cdot 10^{-6},$
 - $B = 8, \quad u_{A_{dT}}(k) = 4,1 \cdot 10^{-7},$
 - $B = 10, \quad u_{A_{dT}}(k) = 1,1 \cdot 10^{-7},$
 - $B = 12, \quad u_{A_{dT}}(k) = (2,5 \div 2,6) \cdot 10^{-8},$
- wartości współczynnika $Pb_{dT}(k)$, w zależności od liczby bitów przetwornika, są następujące:
 - $B = 6, \quad Pb_{dT}(k) = 2,4 \cdot 10^4 \div 1,3 \cdot 10^5,$
 - $B = 8, \quad Pb_{dT}(k) = 9,1 \cdot 10^3 \div 4,2 \cdot 10^4,$
 - $B = 10, \quad Pb_{dT}(k) = 2,8 \cdot 10^4 \div 1,2 \cdot 10^4,$
 - $B = 12, \quad Pb_{dT}(k) = 1,4 \cdot 10^3 \div 1,6 \cdot 10^4.$

Poddając analizie wyrażenie (5.29) można stwierdzić, że warunkiem niewystępowania obciążenia estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów przetwarzanych w obecności sygnałów *ditherowych* jest zerowa wartość funk-

cji charakterystycznych sygnałów *ditherowych*. Zbadano, że $\Phi_{dT} = 0$ dla $A_{dT} = k \cdot q$, gdzie $k \in N \setminus \{0\}$. Zastosowanie dwóch niezależnych sygnałów *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym stwarza więc możliwość odtworzenia funkcji korelacji wzajemnej sygnałów na podstawie funkcji korelacji wzajemnej sygnałów skwantowanych. Na podstawie przedstawionych wyników badań symulacyjnych można stwierdzić, że w praktyce oznacza to znaczne obniżenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem.



Rysunek 6.31. b , b_{dT} oraz u_{A-dT} w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym a) w funkcji B ($k = 0, 25\pi$), b) w funkcji k ($B = 6$)

6.4.4. Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych z gaussowskim *ditherem*

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładzie normalnym. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.4.1 (str. 129). Na podstawie przeprowadzonych badań w rozdziale 6.2.1 (str. 69) ustalono odpowiedni poziom sygnałów *ditherowych* (tab. 6.26) oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetworników:

$$q = \frac{2A}{2^B - 6}. \quad (6.182)$$

W obu torach korelatora ustawiono takie same parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c zawartych w (tab. 6.26).

Tabela 6.26. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie normalnym

$A[V]$	$f_s[Hz]$	φ	σ_{dG}	σ_{dG_max}	M	N	B
4,7	1 000	0	0,5q	1q	10^6	100 000	6,8

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dG} = \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) - R_{xy}^d(k), \quad (6.183)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji korelacji wzajemnej dla $k = 0, \frac{1}{8}T, \frac{1}{4}T, \frac{3}{8}T, \dots, T$ (dla $T = 1/f_s$) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xyi}^d(k, M), \quad (6.184)$$

gdzie $\tilde{R}_{xyi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji korelacji wzajemnej:

$$\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot y_{q,i}(j+k), \quad (6.185)$$

- $R_{xy}^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_{xy}^d(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t+k\Delta t) dt, \quad (6.186)$$

gdzie:

$$x(t) = y(t) = 8 \cdot \frac{A}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \sin\left[(2i+1) \cdot 2\frac{\pi}{T} \cdot t\right]}{(2i+1)^2} \quad (6.187)$$

są sygnałami trójkątnymi o okresach T opisanymi z zastosowaniem szeregu Fouriera.

Wartość niepewności standardowej typu A obliczono na podstawie:

$$u_{A_dG} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.188)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 69, 70, dodatek F, str. 244) zawarto wyniki korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie normalnym dla parametrów zawartych w (tab. 6.26).

W celu zbadania, ile razy sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym powoduje zmniejszenie wartości obciążenia $b(k)$, wprowadzono (podobnie, jak w poprzednich rozdziałach) następujący współczynnik redukcji obciążenia:

$$Pb_{dG}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dG}(k)|}, \quad (6.189)$$

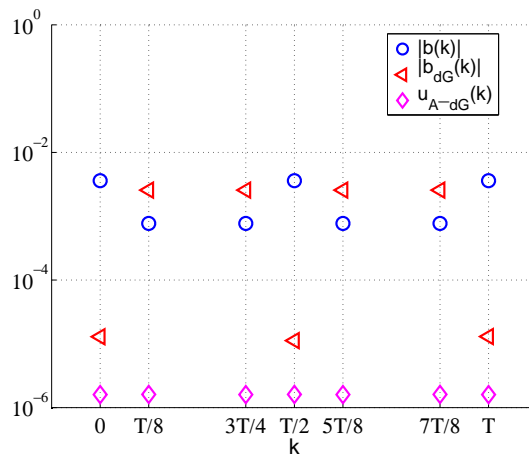
gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych,
- $b_{dG}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie normalnym.

Na podstawie wyników przeprowadzonych badań symulacyjnych można stwierdzić, że:

- sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym powoduje zmniejszenie wartości obciążenia jedynie dla wartości szczytowych funkcji korelacji wzajemnej (rys. 6.32):
 - $B = 6$, $|b(k)| = 3,6 \cdot 10^{-3}$, $|b_{dG}(k)| = (1,1 \div 1,3) \cdot 10^{-5}$,
 - $B = 8$, $|b(k)| = 2,2 \cdot 10^{-4}$, $|b_{dG}(k)| = (2,9 \div 4,2) \cdot 10^{-7}$.
- dla analizowanych w pracy wartości funkcji korelacji wzajemnej ($\frac{1}{8}T$, $\frac{3}{8}T$, $\frac{5}{8}T$ oraz $\frac{7}{8}T$) moduł obciążenia $|b_{dG}(k)|$, w zależności od liczby bitów przetwornika, przyjmuje kolejno wartości: $7,7 \cdot 10^{-4}$, $2,5 \cdot 10^{-3}$; dla tych wartości przesunięcia k obciążenie $|b_{dG}(k)|$ przewyższa wartość obciążenia $|b(k)|$ uzyskanego w drodze estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów przetwarzanych bez obecności sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym,

- niepewność standardowa typu A (dla $N = 100\,000$) maleje wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika i osiąga takie same wartości bez względu na wartość przesunięcia:
 - $B = 6$, $u_{A_{dG}}(k) = 1,6 \cdot 10^{-6}$,
 - $B = 8$, $u_{A_{dG}}(k) = 3,7 \cdot 10^{-7}$,
- wartość współczynnika $Pb_{dG}(k)$ dla wartości szczytowych funkcji korelacji wzajemnej, bez względu na liczbę bitów przetwornika, osiąga wartości rzędu 10^2 .



Rysunek 6.32. b , b_{dG} oraz $u_{A_{dG}}$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie normalnym w funkcji k ($B = 6$)

Na podstawie przeprowadzonej w poprzednich rozdziałach analizy wyników estymacji funkcji autokorelacji oraz przedstawionych wyników w tym rozdziale, stwierdza się, że kwantowanie sygnału przetwarzanego wraz z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie normalnym o dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$ nie gwarantuje odtworzenia wartości funkcji korelacji sygnału na podstawie wartości funkcji korelacji sygnału skwantowanego. Dodatkowo udowodniono, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym w pomiarze z sygnałem trójkątnym wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia jedynie dla wartości przesunięcia czasowego funkcji korelacyjnych $k = 0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$.

6.4.5. Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych z *ditherem* o rozkładzie równomiernym

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładzie równomiernym. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.4.1 (str. 129). Na podstawie przeprowadzonych badań w rozdziale 6.2.2 (str. 75) ustalono odpowiedni poziom sygnałów *ditherowych* (tab. 6.27) oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetworników:

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.190)$$

W obu torach korelatora ustawiono takie same parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c zawartych w (tab. 6.27).

Tabela 6.27. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie równomiernym

A [V]	f_s [Hz]	φ	A_{dR} [V]	A_{dR_max} [V]	M	N	B
4,9	1 000	0	$0,5q$	$1q$	10^6	100 000	6, 8, 10, 12

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dR} = \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) - R_{xy}^d(k), \quad (6.191)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji korelacji wzajemnej dla $k = 0, \frac{1}{8}T, \frac{1}{4}T, \frac{3}{8}T, \dots, T$ (dla $T = 1/f_s$) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xyi}^d(k, M), \quad (6.192)$$

gdzie $\tilde{R}_{xyi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji korelacji wzajemnej:

$$\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot y_{q,i}(j+k), \quad (6.193)$$

– $R_{xy}^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_{xy}^d(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t + k\Delta t) dt, \quad (6.194)$$

gdzie:

$$x(t) = y(t) = 8 \cdot \frac{A}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \sin \left[(2i + 1) \cdot 2 \frac{\pi}{T} \cdot t \right]}{(2i + 1)^2} \quad (6.195)$$

są sygnałami trójkątnymi o okresach T opisanymi z zastosowaniem szeregu Fouriera.

Wartość niepewności standardowej typu A obliczono na podstawie:

$$u_{A_dR} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_{xy}^d(k, N)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.196)$$

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 71 – 74, dodatek F, str. 246) zawarto wyniki korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie równomiernym dla parametrów zawartych w (tab. 6.27).

W celu zbadania, ile razy sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym zmniejsza wartość obciążenia $b(k)$, wprowadzono (podobnie jak w poprzednich rozdziałach) następujący współczynnik redukcji obciążenia:

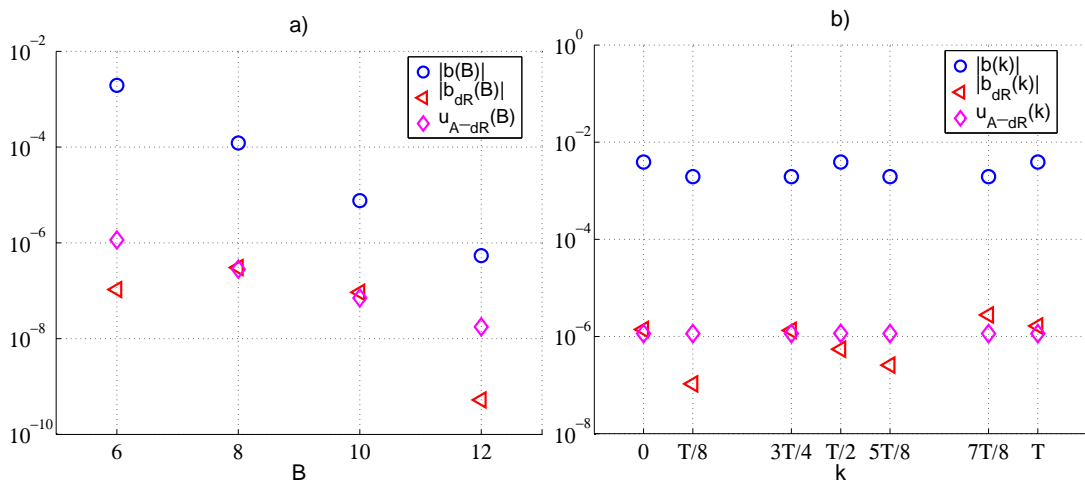
$$Pb_{dR}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dR}(k)|}, \quad (6.197)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych,
- $b_{dR}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie równomiernym.

Na podstawie wyników przeprowadzonych badań symulacyjnych można stwierdzić, że:

- sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym ma istotny wpływ na zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem (rys. 6.33):
 - $B = 6$, $|b(k)| = 3,9 \cdot 10^{-3}$, $|b_{dR}(k)| = 1,1 \cdot 10^{-7} \div 2,8 \cdot 10^{-6}$,
 - $B = 8$, $|b(k)| = 2,4 \cdot 10^{-4}$, $|b_{dR}(k)| = 1,4 \cdot 10^{-8} \div 6,4 \cdot 10^{-7}$,
 - $B = 10$, $|b(k)| = 1,5 \cdot 10^{-5}$, $|b_{dR}(k)| = 1,0 \cdot 10^{-9} \div 9,4 \cdot 10^{-8}$,
 - $B = 12$, $|b(k)| = 1,1 \cdot 10^{-6}$, $|b_{dR}(k)| = 3,2 \cdot 10^{-10} \div 2,4 \cdot 10^{-8}$,
- niepewność standardowa typu A maleje wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika i dla $N = 100\,000$ osiąga wartości odpowiednio:
 - $B = 6$, $u_{A_dR}(k) = (1,1 \div 1,2) \cdot 10^{-6}$,
 - $B = 8$, $u_{A_dR}(k) = 2,8 \cdot 10^{-7}$,
 - $B = 10$, $u_{A_dR}(k) = 7,0 \cdot 10^{-8}$,
 - $B = 12$, $u_{A_dR}(k) = (1,7 \div 1,8) \cdot 10^{-8}$,
- współczynnik $Pb_{dR}(k)$ dla $B = 6 \div 10$ osiąga wartości rzędu $10^2 \div 10^3$.



Rysunek 6.33. b , b_{dR} oraz u_{A_dR} w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym a) w funkcji B ($k = T/8$), b) w funkcji k ($B = 6$)

Poddając analizie wartości obciążenia $b_{dR}(k)$ oraz współczynnika $Pb_{dR}(k)$ można stwierdzić, że w zależności od rozdzielczości przetworników, sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dT} = 0,5q$ powoduje zmniejszenie wartości obciążenia nawet o trzy rzędy wielkości (tab. 71 – 74,

dodatek F, str. 246). Natomiast niepewność standardowa typu A dla liczby powtórzeń $N = 100\ 00$ osiąga maksymalną wartość $1,2 \cdot 10^{-6}$.

Dodatkowo funkcja charakterystyczna sygnału o rozkładzie równomiernym dla $A_{dR} = k \cdot \frac{q}{2}$, gdzie $k \in N \setminus \{0\}$ przyjmuje wartość równą zero. Zatem zastosowanie dwóch niezależnych sygnałów *ditherowych* o takiej amplitudzie spowoduje wyzerowanie obciążenia zgodnie z (5.29).

Podsumowując, można stwierdzić, że w praktyce zastosowanie sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych powoduje znaczne zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem. Korzyści wynikające ze stosowania *dithera* o rozkładzie równomiernym znacznie przewyższają korzyści wynikające ze stosowania sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym o dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$.

6.4.6. Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

Przebieg eksperymentu – pomiar w obecności sygnału *ditherowego*

W ramach eksperymentu wykonano serię pomiarów wartości funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym. Eksperyment przeprowadzono w analogiczny sposób jak w rozdziale 6.4.1 (str. 129). Na podstawie przeprowadzonych badań w rozdziale 6.2.3 (str. 84) ustalono odpowiedni poziom sygnałów *ditherowych* (tab. 6.28) oraz wyznaczono zależność na krok kwantowania przetworników:

$$q = \frac{2A}{2^B - 2}. \quad (6.198)$$

W obu torach korelatora ustawiono takie same parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c zawartych w (tab. 6.28).

W celu zbadania wartości obciążenia przeprowadzono badania symulacyjne na podstawie zależności:

$$b_{dT} = \overline{\widetilde{R}_{xy}^d}(k, N) - R_{xy}^d(k), \quad (6.199)$$

gdzie:

- $\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji funkcji korelacji wzajemnej dla $k = 0, \frac{1}{8}T, \frac{1}{4}T, \frac{3}{8}T, \dots, T$ (dla $T = 1/f_s$) i wyraża się wzorem:

$$\overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{R}_{xyi}^d(k, M), \quad (6.200)$$

gdzie $\tilde{R}_{xyi}^d(k, M)$ jest i -tym wynikiem estymacji funkcji korelacji wzajemnej:

$$\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x_{q,i}(j) \cdot y_{q,i}(j+k), \quad (6.201)$$

- $R_{xy}^d(k)$ jest wartością dokładną wyrażoną wzorem:

$$R_{xy}^d(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot y(t+k\Delta t) dt, \quad (6.202)$$

gdzie:

$$x(t) = y(t) = 8 \cdot \frac{A}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot \sin\left[(2i+1) \cdot 2\frac{\pi}{T} \cdot t\right]}{(2i+1)^2} \quad (6.203)$$

są sygnałami trójkątnymi o okresach T opisanymi z zastosowaniem szeregu Fouriera.

Wartość niepewności standardowej typu A obliczono na podstawie:

$$u_{A_dT} = \left(\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left[\tilde{R}_{xyi}^d(k, M) - \overline{\tilde{R}_{xy}^d}(k, N) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.204)$$

Tabela 6.28. Parametry sygnałów oraz przetwarzania a-c estymacji funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym

A [V]	f_s [Hz]	φ	A_{dT}, A_{dT_max} [V]	M	N	B
4,9	1 000	0	1 q	10 ⁶	100 000	6, 8, 10, 12

Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W (tab. 75 – 78, dodatek F, str. 250) zawarto wyniki korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie

trójkątnym dla parametrów zawartych w (tab. 6.28). Na (rys. 6.34) przedstawiono w formie graficznej wyniki dla przetwornika 6-bitowego.

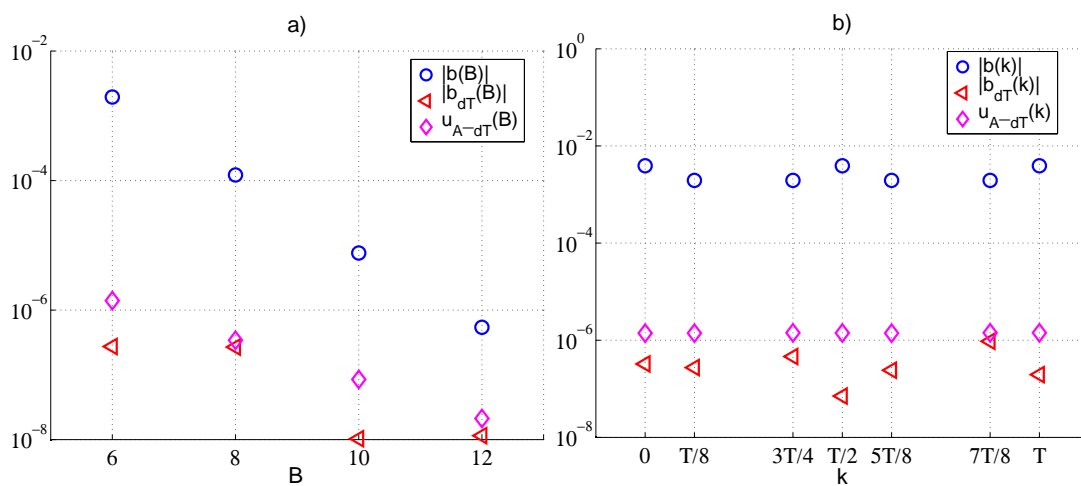
Wprowadzony współczynnik redukcji obciążenia:

$$Pb_{dT}(k) = \frac{|b(k)|}{|b_{dT}(k)|}, \quad (6.205)$$

gdzie:

- $b(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych,
- $b_{dT}(k)$ – obciążenie estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów trójkątnych i *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym

umożliwi zbadanie wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie trójkątnym na wartość obciążenia $b(k)$.



Rysunek 6.34. b , b_{dT} oraz u_{A-dT} w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym a) w funkcji B ($k = T/8$), b) w funkcji k ($B = 6$)

Na podstawie wyników przeprowadzonych badań symulacyjnych można stwierdzić, że:

- sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym w pomiarze z sygnałem trójkątnym skutecznie wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem (rys. 6.34):

- $B = 6$, $|b(k)| = 3,9 \cdot 10^{-3}$, $|b_{dT}(k)| = 7,1 \cdot 10^{-8} \div 9,5 \cdot 10^{-7}$,
 - $B = 8$, $|b(k)| = 2,4 \cdot 10^{-4}$, $|b_{dT}(k)| = 9,1 \cdot 10^{-8} \div 5,2 \cdot 10^{-7}$,
 - $B = 10$, $|b(k)| = 1,5 \cdot 10^{-5}$, $|b_{dT}(k)| = 8,2 \cdot 10^{-9} \div 7,5 \cdot 10^{-8}$,
 - $B = 12$, $|b(k)| = 1,1 \cdot 10^{-6}$, $|b_{dT}(k)| = 2,4 \cdot 10^{-9} \div 3,2 \cdot 10^{-8}$.
- dla analizowanych w pracy wartości funkcji korelacji wzajemnej ($\frac{1}{8}T$, $\frac{3}{8}T$, $\frac{5}{8}T$ oraz $\frac{7}{8}T$), w zależności od rozdzielczości przetwornika, moduł obciążenia $b(k)$ wynosi odpowiednio:
- $B = 6$, $|b(k)| = 2,0 \cdot 10^{-3}$,
 - $B = 8$, $|b(k)| = 1,2 \cdot 10^{-4}$,
 - $B = 10$, $|b(k)| = 7,6 \cdot 10^{-6}$,
 - $B = 12$, $|b(k)| = 5,4 \cdot 10^{-7}$,
- niepewność standardowa typu A maleje wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika i dla $N = 100\,000$ osiąga wartości odpowiednio:
- $B = 6$, $u_{A_{dT}}(k) = 1,4 \cdot 10^{-6}$,
 - $B = 8$, $u_{A_{dT}}(k) = (3,4 \div 3,5) \cdot 10^{-7}$,
 - $B = 10$, $u_{A_{dT}}(k) = (8,5 \div 8,6) \cdot 10^{-8}$,
 - $B = 12$, $u_{A_{dT}}(k) = (2,1 \div 2,2) \cdot 10^{-8}$,
- współczynnik $Pb_{dT}(k)$ dla $k = j \cdot \pi$, w zależności od liczby bitów przetwornika, przyjmuje następujące wartości:
- $B = 6$, $Pb_{dT}(k) = 2,1 \cdot 10^3 \div 5,5 \cdot 10^4$,
 - $B = 8$, $Pb_{dT}(k) = 2,5 \cdot 10^2 \div 8,0 \cdot 10^2$,
 - $B = 10$, $Pb_{dT}(k) = 1,3 \cdot 10^2 \div 7,4 \cdot 10^2$,
 - $B = 12$, $Pb_{dT}(k) = 35 \div 3,0 \cdot 10^2$.

Funkcja charakterystyczna sygnału o rozkładzie trójkątnym osiąga wartość równą zero dla $A_{dT} = k \cdot q$, gdzie $k \in N \setminus \{0\}$. Możliwe jest więc sprowadzenie do zera wartości obciążenia (5.29) poprzez zastosowanie w każdym z dwóch kanałów korelatora niezależnych sygnałów *ditherowych* o tak dobranych amplitudach.

Na podstawie wyników badań symulacyjnych (wartości obciążenia $b_{dT}(k)$ oraz wartości współczynnika $Pb_{dT}(k)$) zaobserwowano, że sygnał *ditherowy*

o rozkładzie trójkątnym powoduje zmniejszenie wartości obciążenia nawet o cztery rzędy wielkości (tab. 75, dodatek F, str. 250).

Podsumowując, można stwierdzić, że w praktyce sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie równej wartości kroku kwantowania przetwornika w pomiarze z sygnałem trójkątnym powoduje znaczne zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem.

6.4.7. Dokładność estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnałów okresowego z sygnałami *ditherowymi* – porównanie wyników

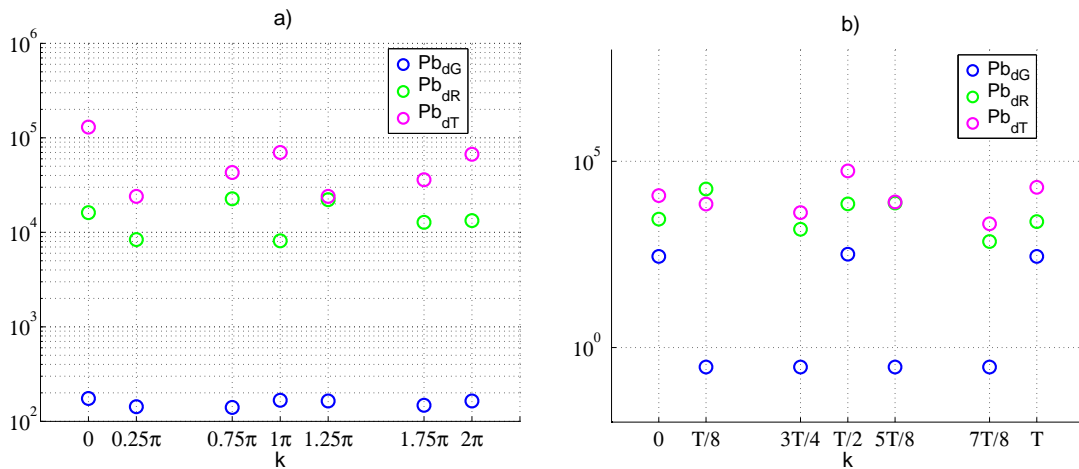
Przeprowadzone badania symulacyjne wykazały, że odpowiednio dobrany poziom każdego ze stosowanych sygnałów *ditherowych* w pomiarze funkcji korelacji wzajemnej wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem.

Analizując uzyskane wyniki można stwierdzić, że:

- uwzględnienie poprawki Shepparda w pomiarze sygnałów sinusoidalnych wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem,
- zastosowanie sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym i dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$ w pomiarze z sygnałami sinusoidalnymi, bez względu na wartość przesunięcia k oraz liczbę bitów przetwornika, powoduje zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem o dwa rzędy wielkości,
- w pomiarze z sygnałami trójkątnymi *dither* o rozkładzie normalnym także zmniejsza wartość obciążenia o dwa rzędy wielkości, niestety jedynie dla wartości przesunięcia czasowego funkcji korelacji wzajemnej $k = 0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$, gdzie T jest okresem sygnału (rys. 6.35b)),
- sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ w pomiarze z sygnałami sinusoidalnymi powoduje zmniejszenie wartości obciążenia nawet o cztery rzędy wielkości dla $B = 6$ oraz o trzy rzędy wielkości dla pozostałych przetworników,
- zastosowanie tego sygnału w pomiarze z sygnałami trójkątnymi także skutecznie wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia,

- sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie $A_{dT} = 1q$ w pomiarze z sygnałami sinusoidalnymi powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o trzy lub cztery rzędy wielkości,
- niepewność standardowa typu A, podobnie jak obciążenie, maleje wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika i dla przetwornika 6-bitowego osiąga wartości rzędu 10^{-6} bez względu na rodzaj stosowanego *dithera* (dla parametrów: $N = 100\,000$ i $M = 2^{19}$ w przypadku pomiaru sygnałów sinusoidalnych oraz $N = 100\,000$ i $M = 10^6$ w przypadku pomiaru sygnałów trójkątnych).

Na (rys. 6.35) przedstawiono w formie graficznej wartości współczynników Pb_{dG} , Pb_{dR} , Pb_{dT} (tab. 57, 61, 65, 69, 71, 75, dodatek F) będących ilorazem modułu obciążenia estymatora funkcji korelacji wzajemnej sygnałów badanych i modułu obciążenia estymatora funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów badanych z sygnałami *ditherowymi*.



Rysunek 6.35. Współczynniki: Pb_{dG} , Pb_{dR} , Pb_{dT} w pomiarze funkcji korelacji wzajemnej sumy sygnałów a) sinusoidalnych b) trójkątnych z *ditherowymi* o rozkładzie: normalnym (G), równomiernym (R) i trójkątnym (T) – porównanie wyników dla $B = 6$

Jak wynika z wykresów, zastosowanie sygnałów *ditherowych* o rozkładzie trójkątnym o amplitudzie $A_{dT} = 1q$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygna-

łów sinusoidalnych spowodowało skuteczniejszą redukcję wartości obciążenia w porównaniu z innymi *ditherami*. Zastosowanie sygnałów *ditherowych* o rozkładzie równomiernym o amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ także wpływa znacząco na zmniejszenie wartości obciążenia. W przypadku pomiaru korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych dość dobre efekty otrzymano w wyniku zastosowania zarówno sygnału *ditherowego* o rozkładzie równomiernym, jak i trójkątnym.

Podsumowując można stwierdzić, że spośród analizowanych sygnałów *ditherowych*, zarówno w pomiarze funkcji korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych, jak i trójkątnych najlepsze rezultaty uzyskano kwantując sygnały badane z sygnałami o rozkładzie trójkątnym o amplitudach równych $A_{dT} = q$ (rys. 6.35).

Obecnie, ze względu na łatwy sposób wygenerowania, stosowany jest sygnał *ditherow* o rozkładzie normalnym. Okazuje się jednak, że korzyści ze stosowania tego sygnału w estymacji funkcji korelacyjnych są dużo mniejsze niż korzyści wynikające ze stosowanie innych, analizowanych w pracy sygnałów (rys. 6.35). Dodatkowo w przetwarzaniu z sygnałem trójkątnym *dither* o rozkładzie normalnym wpływa na zmniejszenie obciążenia jedynie dla wartości przesunięcia czasowego funkcji korelacyjnych równego $0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$, gdzie T jest okresem sygnału.

7. Wnioski i podsumowanie

Przedmiotem niniejszej rozprawy jest problematyka kształtowania niepewności bezpośrednich cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych, zwłaszcza gdy przetwarzanie a-c odbywa się z zastosowaniem sygnału *ditherowego*. Praca stanowi kontynuację badań rozpoczętych przez Lal-Jadziak, a inspiracją do prowadzenia badań analitycznych i symulacyjnych były przedstawione w pracach Lal-Jadziak modele obciążenia estymatorów [53, 54, 55, 56, 58, 59, 61, 74].

Ogólne reguły obliczania i wyrażania niepewności pomiaru zostały zawarte, w wydanym przez Międzynarodową Organizację Standaryzacji ISO, przewodniku *Guide to the expression of uncertainty in measurement* [32]. Niestety w publikacji tej nie występują reguły umożliwiające obliczenie niepewności pomiaru w przypadku, gdy stosowane są algorytmy cyfrowego przetwarzania sygnałów (np. autokorelacji, korelacji wzajemnej sygnałów skwantowanych) [28]. Niniejsza rozprawa stanowi istotny wkład w badania oraz usystematyzowanie wiedzy z zakresu pomiaru parametrów skwantyzowanych sygnałów i wpływu czynników decydujących o ich dokładności.

7.1. Wyniki uzyskane w pracy

Realizację sformułowanego problemu rozpoczęto od badań literaturowych przedstawionych kolejno w rozdziałach 2 – 5. Przedstawiono definicje funkcji korelacyjnych oraz ich cyfrowe estymatory, a także właściwości, jakie należy brać pod uwagę podczas analizowania jakości estymatorów oraz sposób oceny ich dokładności. Zdefiniowano pojęcie błędu pomiaru oraz niepewność wyniku pomiaru. Następnie przedstawiono istniejące warianty konwersji a-c z sygnałem *ditherowym* oraz zalety i dodatkowe, niekorzystne skutki, które

mogą się pojawić podczas takiej konwersji. Przedstawiono kwestie dotyczące kwantowania wg teorii Widrowa. Przeanalizowano wpływ kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na błędy estymacji funkcji korelacyjnych. Podano warunki, jakie powinny spełniać sygnały *ditherowe*, aby błędy wynikające z operacji kwantowania uległy zmniejszeniu.

W celu potwierdzenia tezy przeprowadzono badania analityczne cyfrowych estymatorów funkcji autokorelacji dla argumentu zerowego (wartości średniokwadratowej). Dodatkowo przeprowadzono badania symulacyjne cyfrowych estymatorów funkcji autokorelacji oraz korelacji wzajemnej z zastosowaniem opracowanego przez autorkę wirtualnego korelatora.

Wyniki uzyskane w pracy zebrano w następujących punktach:

1. Dokonano analizy funkcji charakterystycznych badanych sygnałów.
2. Opracowano modele matematyczne względnego obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z sygnałami *ditherowymi* o rozkładach: normalnym oraz równomiernym [41, 42, 62].
3. Opracowano wirtualny korelator w środowisku LabWindows do oceny (powodowanych kwantowaniem) błędów estymacji funkcji korelacyjnych sygnałów zdeterminowanych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi*.
4. W celu uzyskania jak największych korzyści ze stosowania sygnałów *ditherowych* ustalono odpowiedni poziom dla każdego z analizowanych sygnałów *ditherowych* oraz maksymalną wartość dyspersji/amplitudy *dithera* jaką należy uwzględnić dobierając zakres przetwornika a-c podczas przeprowadzania badań symulacyjnych.
5. W wyniku badań analitycznych w programie Mathcad oraz symulacyjnych z użyciem wirtualnego korelatora wyznaczono wartości względnego obciążenia oraz względnej niepewności standardowej typu A estymatora wartości średniokwadratowej sygnałów: sinusoidalnego i trójkątnego oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi*.
6. Za pomocą wirtualnego korelatora dokonano oceny obciążenia oraz niepewności standardowej typu A estymatorów funkcji autokorelacji oraz korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych i trójkątnych oraz ich sumy

z sygnałami *ditherowymi*.

W (tab. 7.1) zostały wyszczególnione, analizowane w pracy sygnały *ditherowe* o poszczególnych rozkładach prawdopodobieństwa wraz z wyznaczonymi w pracy wartościami współczynników redukcji obciążenia. Przyjęto następujące oznaczenia:

dG – sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym,

dR – sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym,

dT – sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym.

Tabela 7.1. Maksymalne wartości współczynników redukcji obciążenia P_d w pomiarach korelacyjnych sumy sygnałów badanych z sygnałami *ditherowymi* w zależności od liczby B bitów przetwornika

B	pomiar wartości średniokwadratowej					
	rodzaj sygnału badanego					
	sinusoidalny			trójkątny		
	dG	dR	dT	dG	dR	dT
6	$1,5 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^5$	$1,3 \cdot 10^2$	$1,7 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^3$
8	$1,7 \cdot 10^2$	$4,3 \cdot 10^2$	$4,1 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^2$	$1,6 \cdot 10^2$	$3,0 \cdot 10^2$
10	$1,8 \cdot 10^2$	$2,1 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^4$	$1,3 \cdot 10^2$	$4,7 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^2$
12	$2,2 \cdot 10^2$	$3,5 \cdot 10^3$	$7,1 \cdot 10^3$	51	74	62
B	pomiar autokorelacji / interkorelacji					
	rodzaj sygnału badanego					
	sinusoidalny			trójkątny		
	dG	dR	dT	dG	dR	dT
6	$1,7 \cdot 10^2$	$4,8 \cdot 10^4$	$1,4 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^4$
				0,3		
8	$1,9 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^3$	$5,5 \cdot 10^2$
				1,0		
10	$2,1 \cdot 10^2$	$6,6 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^4$	–	$5,0 \cdot 10^2$	$9,9 \cdot 10^2$
12	$1,7 \cdot 10^2$	$5,5 \cdot 10^3$	$4,8 \cdot 10^4$	–	$1,7 \cdot 10^3$	$3,3 \cdot 10^2$

Kolorem zielonym zaznaczono maksymalne wartości współczynnika redukcji obciążenia P_d wskazując najlepsze, zdaniem autorki, sygnały *ditherowe* w poszczególnych sytuacjach pomiarowych. Kolorem czerwonym zaznaczono sygnały niezalecane przez autorkę (nie dla wszystkich wartości przesunięcia czasowego funkcji korelacyjnych obserwuje się wpływ sygnału *ditherowego* na zmniejszenie wartości obciążenia). Kolorem niebieskim oznaczono wyniki dla sygnału *ditherowego* dającego korzyści lepsze niż w wyniku zastosowania sygnału o rozkładzie normalnym, ale gorsze niż dla *dithera* o rozkładzie trójkątnym.

7.2. Wnioski

Ogólne wnioski z przeprowadzonych badań brzmią następująco:

- Wartości obciążenia oraz niepewności standardowej typu A zależą od liczby bitów przetwornika i maleją wraz ze wzrostem ich wartości.
- Uwzględnienie poprawki Shepparda w pomiarze sygnałów sinusoidalnych wpływa na zmniejszenie powodowanego kwantowaniem obciążenia estymatorów: wartości średniokwadratowej, funkcji autokorelacji oraz korelacji wzajemnej.
- Sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie $A_{dT} = 1q$ dodany zarówno do sygnału sinusoidalnego, jak i trójkątnego oraz sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ dodany do sygnału trójkątnego umożliwiają odtworzenie wartości $E[x^2]$ na podstawie wartości $E[x_q^2]$ z dokładnością do poprawki Shepparda. Pozostałe, analizowane w pracy sygnały *ditherowe*, powodują zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem.
- Sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym w pomiarze z sygnałem trójkątnym powoduje zmniejszenie wartości obciążenia jedynie dla argumentów przesunięcia czasowego funkcji korelacyjnych równego $0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$, gdzie T jest okresem sygnału.
- Najlepsze wyniki uzyskano kwantując sygnał badany z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym. Korzyści wynikające z jego stosowania wielokrotnie prze-

wyższą korzyści wynikające ze stosowania sygnału o rozkładzie normalnym, który jest stosowany ze względu na prosty sposób wygenerowania.

- Kwantowanie z udziałem sygnałów *ditherowych* powoduje pojawienie się niepewności typu A. Przeprowadzając badania symulacyjne można wpłynąć na zmniejszenie tej wartości poprzez zwiększenie liczby próbek sygnałów lub liczby powtórzeń eksperymentu, co z kolei powoduje wydłużenie czasu jego trwania.

Wnioski wynikające z estymacji wartości średniokwadratowej brzmią następująco:

- Przeprowadzając badania analityczne należy ustawić następujące parametry poszczególnych sygnałów *ditherowych* o rozkładzie:
 - normalnym: $\sigma_{dG} = 0,5q$,
 - równomiernym: $A_{dR} = 0,5q$,
 - trójkątnym: $A_{dT} = A_{dT_max} = 1q$.

Dodatkowo, przeprowadzając badania symulacyjne, należy dobierając zakres przetwornika uwzględnić maksymalną wartość generowanego sygnału *ditherowego*. Dla analizowanych sygnałów *ditherowych* o maksymalnych wartościach $\sigma_{dG_max} = A_{dR_max} = A_{dT_max} = 1q$ uzyskano bardzo dobrą zbieżność pomiędzy wynikami analizy matematycznej, a wynikami symulacji.

- Sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie równej $A_{dT} = 1q$ w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego zapewnia odtworzenie, z dokładnością do poprawki Shepparda ($q^2/12$), wartości $E[x^2]$ na podstawie wartości $E[x_q^2]$.
- W przypadku pomiaru sygnału trójkątnego odtworzenie, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartości średniokwadratowej sygnałów na podstawie wartości średniokwadratowej sygnałów skwantowanych umożliwia zarówno kwantowanie z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie trójkątnym o amplitudzie $A_{dT} = 1q$, jak i równomiernym o amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$.
- Kwantowanie z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie równomiernym o amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ nie umożliwia odtworzenia wartości średniokwadra-

towej na podstawie wartości średniokwadratowej sygnału skwantowanego z dokładnością do poprawki Shepparda, jednak powoduje zmniejszenie wartości względnego obciążenia. Korzyści wynikające z jego stosowania wzrastają wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika (w wyniku przeprowadzonej analizy matematycznej zaobserwowano, że dla $B = 6$ sygnał *ditherowy* powoduje 105-krotne obniżenie wartości względnego obciążenia, dla $B = 16$ aż ponad 10^5 -krotne obniżenie wartości względnego obciążenia).

- Kwantowanie z sygnałem *ditherowym* o rozkładzie normalnym i dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$ także nie umożliwia odtworzenia, z dokładnością do poprawki Shepparda, wartości $E[x^2]$ na podstawie wartości $E[x_q^2]$. Wyniki przeprowadzonej analizy matematycznej wskazują, że bez względu na liczbę bitów przetwornika, powoduje ono około 100-krotne zmniejszenie wartości obciążenia.
- Względna niepewność standardowa typu A bez względu na rodzaj zastosowanego sygnału *ditherowego* osiąga wartości tego samego rzędu (10^{-7} dla $B = 6$ oraz 10^{-10} dla $B = 16$ – wynik pomiarów symulacyjnych dla $M = 2^{19}$, $N = 100\ 000$ oraz $M = 10^6$, $N = 100\ 000$).
- *Dither* o rozkładzie normalnym, stosowany obecnie ze względu na łatwy sposób wygenerowania, okazuje się być sygnałem najmniej skutecznym pod względem redukcji obciążenia powodowanego kwantowaniem.

Wnioski wynikające z estymacji funkcji autokorelacji za pomocą wirtualnego korelatora brzmią następująco:

- Sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym o amplitudzie $A_{dT} = 1q$ w pomiarze z sygnałem przetwarzanym powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o trzy, a nawet o cztery rzędy wielkości (dla sygnału sinusoidalnego: $M = 2^{19}$, $N = 100\ 000$, dla sygnału trójkątnego: $M = 10^6$, $N = 100\ 000$).
- W przypadku pomiaru sygnału trójkątnego uzyskuje się bardzo dobre efekty zarówno w pomiarze z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym, jak i równomiernym.
- Sygnał *ditherowy* o rozkładzie równomiernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$

zarówno w pomiarze z sygnałem sinusoidalnym, jak i trójkątnym dla przetworników małobitowych ($B = 6, 8$) skuteczniej obniża wartość obciążenia dla $k \neq 0$ niż dla wartości średniokwadratowej.

- Zastosowanie sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym i odchyleniu standardowym $\sigma_{dG} = 0,5q$ w pomiarze z sygnałem sinusoidalnym, bez względu na wartość przesunięcia k oraz liczbę bitów przetwornika, prowadzi do zmniejszenia wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem o dwa rzędy wielkości ($M = 2^{19}$, $N = 100\,000$).

Podobne wyniki otrzymujemy w pomiarze sygnału trójkątnego dla wartości szczytowych funkcji autokorelacji ($M = 10^6$, $N = 100\,000$).

- Niepewność standardowa typu A, podobnie jak obciążenie, maleje wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika i dla przetwornika 6-bitowego osiąga wartości rzędu 10^{-6} bez względu na rodzaj stosowanego *dithera* (dla $N = 100\,000$).

Wnioski wynikające z estymacji funkcji korelacji wzajemnej za pomocą wirtualnego korelatora brzmią następująco:

- Uwzględnienie poprawki Shepparda w pomiarze sygnałów sinusoidalnych wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem.
- Zastosowanie sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym i dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$ w pomiarze z sygnałami sinusoidalnymi, bez względu na wartość przesunięcia k oraz liczbę bitów przetwornika, powoduje zmniejszenie wartości obciążenia powodowanego kwantowaniem o dwa rzędy wielkości.

Podobne wyniki uzyskano badając estymatory wartości średniokwadratowej oraz funkcji autokorelacji.

- W pomiarze z sygnałami trójkątnymi *dither* o rozkładzie normalnym także prowadzi do zmniejszenia wartości obciążenia o dwa rzędy wielkości, niestety jedynie dla wartości przesunięcia czasowego funkcji korelacji wzajemnej $k = 0, \frac{1}{2}T$ oraz $1T$, gdzie T jest okresem sygnału.
- Badania symulacyjne wykazały, że sygnał *ditherowy* o rozkładzie równo-

miernym i amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ w pomiarze z sygnałami sinusoidalnymi powoduje zmniejszenie wartości obciążenia nawet o cztery rzędy wielkości dla $B = 6$ oraz o trzy rzędy wielkości dla pozostałych przetworników – zgodnie z modelem powinna nastąpić eliminacja obciążenia.

Zastosowanie tego sygnału w pomiarze z sygnałami trójkątnymi także skutecznie wpływa na zmniejszenie wartości obciążenia.

- Sygnał *ditherowy* o rozkładzie trójkątnym i amplitudzie $A_{dT} = 1q$ w pomiarze z sygnałami sinusoidalnymi powoduje zmniejszenie wartości obciążenia o trzy lub cztery rzędy wielkości (zgodnie z modelem powinna nastąpić eliminacja obciążenia).
- Niepewność standardowa typu A, podobnie jak obciążenie, maleje wraz ze wzrostem liczby bitów przetwornika i dla przetwornika 6-bitowego osiąga wartości rzędu 10^{-6} bez względu na rodzaj stosowanego *dithera* (dla parametrów: $N = 100\,000$ i $M = 2^{19}$ w przypadku pomiaru sygnałów sinusoidalnych oraz $N = 100\,000$ i $M = 10^6$ w przypadku pomiaru sygnałów trójkątnych).

7.3. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych badań analitycznych oraz symulacyjnych można stwierdzić, że najlepsze wyniki uzyskuje się kwantując sygnał badany z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym. *Dither* o rozkładzie trójkątnym stwarza możliwości odtworzenia momentów sygnałów na podstawie momentów sygnałów skwantowanych. Korzyści wynikające ze stosowania sygnału o rozkładzie trójkątnym wielokrotnie przewyższają korzyści wynikające ze stosowania sygnału o rozkładzie normalnym, który jest stosowany ze względu na prosty sposób wygenerowania.

Zgodnie z teorią kwantowania wg Widrowa modelowanie błędów parametrów i charakterystyk sygnałów wymaga znajomości odpowiadających im funkcji charakterystycznych. Analizowane w ramach rozprawy funkcje charakterystyczne można otrzymać na podstawie funkcji gęstości prawdopodo-

bieństwa rozważanych sygnałów. Na podstawie analizy sygnału sinusoidalnego oraz trójkątnego zaobserwowano, że we wzorach na funkcję gęstości rozważanych sygnałów nie występuje przesunięcie τ . Zatem, stosując teorię kwantowania wg Widrowa, z zastosowaniem do funkcji charakterystycznych, możliwe jest wyznaczenie modeli błędów analizowanych sygnałów jedynie dla argumentu $k = j \cdot \pi$, $j \in N$. Uzasadnione więc było przeprowadzenie badań symulacyjnych estymatorów funkcji korelacyjnych z zastosowaniem zaproponowanego w pracy wirtualnego korelatora.

Z przeprowadzonych w ramach rozprawy badań wynikają wnioski co do kierunku dalszych prac. Można tu sprecyzować kilka zdań.

Pierwsze to wyprowadzenie matematycznych modeli niepewności standardowej typu A, nad którymi trwają badania prowadzone przez zespół badawczy, do którego należy autorka.

Drugie to przeprowadzenie rzeczywistych badań pomiarowych, co nie będzie zadaniem łatwym, ze względu na stosunkowo duże koszty nabycia precyzyjne aparatury umożliwiającej m.in. generowanie i przetwarzanie sygnałów, zwłaszcza losowych o różnych rozkładach prawdopodobieństwa.

Zdaniem autorki, wyniki przedstawionej w rozprawie analizy modeli matematycznych potwierdziły tezę pracy.

Praktycznym potwierdzeniem tezy jest wykonanie badań symulacyjnych estymatorów wartości średniokwadratowej, funkcji autokorelacji oraz korelacji wzajemnej za pomocą autorskiego oprogramowania.

Częściowe wyniki pracy doktorskiej zostały przedstawione w miesięcznikach naukowo-technicznych PAR oraz PAK oraz na specjalistycznych konferencjach krajowych.

Bibliografia

- [1] Attivissimo F., Giaquinto N., Lamzolla A. M. L., Savino M.: *Coupling dithering and static linearization in A/D converters*, Proc. of IMEKO TC4 Technical Committee of Measurement of Electrical Quantities, Gdynia, Polonia 01/09/2005.
- [2] Aumala O., Holub J.: *Dithering design for measurement of slowly varying signals*, Measurement no. 23 pp. 271–276, 1998.
- [3] Aumala O., Holub J.: *Practical aspects of dithered quantizers*, 1st International On–line Workshop on Dithering in Measurement: Theory and Applications, 1998.
- [4] Barzykowski J. (red.): *Współczesna metrologia. Zagadnienia wybrane*, WNT, Warszawa 2004.
- [5] Belcher R. A.: *A 12 bit 125 MHz ADC using direct interpolation*, Measurement no. 28, pp. 77–83, 2000.
- [6] Bellan D.: *Model for the spectral effects of ADC nonlinearity*, Measurement no. 28, pp. 65–76, 2000.
- [7] Bendat J. S., Piersol A. G.: *Engineering applications of correlation and spectral analysis*, John Wiley, New York 1993.
- [8] Bendat J. S., Piersol A. G.: *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, PWN, Warszawa 1976.
- [9] Bendat J. S., Piersol A. G.: *Random data: analysis and measurement procedures*, John Wiley, New York, 1986.
- [10] Berger C.: *Correlative velocity measurement of narrow and broad objects*, Measurement no. 33, pp. 303–311, 2003.
- [11] Brian L.F. Daku, Peter Kosteniuk, Arnfinn F. Prugger: *Refining visually estimated arrival times of short duration signals*, Measurement no. 30, pp. 297–305, 2001.
- [12] Carbone P.: *Dithered requantization*, 1st International On–line Workshop on Dithering in Measurement: Theory and Applications, 1998.
- [13] Carbone P., Petri D.: *Mean value and variance of noisy quantized data*, Mwasurement no. 23, pp. 131–144, 1998.

- [14] Chang K. Y., Moore A. D.: *Modified digital correlator and its estimation errors*, IEEE, Trans. on IT, pp. 699–706, 1970.
- [15] Chiorboli G.: *Uncertainty of mean value and variance obtained from quantized data*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 52, no. 4, pp. 1273–1278, August 2003.
- [16] Csordás P., Mersich A., Kollár I.: *Digital dither: decreasing round-off errors in digital signal processing*, WISP/2003, Budapest, Sep. 2003, Budapest: IEEE, pp. 9–14, 2003.
- [17] Daponte P., Michaeli L. (editors): *Introduction to special issue on ADC modelling and testing — 7th workshop on ADC modelling and testing*, Editorial, Measurement no. 35, pp. 109–113, 2004.
- [18] Domańska A.: *A-D conversion with dither signal – possibilities and limitations*, Measurement Science Review, vol. 1, no. 1, 2001.
- [19] Domańska A.: *Dobór parametrów konwersji a-c z sygnałem ditherowym i uśrednianiem*, Materiały V Konferencji Naukowo-Technicznej PPM'06, s. 27–44, 2006.
- [20] Domańska A.: *Dualizm między operacjami próbkowania i kwantowania*, Materiały IX Sympozjum Modelowanie i symulacja systemów pomiarowych, Krynica, 20–24 września, s. 115–120, 1999.
- [21] Domańska A.: *Konwersja a-c z ograniczeniem zmian widma sygnału pomiarowego*, V Szkoła-Konferencja Metrologia Wspomagana Komputerowo, Rynia k/Warszawy, 21–24 maj, 2001.
- [22] Domańska A.: *Niepewność wyniku w systemach pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru*, Pomiary Automatyka Kontrola nr 2, s. 25–27, 2005.
- [23] Domańska A.: *Ocena skuteczności sygnałów ditherowych w redukowaniu błędu kwantowania przetworników a-c*, Materiały V Konferencji Naukowo-Technicznej PPM'06, s. 45–50, 2006.
- [24] Domańska A.: *Oddziaływanie na wiarygodność w systemach pomiarowych poprzez zastosowanie konwersji a-c z sygnałem ditherowym*, Seria Rozprawy, nr 308, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1995.
- [25] Domańska A.: *Optymalizacja parametrów konwersji a - c z sygnałem ditherowym i uśrednianiem według kryterium wariancji błędu kwantowania*, Pomiary Automatyka Kontrola nr 7/8, 2006.
- [26] Domańska A.: *The impact of the randomization of the quantization error on the accuracy of measuring systems applying a digital measuring algorithm*, Metrology and Measurement Systems vol. XII, no. 2, 2005.

- [27] Domańska A.: *The signal-to-noise ratio and the resolution of dither signal A/D conversion system*, Metrology and Measurement Systems, vol. X, no. 4, pp. 353–365, 2003.
- [28] Dorozhovets M., Warsza Z. L.: *Udoskonalenie metod wyznaczania niepewności wyników pomiaru w praktyce*, Przegląd Elektrotechniczny, nr 1/2007, s. 1–13, 2007.
- [29] Engelberg T.: *Design of a correlation system for speed measurement of rail vehicles*, Measurement no. 29, pp. 157–164, 2001.
- [30] Gray R.: *Quantization noise spectra*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 36, no. 6, pp. 1220–1244, 1990.
- [31] Gray R., Stockham T.: *Dithered quantizers*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 39, no. 3, pp. 805–812, 1993.
- [32] *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, Geneva, International Organization for Standardization, ISO 1993. Tłumaczenie polskie *Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii*, GUM 1996.
- [33] Hasse L. Spiralski L.: *Szumy elementów i układów elektronicznych*, WNT, Warszawa 2004.
- [34] Holub J., Šmíd R.: *Various scale errors in dithered quantizers: Visualization and reduction*, Measurement no. 28, pp. 85–91, 2000.
- [35] *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology*, ISO 1993 (second edition).
- [36] Janiczek J.: *Korekcja statystycznych charakterystyk torów pomiarowych metodą kształtowania funkcji przetwarzania przetworników analogowo-cyfrowych*, Metrologia i Systemy Pomiarowe, Monografia 5, Warszawa 1990.
- [37] Jaworski J.: *Matematyczne podstawy metrologii*, WNT, Warszawa 1979.
- [38] Kawecka E.: *Kształtowanie niepewności cyfrowych pomiarów korelacyjnych*, V Ogólnopolskie Warsztaty Doktoranckie – OWD 2003, Istebna - Zaolzie, 2003.
- [39] Kawecka E.: *Model wirtualnego korelatora* Informatyka - sztuka czy rzemiosło - KNWS'05, materiały II konferencji naukowej, Złotniki Lubańskie, Polska, Oficyna Wydaw. Uniwersytetu Zielonogórskiego, 2005, s. 161–168
- [40] Kawecka E.: *Odtwarzalność momentów według teorii kwantowania Widrowa* Informatyka - sztuka czy rzemiosło - KNWS'04, materiały I konferencji naukowej, Zielona Góra, Oficyna Wydaw. Uniwersytetu Zielonogórskiego, s. 119–124, Zielona Góra, 2004.

- [41] Kawecka E.: *Wpływ sygnału ditherowego o rozkładzie równomiernym na dokładność estymacji funkcji autokorelacji*, *Pomiary Automatyka Kontrola* nr 5, s. 45–47, 2007.
- [42] Kawecka E.: *Zastosowanie modelu wirtualnego korelatora do oceny niepewności cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych* *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 6, wyd. spec., s. 80–82, 2006.
- [43] Kawecka E., Lal-Jadziak J.: *Wpływ kwantowania na dokładność estymacji momentów sygnałów o rozkładach normalnych*, *Pomiary Automatyka Robotyka* nr 7-8/2004, s. 154–158, 2004.
- [44] Kollár B.: *Digital non-subtractive dither: Necessary and sufficient condition for unbiasedness, with implementation issues*, 23rd IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Sorrento, Italy, April 24–27 2006, Piscataway, IEEE, pp. 140–145, 2006.
- [45] Kollár I.: *Bias of mean value and mean square value measurement based on quantized data*, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 43, no. 5, pp. 733–739, 1994.
- [46] Kollár I.: *Statistical theory of quantization: results and limits*, *Periodica Polytechnica Ser. Elec. Eng.*, vol. 28, nos. 2–3, pp. 173–190, 1984.
- [47] Kollár I.: *The noise model of quantization*, *Proc. 1st IMECO TC4 Symp. "Noise Elec. Meas."*, Como, Italy, June 19–21, 1986; Published by Proc. OMIKK–Technoinform, Budapest, pp. 125–129, 1987.
- [48] Kollár I.: *Understanding quantization by simple models*, *IMEKO XI, World Congress*, Houston, Texas, 16–21 Oct., 1988.
- [49] Kollár I., Blair J. J.: *Improved determination of the best fitting sine wave in ADC testing*, *IEEE Trans. Instrum. Meas.* no. 54:(5), pp. 1978–1983, 2005.
- [50] Kollár I., Pintlon R., Schoukens J.: *Correlation tests of errors in frequency domain systems identification*, *IFAC Symposium on Systems Identification, SYSID 2006*, March 29–31, Newcastle, Australia, Pergamon Press, pp. 1044–1049, 2006.
- [51] Kollár M., Michalko P.: *A new approach in differential nonlinearity testing of the analog-to-digital converters*, *Measurement* no. 40, pp. 520–526, 2007.
- [52] Korn G. A.: *Random Process Simulation and Measurements*, McGraw–Hill Book Comp., New York 1966.
- [53] Lal-Jadziak J.: *Accuracy in determination of correlation functions by digital methods*, *Metrology and Measurement Systems* vol. VIII, no. 2, pp. 153–163, 2001.
- [54] Lal-Jadziak J.: *Bias and variance of crosscorrelation function estimator determined*

- on the basis of signals resulting from A/D conversion with dither*, Metrology and Measurement Systems, vol. X, no. 4, 2003.
- [55] Lal-Jadziak J.: *Dither in digital correlation measurements*, Proceedings of the XVI IMEKO World Congress, IMEKO 2000, Sept. 25–28, 2000 – Vienna, Austria, International Measurement Confederation, Austrian Society for Measurement and Automation, vol. IX, pp. 105–110, 2000.
- [56] Lal-Jadziak J.: *Estimation of correlation functions on the basis of digital signal representation*, Measurements models systems and design / ed. by J. Korbicz, Wydaw. Komunikacji i Łączności, Warszawa, s. 29–47, 2007.
- [57] Lal-Jadziak J.: *Korelacyjne metody pomiarowe i ich dokładność*, Seria Monografie, nr 75, Wyd. WSiInż. w Zielonej Górze, Zielona Góra, 1995.
- [58] Lal-Jadziak J.: *Kształtowanie dokładności pomiarów korelacyjnych przez zastosowanie konwersji a-c z sygnałem ditherowym*, Metrologia i Systemy Pomiarowe, T. VI, z. 1-2, s. 27-46, 1999.
- [59] Lal-Jadziak J.: *Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych*, Seria Monografie, nr 101, Wyd. Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra, 2001.
- [60] Lal-Jadziak J.: *Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej*, Pomiary Automatyka Kontrola nr 7/8, 2002.
- [61] Lal-Jadziak J.: *Wpływ kwantowania na dokładność wyznaczania funkcji korelacyjnych*, Metrologia i Systemy Pomiarowe, tom VIII, zeszyt 1, s. 25–40, 2001.
- [62] Lal-Jadziak J., Kawecka E.: *Ocena dokładności estymacji funkcji korelacyjnych z użyciem modelu wirtualnego korelatora*, Pomiary Automatyka Kontrola, nr 6, s. 16–18, 2006.
- [63] Lal-Jadziak J., Sienkowski S.: *Modelowanie obciążenia estymatora wartości średniokwadratowej wybranych klas sygnałów*, Pomiary Automatyka Kontrola, wyd. spec. nr 53, s. 93-97, 2007.
- [64] Locci N., Muscas C., Ghiani E.: *Evaluation of uncertainty in measurements based on digitized data*, Measurement no. 32, pp. 265–272, 2002.
- [65] Mariano J. L., Ramos H. G.: *Validity of Widrow's model for sinusoidal signals*, Measurement 39, pp. 198–203, 2006.
- [66] Mazurkiewicz Z.: *Przegląd niektórych technik korelacyjnych*, Zeszyty Naukowe WSiInż. w Zielonej Górze, nr 78, s. 133–144, 1986.
- [67] Oliver B. M., Cage J. M.: *Pomiary i przyrządy elektroniczne*, WKŁ, Warszawa 1978.

- [68] Pacut A.: *Prawdopodobieństwo. Teoria. Modelowanie probabilistyczne w technice*, WNT, Warszawa 1985.
- [69] Petri D.: *Dither signals and quantization Measurement* vol 19, no. 3/4, pp. 147–157, 1996.
- [70] Schiiyer M. K. N., Verbeek P. W.: *Block position dithering in DCT-coded sequences*, *Signal Processing: Image Communication* 8, pp. 545–549, 1996.
- [71] Schuchman L.: *Dither signals and their effect on quantization noise*, *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. COM-12, pp. 162–165, 1964.
- [72] Sherwood D. T.: *Some theorems on quantization and an example using dither*, *Conf. Rec. 19th Asilomar Conf. Circuits, Syst. Comput.*, Pacific Grove, CA, Nov. 6–8, 1985, pp. 207–212, IEEE 86CH2331-7, 1985.
- [73] Sienkowski S.: *Modelling characteristic functions of determined and random signals in LabWindows*, 1st International Conference For Young Researchers, Zielona Góra, 2006.
- [74] Spiralski L., Lal-Jadziak J.: *Problemy pomiarów korelacyjnych*, *Elektronika*, z. 6, 2002.
- [75] Sripad B.; Snyder D.: *A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white*, *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process.* vol. ASSP-25, pp. 442–448, Oct. 1977.
- [76] Sumitoshi Ogata: *Improved spatio-temporal correlation method for velocity field measurements*, *Measurement* no. 29, pp. 39–49, 2002.
- [77] Świsulski D.: *Komputerowa technika pomiarowa. Oprogramowanie wirtualnych przyrządów pomiarowych w LabView*, Agenda wydawnicza PAK'u, Warszawa, wrzesień, 2005.
- [78] Turzeniecka D.: *Ocena niepewności wyniku pomiarów*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1997.
- [79] Vanderkooy J., Lipshitz S.: *Dither in digital audio*, *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 35, no. 12, pp. 966–975, 1987.
- [80] Wagdy M. F.: *Effect of additive dither on the resolution of ADC's with single-bit or multibit errors*, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 45, no. 2, pp. 610–615, 1996.
- [81] Wagdy M. F.: *Effect of various dither forms on quantization errors of ideal A/D converters*, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 38, no. 4, pp. 850–855, 1989.
- [82] Wagdy M. F.: *Linearizing average transfer characteristics of ideal ADC's via analog and digital dither*, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 43, no. 2, pp. 146–15, 1994.

- [83] Wagdy M. F.: *Validity of uniform quantization error model for sinusoidal signals without and with dither*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 38, no. 3, pp. 718–722, 1989.
- [84] Wannamaker R. A.: *The theory of dithered quantization*, Waterloo, Ontario, Canada, 2003.
- [85] Wannamaker R. A., Lipshitz S. P., Vanderkooy J., and Wright J. N.: *A theory of non-subtractive dither*, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 48, pp. 499–516, Feb. 2000.
- [86] Widrow B.: *A study of rough amplitude quantization by means of Nyquist sampling theory*, IRE Trans. Circuit Theory, vol. 3, no. 4, s. 266–276, 1956.
- [87] Widrow B.: *Statistical analysis of amplitudo-quantized sampled-data systems*, AIEE Trans. (Applications and Industry), vol. 79, no. 52 pp. 555-568, 1961.
- [88] Widrow B., Kollár I.: *Quantization noise – a book on uniform and floating-point quantization*, Budapest 2006.
<http://www.mit.bme.hu/books/quantization/>.
- [89] Widrow B., Kollár I., Liu M.-C.: *Statistical theory of quantization*, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 45, no. 2, pp. 353–361, 1996.
- [90] Winiecki W.: *Wirtualne Przyrządy Pomiarowe*, Elektronika z. 145, Politechnika Warszawska, 2003.
- [91] Wojnar A.: *Teoria sygnałów*, WNT, Warszawa 1988.
- [92] Zator S.: *Korelacyjny pomiar strumienia objętości płynów*, Wyd. Szumacher, Kielce, 1997.
- [93] Zhi-Feng Zhang, Yi-Lan Kang, Huai-Wen Wang, Qing-Hua Qin, Yu Qiu, Xiao-Qi Li: *A novel coarse-fine search scheme for digital image correlation method*, Measurement 39, pp. 710—718, 2006.
- [94] *LabWindows/CVI Internet Developers Toolkit Online Help*.

Dodatek

A. Opis Wirtualnego Korelatora

Do realizacji autorskiego oprogramowania wirtualnego korelatora z funkcją obliczania błędów (zwanego w skrócie wirtualnym korelatorem) zastosowano środowisko LabWindows firmy National Instruments w wersji 7.0. Środowisko LabWindows umożliwia projektowanie złożonych aplikacji pomiarowych przeznaczonych do pracy w systemie operacyjnym Windows [94]. Posiada ciągle powiększającą się, rozbudowaną listę funkcji umożliwiających przetwarzanie danych, a także graficzny interfejs użytkownika, którego właściwości pozwalają na odtworzenie głównego panelu przyrządu, co prowadzi do powstania tzw. przyrządu wirtualnego¹. Ponadto oprogramowanie LabWindows posiada narzędzia automatyzujące proces tworzenia aplikacji.

Wykonany przez autorkę wirtualny korelator umożliwia przeprowadzanie badań symulacyjnych dotyczących wpływu sygnału *ditherowego* na obciążenie oraz niepewność standardową typu A cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych:

- autokorelacji sygnału w torze pierwszym korelatora;
- korelacji wzajemnej sygnałów w torze pierwszym i drugim korelatora.

Program umożliwia generowanie następujących sygnałów zdeterminowanych: sinusoidalnego oraz trójkątnego o zadanych przez użytkownika parametrach, takich jak: amplituda, częstotliwość i przesunięcie fazowe. Generowane są także trzy typy sygnałów *ditherowych* o zerowej wartości średniej i następujących rozkładach: normalnym, równomiernym oraz trójkątnym.

¹ Wykonany wirtualny korelator należy do kategorii przyrządów wirtualnych, w których: brak jest fizycznego przyrządu (sprzętu poza komputerem), dane wejściowe pobierane są z plików lub generowane w sposób numeryczny, panel graficzny na ekranie komputera - symuluje płytę czołową, przyrząd jest obsługiwany za pomocą klawiatury i/lub myszy [77].

Do generowania sygnałów zastosowano funkcje dostępne w pakiecie LabWindows, z wyjątkiem realizacji sygnału o rozkładzie trójkątnym, który wygenerowano w następujący sposób:

```
for (i=0;i<2*sigpoints;i++)
    noise[i]=(((double)rand()/RAND_MAX)-
              ((double)rand()/RAND_MAX))*noise_ampl_1;
```

gdzie:

`noise_ampl_1` jest amplitudą sygnału,
`sigpoints` – liczbą próbek sygnału.

Poziom każdego sygnału *ditherowego* obliczany jest programowo w zależności od ustawionej rozdzielczości przetwornika. W celu wyznaczenia wartości obciążenia obliczana jest wartość teoretyczna estymatorów, z wyjątkiem wartości teoretycznej estymatora autokorelacji oraz korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych. Wzory, za pomocą których przeprowadzane są obliczenia w wirtualnym korelatorze przedstawiono w rozdziale 6.

W obu kanałach korelatora możliwe jest kwantowanie sygnałów. Przetwarzanie a-c realizowane jest za pomocą bipolarnego przetwornika o zadanej przez użytkownika liczbie bitów.

Program umożliwia także ustawienie następujących parametrów przetwarzania:

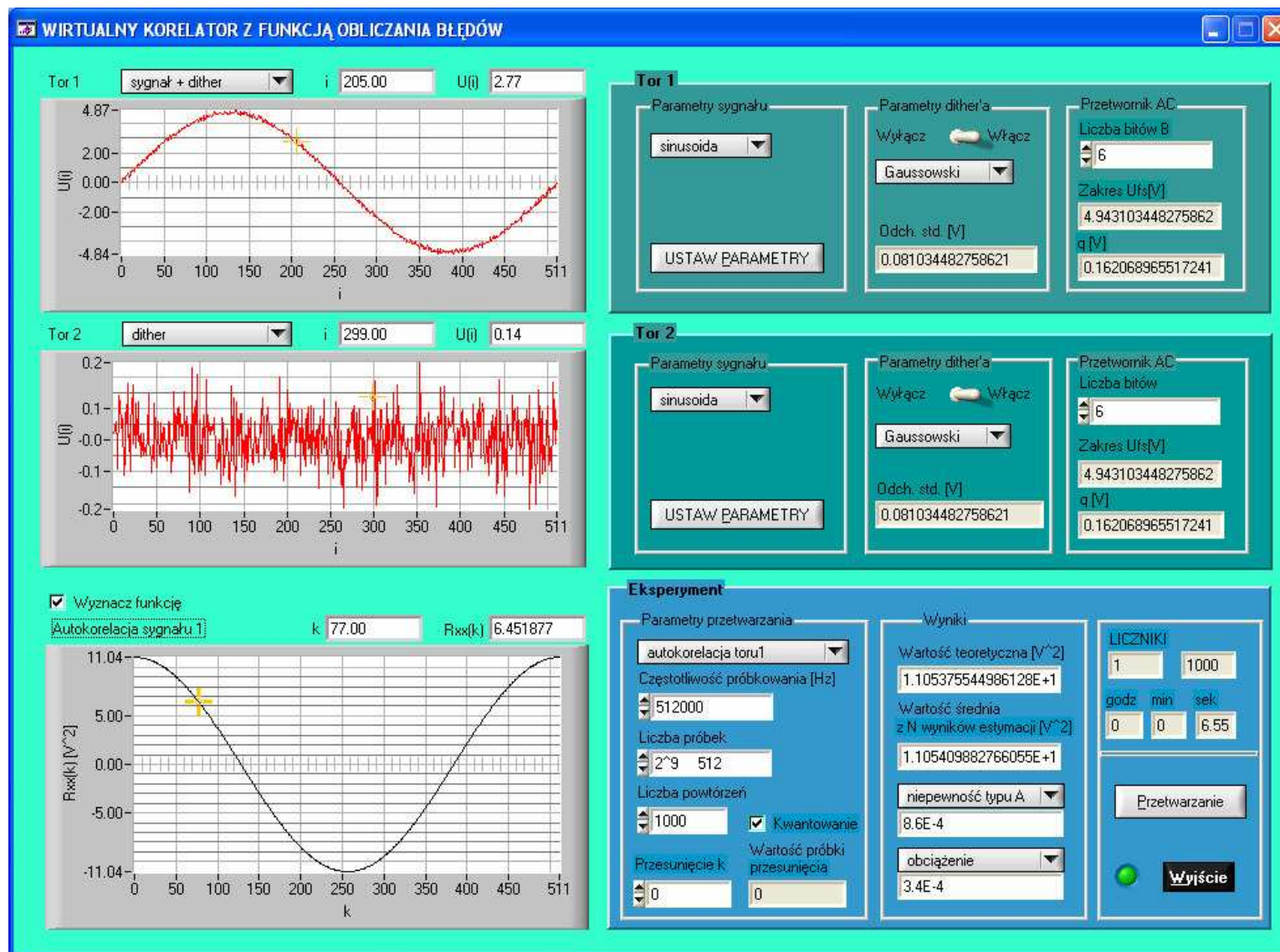
- częstotliwość próbkowania sygnału;
- liczbę próbek sygnału;
- wartość przesunięcia funkcji korelacji;
- liczbę powtórzeń eksperymentu.

Wszystkie parametry sygnałów/przetwarzania, które były obliczane programowo są podczas wykonywania eksperymentu wyświetlane na panelu korelatora. Uzyskane wyniki z każdego eksperymentu wraz z parametrami zadanymi przez użytkownika oraz obliczonymi programowo są dodatkowo zapisywane do pliku.

Ponadto program umożliwia prześledzenie generowanych sygnałów w poszczególnych etapach eksperymentu poprzez jego wizualizację na grafie oraz możliwość odczytu poszczególnych wartości sygnałów. Istnieje także możliwość prezentacji funkcji korelacyjnych na korelogramie. W omawianym programie wykorzystano opracowane przez autorkę funkcje realizujące operację przetwarzania a-c, korelacji sygnałów oraz wyznaczania wartości błędów.

Sposób przeprowadzania eksperymentów został opisany w rozdziałach: 6.2 (str. 65), 6.2.1, (str. 68), 6.4.1 (str. 129).

Na (rys. 1) zamieszczono widok panelu głównego wirtualnego korelatora.



Rysunek 1. Panel główny wirtualnego korelatora

B. Wyniki badań – ocena poprawności działania wirtualnego korelatora

Dodatek zawiera tabele z wynikami przeprowadzonych badań symulacyjnych, analizowanych w rozdziale 6.1. W tabelach zawarto wyniki względnego obciążenia w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnałów: sinusoidalnego i trójkątnego bez obecności oraz w obecności sygnałów *ditherowych* o rozkładach: normalnym, równomiernym oraz trójkątnym. Przyjęto poziom sygnałów *ditherowych* $\sigma_{dG} = A_{dR} = A_{dT} = 0,5q$, gdzie q jest krokiem kwantowania przetwornika a-c. Przedstawiono wyniki analiz matematycznych δ_M , $\delta_{d[GRT]M}$ (przeprowadzonych w programie Mathcad), badań symulacyjnych δ , $\delta_{d[GRT]}$ uzyskanych za pomocą wirtualnego korelatora (patrz dodatek A), oraz procentową różnicę δ_{wk} pomiędzy wynikami analiz matematycznych i badań symulacyjnych obliczonych na podstawie (6.1) oraz (6.2).

Badania przeprowadzono dla różnej liczby próbek sygnałów M , różnej liczby powtórzeń eksperymentu N oraz dla przetworników o różnej liczbie bitów B .

Do obliczeń δ_{wk} oraz $\delta_{wk,d[GRT]}$ użyto liczb o zwiększonej precyzji (piętnaście cyfr znaczących), aby błąd wynikający z obliczeń dodatkowo nie wpłynął na ostateczny wynik. Dlatego w tabelach w kolumnach nr 2 i 3 przedstawiono więcej niż dwie cyfry znaczące uzyskanych wyników.

Tabela 2. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego o amplitudzie $A = 4,7$ V, $M = 2^{16} = 65\,536$, $N = 1$

B	δ	δ_M	$\delta_{wk}[\%]$
6	$1,201590 \cdot 10^{-3}$	$1,201172 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-2}$
8	$1,529654 \cdot 10^{-4}$	$1,510257 \cdot 10^{-4}$	1,3
10	$1,635853 \cdot 10^{-5}$	$1,890571 \cdot 10^{-5}$	-13
12	$3,076644 \cdot 10^{-6}$	$2,364073 \cdot 10^{-6}$	30
14	$-5,701992 \cdot 10^{-7}$	$2,955359 \cdot 10^{-7}$	$-2,9 \cdot 10^2$
16	$-1,459488 \cdot 10^{-7}$	$3,694283 \cdot 10^{-8}$	$-5,0 \cdot 10^2$

Tabela 3. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego o amplitudzie $A = 4,7 \text{ V}$, $M = 2^{19} = 52\,4288$, $N = 1$

B	δ	δ_M	$\delta_{wk}[\%]$
6	$1,202678 \cdot 10^{-3}$	$1,201172 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$
8	$1,509593 \cdot 10^{-4}$	$1,510257 \cdot 10^{-4}$	$-4,4 \cdot 10^{-2}$
10	$1,898369 \cdot 10^{-5}$	$1,890571 \cdot 10^{-5}$	$4,1 \cdot 10^{-1}$
12	$2,262653 \cdot 10^{-6}$	$2,364073 \cdot 10^{-6}$	$-4,3$
14	$3,312062 \cdot 10^{-7}$	$2,955359 \cdot 10^{-7}$	12
16	$7,452264 \cdot 10^{-8}$	$3,694283 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^2$

Tabela 4. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego o amplitudzie $A = 4,7 \text{ V}$, $M = 2^{22} = 4\,194\,304$, $N = 1$

B	δ	δ_M	$\delta_{wk}[\%]$
6	$1,201871 \cdot 10^{-3}$	$1,201172 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$
8	$1,511214 \cdot 10^{-4}$	$1,510257 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$
10	$1,891236 \cdot 10^{-5}$	$1,890571 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-2}$
12	$2,357150 \cdot 10^{-6}$	$2,364073 \cdot 10^{-6}$	$-2,9 \cdot 10^{-1}$
14	$2,961714 \cdot 10^{-7}$	$2,955359 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$
16	$3,348454 \cdot 10^{-8}$	$3,694283 \cdot 10^{-8}$	$-9,4$

Tabela 5. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym
($A = 4,7 \text{ V}$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 2^{16} = 65\,536$, $N = 50\,000$)

B	δ_{dG}	δ_{dGM}	$\delta_{wk_dG}[\%]$
6	$9,413708 \cdot 10^{-6}$	$1,238363 \cdot 10^{-5}$	-24
8	$6,403211 \cdot 10^{-7}$	$1,453654 \cdot 10^{-6}$	-56
10	$1,163536 \cdot 10^{-7}$	$1,788470 \cdot 10^{-7}$	-35
12	$2,834410 \cdot 10^{-8}$	$2,226730 \cdot 10^{-8}$	27
14	$9,133970 \cdot 10^{-9}$	$2,780652 \cdot 10^{-9}$	$1,3 \cdot 10^2$
16	$3,265314 \cdot 10^{-10}$	$3,474952 \cdot 10^{-10}$	$-6,0$

Tabela 6. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym
 $(A = 4,7 \text{ V}, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 2^{16} = 65\,536, N = 100\,000)$

B	δ_{dG}	δ_{dGM}	$\delta_{wk_dG}[\%]$
6	$7,120455 \cdot 10^{-6}$	$1,238363 \cdot 10^{-5}$	-43
8	$1,068434 \cdot 10^{-7}$	$1,453654 \cdot 10^{-6}$	-27
10	$1,323887 \cdot 10^{-7}$	$1,788470 \cdot 10^{-7}$	-26
12	$2,446106 \cdot 10^{-8}$	$2,226730 \cdot 10^{-8}$	9,9
14	$6,683159 \cdot 10^{-9}$	$2,780652 \cdot 10^{-9}$	$1,4 \cdot 10^2$
16	$5,390673 \cdot 10^{-10}$	$3,474952 \cdot 10^{-10}$	55

Tabela 7. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym
 $(A = 4,7 \text{ V}, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 2^{19} = 524\,288, N = 100\,000)$

B	δ_{dG}	δ_{dGM}	$\delta_{wk_dG}[\%]$
6	$7,584033 \cdot 10^{-6}$	$1,238363 \cdot 10^{-5}$	-39
8	$8,706595 \cdot 10^{-7}$	$1,453654 \cdot 10^{-6}$	-40
10	$1,050478 \cdot 10^{-7}$	$1,788470 \cdot 10^{-7}$	-41
12	$1,022579 \cdot 10^{-8}$	$2,226730 \cdot 10^{-8}$	-54
14	$1,259020 \cdot 10^{-9}$	$2,780652 \cdot 10^{-9}$	-55
16	$3,132120 \cdot 10^{-10}$	$3,474952 \cdot 10^{-10}$	-9,9

Tabela 8. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym
 $(A = 4,9 \text{ V}, A_{dR} = 0,5q, M = 2^{16} = 65\,536, N = 50\,000)$

B	δ_{dR}	δ_{dRM}	$\delta_{wk_dR}[\%]$
6	$-1,165850 \cdot 10^{-5}$	$-1,142332 \cdot 10^{-5}$	2,1
8	$-1,634047 \cdot 10^{-7}$	$-3,364069 \cdot 10^{-7}$	-51
10	$-9,042266 \cdot 10^{-9}$	$-1,036012 \cdot 10^{-8}$	-13
12	$-1,100655 \cdot 10^{-8}$	$-3,225769 \cdot 10^{-10}$	$3,3 \cdot 10^3$
14	$1,396150 \cdot 10^{-9}$	$-1,007136 \cdot 10^{-11}$	$-1,4 \cdot 10^4$
16	$-4,586067 \cdot 10^{-10}$	$-3,146585 \cdot 10^{-13}$	$1,5 \cdot 10^5$

Tabela 9. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym
($A = 4,9 \text{ V}$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{16} = 65\,536$, $N = 100\,000$)

B	δ_{dR}	δ_{dRM}	$\delta_{wk_dR}[\%]$
6	$-1,092156 \cdot 10^{-5}$	$-1,142332 \cdot 10^{-5}$	-4,4
8	$-4,520736 \cdot 10^{-7}$	$-3,364069 \cdot 10^{-7}$	34
10	$9,629221 \cdot 10^{-9}$	$-1,036012 \cdot 10^{-8}$	$-1,9 \cdot 10^2$
12	$-6,318684 \cdot 10^{-9}$	$-3,225769 \cdot 10^{-10}$	$1,9 \cdot 10^3$
14	$1,719722 \cdot 10^{-10}$	$-1,007136 \cdot 10^{-11}$	$-1,8 \cdot 10^3$
16	$2,872803 \cdot 10^{-10}$	$-3,146585 \cdot 10^{-13}$	$-9,1 \cdot 10^4$

Tabela 10. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym
($A = 4,9 \text{ V}$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19} = 524\,288$, $N = 100\,000$)

B	δ_{dR}	δ_{dRM}	$\delta_{wk_dR}[\%]$
6	$-1,135954 \cdot 10^{-5}$	$-1,142332 \cdot 10^{-5}$	$-5,6 \cdot 10^{-1}$
8	$-3,478084 \cdot 10^{-7}$	$-3,364069 \cdot 10^{-7}$	3,4
10	$-8,968338 \cdot 10^{-9}$	$-1,036012 \cdot 10^{-8}$	-13
12	$-1,767638 \cdot 10^{-9}$	$-3,225769 \cdot 10^{-10}$	$4,5 \cdot 10^2$
14	$4,224524 \cdot 10^{-10}$	$-1,007136 \cdot 10^{-11}$	$-4,3 \cdot 10^3$
16	$3,868803 \cdot 10^{-11}$	$-3,146585 \cdot 10^{-13}$	$-1,2 \cdot 10^4$

Tabela 11. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym
($A = 4,9 \text{ V}$, $A_{dT} = 0,5q$, $M = 2^{16} = 65\,536$, $N = 50\,000$)

B	δ_{dT}	$\delta_{dT M}$	$\delta_{wk_dT}[\%]$
6	$6,799364 \cdot 10^{-4}$	$6,794393 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$
8	$8,307399 \cdot 10^{-5}$	$8,300895 \cdot 10^{-5}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$
10	$1,031213 \cdot 10^{-5}$	$1,031709 \cdot 10^{-5}$	$-4,8 \cdot 10^{-2}$
12	$1,286222 \cdot 10^{-6}$	$1,287799 \cdot 10^{-6}$	$-1,2 \cdot 10^{-1}$
14	$1,763227 \cdot 10^{-7}$	$1,609175 \cdot 10^{-7}$	9,6
16	$-1,994227 \cdot 10^{-8}$	$2,011290 \cdot 10^{-8}$	$-2,0 \cdot 10^2$

Tabela 12. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym $(A = 4,9 \text{ V}, A_{dT} = 0,5q, M = 2^{16} = 65\,536, N = 100\,000)$

B	δ_{dT}	$\delta_{dT M}$	$\delta_{wk_dT}[\%]$
6	$6,796723 \cdot 10^{-4}$	$6,794393 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$
8	$8,289959 \cdot 10^{-5}$	$8,300895 \cdot 10^{-5}$	$-1,3 \cdot 10^{-1}$
10	$1,029241 \cdot 10^{-5}$	$1,031709 \cdot 10^{-5}$	$-2,4 \cdot 10^{-1}$
12	$1,283364 \cdot 10^{-6}$	$1,287799 \cdot 10^{-6}$	$-3,4 \cdot 10^{-1}$
14	$1,763458 \cdot 10^{-7}$	$1,609175 \cdot 10^{-7}$	9,6
16	$-2,013322 \cdot 10^{-8}$	$2,011290 \cdot 10^{-8}$	$-2,0 \cdot 10^2$

Tabela 13. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym $(A = 4,9 \text{ V}, A_{dT} = 0,5q, M = 2^{19} = 524\,288, N = 100\,000)$

B	δ_{dT}	$\delta_{dT M}$	$\delta_{wk_dT}[\%]$
6	$6,794298 \cdot 10^{-4}$	$6,794393 \cdot 10^{-4}$	$-1,4 \cdot 10^{-3}$
8	$8,300868 \cdot 10^{-5}$	$8,300895 \cdot 10^{-5}$	$-3,2 \cdot 10^{-4}$
10	$1,031593 \cdot 10^{-5}$	$1,031709 \cdot 10^{-5}$	$-1,1 \cdot 10^{-2}$
12	$1,288573 \cdot 10^{-6}$	$1,287799 \cdot 10^{-6}$	$-6,0 \cdot 10^{-2}$
14	$1,608024 \cdot 10^{-7}$	$1,609175 \cdot 10^{-7}$	$-7,2 \cdot 10^{-2}$
16	$1,934462 \cdot 10^{-8}$	$2,011290 \cdot 10^{-8}$	-3,8

Tabela 14. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego o amplitudzie $A = 4,7 \text{ V}, M = 10^5 = 100\,000, N = 1$

B	δ	δ_M	$\delta_{wk}[\%]$
6	$2,426025 \cdot 10^{-4}$	$2,441259 \cdot 10^{-4}$	$-6,2 \cdot 10^{-1}$
8	$1,423340 \cdot 10^{-5}$	$1,525787 \cdot 10^{-5}$	-6,7
10	$1,241150 \cdot 10^{-6}$	$9,536169 \cdot 10^{-7}$	30
12	$1,654625 \cdot 10^{-7}$	$5,960106 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^2$
14	$1,878496 \cdot 10^{-9}$	$3,727796 \cdot 10^{-9}$	-50
16	$2,935156 \cdot 10^{-9}$	$2,328166 \cdot 10^{-10}$	$1,2 \cdot 10^3$

Tabela 15. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego o amplitudzie $A = 4,7 \text{ V}$, $M = 10^6 = 1\,000\,000$, $N = 1$

B	δ	δ_M	$\delta_{wk}[\%]$
6	$2,442344 \cdot 10^{-4}$	$2,441259 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$
8	$1,519434 \cdot 10^{-5}$	$1,525787 \cdot 10^{-5}$	$-4,2 \cdot 10^{-1}$
10	$9,496460 \cdot 10^{-7}$	$9,536169 \cdot 10^{-7}$	$-4,2 \cdot 10^{-1}$
12	$7,693099 \cdot 10^{-8}$	$5,960106 \cdot 10^{-8}$	29
14	$1,878491 \cdot 10^{-9}$	$3,727796 \cdot 10^{-9}$	-50
16	$1,152171 \cdot 10^{-10}$	$2,328166 \cdot 10^{-10}$	-51

Tabela 16. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego o amplitudzie $A = 4,7 \text{ V}$, $M = 10^7 = 10\,000\,000$, $N = 1$

B	δ	δ_M	$\delta_{wk}[\%]$
6	$2,441406 \cdot 10^{-4}$	$2,441259 \cdot 10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$
8	$1,525527 \cdot 10^{-5}$	$1,525787 \cdot 10^{-5}$	$-1,7 \cdot 10^{-2}$
10	$9,557981 \cdot 10^{-7}$	$9,536169 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$
12	$6,003023 \cdot 10^{-8}$	$5,960106 \cdot 10^{-8}$	$7,2 \cdot 10^{-1}$
14	$3,492704 \cdot 10^{-9}$	$3,727796 \cdot 10^{-9}$	-6,3
16	$8,298779 \cdot 10^{-12}$	$2,328166 \cdot 10^{-10}$	-96

Tabela 17. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym

($A = 4,7 \text{ V}$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 10^5 = 100\,000$, $N = 50\,000$)

B	δ_{dG}	δ_{dGM}	$\delta_{wk_dG}[\%]$
6	$1,741224 \cdot 10^{-6}$	$2,845649 \cdot 10^{-6}$	-39
8	$1,783251 \cdot 10^{-7}$	$1,399067 \cdot 10^{-7}$	27
10	$-6,614374 \cdot 10^{-8}$	$8,437666 \cdot 10^{-9}$	$-8,8 \cdot 10^2$
12	$6,519436 \cdot 10^{-9}$	$5,227170 \cdot 10^{-10}$	$1,1 \cdot 10^3$
14	$2,579427 \cdot 10^{-9}$	$3,259269 \cdot 10^{-11}$	$7,8 \cdot 10^3$
16	$8,083649 \cdot 10^{-10}$	$2,036225 \cdot 10^{-12}$	$4,0 \cdot 10^4$

Tabela 18. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym $(A = 4,7 \text{ V}, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 10^6 = 1\,000\,000, N = 50\,000)$

B	δ_{dG}	δ_{dGM}	$\delta_{wk_dG}[\%]$
6	$1,697472 \cdot 10^{-6}$	$2,845649 \cdot 10^{-6}$	-40
8	$7,991598 \cdot 10^{-8}$	$1,399067 \cdot 10^{-7}$	-43
10	$-7,136837 \cdot 10^{-9}$	$8,437666 \cdot 10^{-9}$	$-1,8 \cdot 10^2$
12	$-1,059157 \cdot 10^{-9}$	$5,227170 \cdot 10^{-10}$	$-3,0 \cdot 10^2$
14	$-1,053757 \cdot 10^{-9}$	$3,259269 \cdot 10^{-11}$	$-3,3 \cdot 10^3$
16	$2,289018 \cdot 10^{-10}$	$2,036225 \cdot 10^{-12}$	$1,1 \cdot 10^4$

Tabela 19. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym $(A = 4,7 \text{ V}, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 10^6 = 1\,000\,000, N = 100\,000)$

B	δ_{dG}	δ_{dGM}	$\delta_{wk_dG}[\%]$
6	$1,947830 \cdot 10^{-6}$	$2,845649 \cdot 10^{-6}$	-32
8	$1,317809 \cdot 10^{-7}$	$1,399067 \cdot 10^{-7}$	-5,8
10	$-1,139488 \cdot 10^{-8}$	$8,437666 \cdot 10^{-9}$	$-2,4 \cdot 10^2$
12	$1,499096 \cdot 10^{-9}$	$5,227170 \cdot 10^{-10}$	$1,9 \cdot 10^2$
14	$7,319147 \cdot 10^{-10}$	$3,259269 \cdot 10^{-11}$	$2,1 \cdot 10^3$
16	$9,387740 \cdot 10^{-11}$	$2,036225 \cdot 10^{-12}$	$4,5 \cdot 10^3$

Tabela 20. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

$$(A = 4,9 \text{ V}, A_{dT} = 0,5q, M = 10^5 = 100\,000, N = 50\,000)$$

B	δ_{dT}	$\delta_{dT M}$	$\delta_{wk_dT}[\%]$
6	$1,305175 \cdot 10^{-4}$	$1,300706 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$
8	$7,732354 \cdot 10^{-6}$	$7,749213 \cdot 10^{-6}$	$-2,2 \cdot 10^{-1}$
10	$4,845319 \cdot 10^{-7}$	$4,786992 \cdot 10^{-7}$	1,3
12	$2,385490 \cdot 10^{-8}$	$2,983115 \cdot 10^{-8}$	-20
14	$1,387559 \cdot 10^{-9}$	$1,863223 \cdot 10^{-9}$	-26
16	$1,631620 \cdot 10^{-9}$	$1,164363 \cdot 10^{-10}$	$1,3 \cdot 10^3$

Tabela 21. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

$$(A = 4,9 \text{ V}, A_{dT} = 0,5q, M = 10^6 = 1\,000\,000, N = 50\,000)$$

B	δ_{dT}	$\delta_{dT M}$	$\delta_{wk_dT}[\%]$
6	$1,301983 \cdot 10^{-4}$	$1,300706 \cdot 10^{-4}$	$9,8 \cdot 10^{-2}$
8	$7,780999 \cdot 10^{-6}$	$7,749213 \cdot 10^{-6}$	$4,1 \cdot 10^{-1}$
10	$4,848361 \cdot 10^{-7}$	$4,786992 \cdot 10^{-7}$	1,3
12	$3,338138 \cdot 10^{-8}$	$2,983115 \cdot 10^{-8}$	12
14	$2,025584 \cdot 10^{-9}$	$1,863223 \cdot 10^{-9}$	8,7
16	$6,683134 \cdot 10^{-11}$	$1,164363 \cdot 10^{-10}$	-43

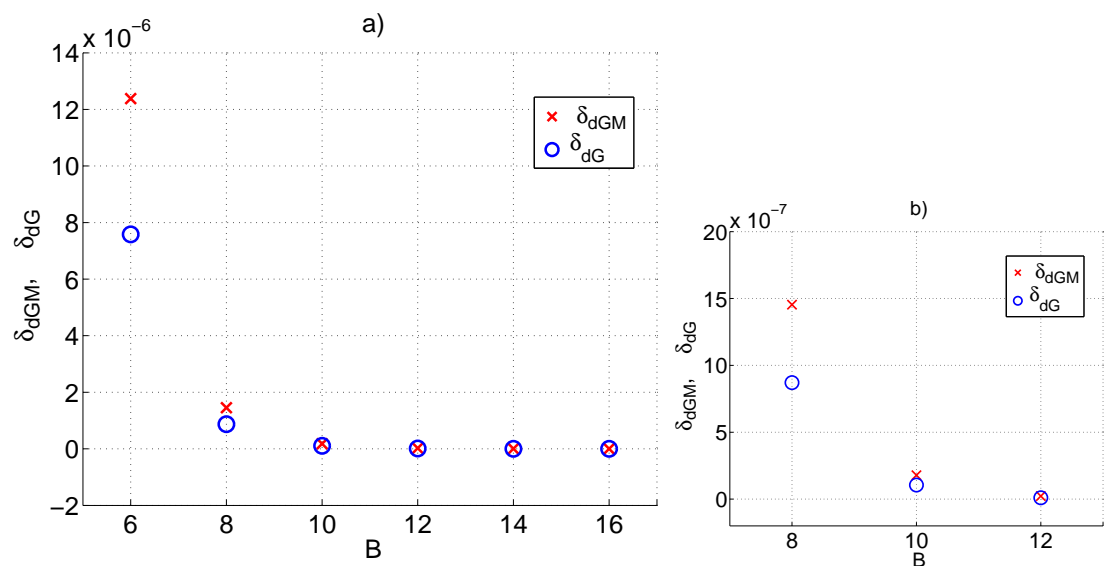
Tabela 22. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego o amplitudzie z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym

$$(A = 4,9 \text{ V}, A_{dT} = 0,5q, M = 10^6 = 1\,000\,000, N = 100\,000)$$

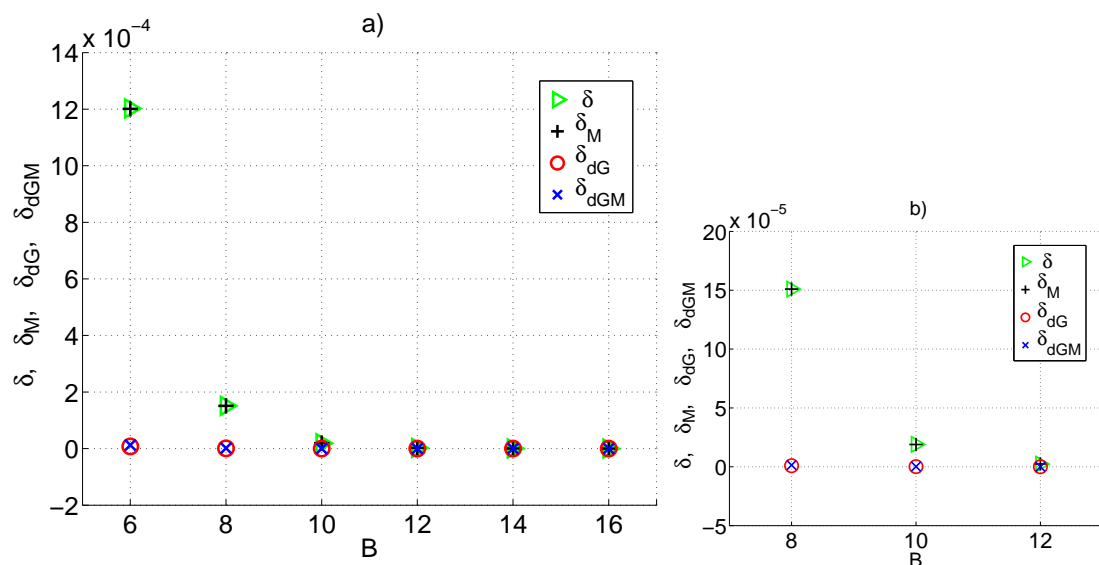
B	δ_{dT}	$\delta_{dT M}$	$\delta_{wk_dT}[\%]$
6	$1,301494 \cdot 10^{-4}$	$1,300706 \cdot 10^{-4}$	$6,1 \cdot 10^{-2}$
8	$7,746206 \cdot 10^{-6}$	$7,749213 \cdot 10^{-6}$	$-3,9 \cdot 10^{-2}$
10	$4,779931 \cdot 10^{-7}$	$4,786992 \cdot 10^{-7}$	$-1,5 \cdot 10^{-1}$
12	$3,013934 \cdot 10^{-8}$	$2,983115 \cdot 10^{-8}$	1,0
14	$1,267531 \cdot 10^{-9}$	$1,863223 \cdot 10^{-9}$	-32
16	$9,196431 \cdot 10^{-11}$	$1,164363 \cdot 10^{-10}$	-21

C. Wyniki badań estymatora wartości średniokwadratowej przedstawione w formie graficznej

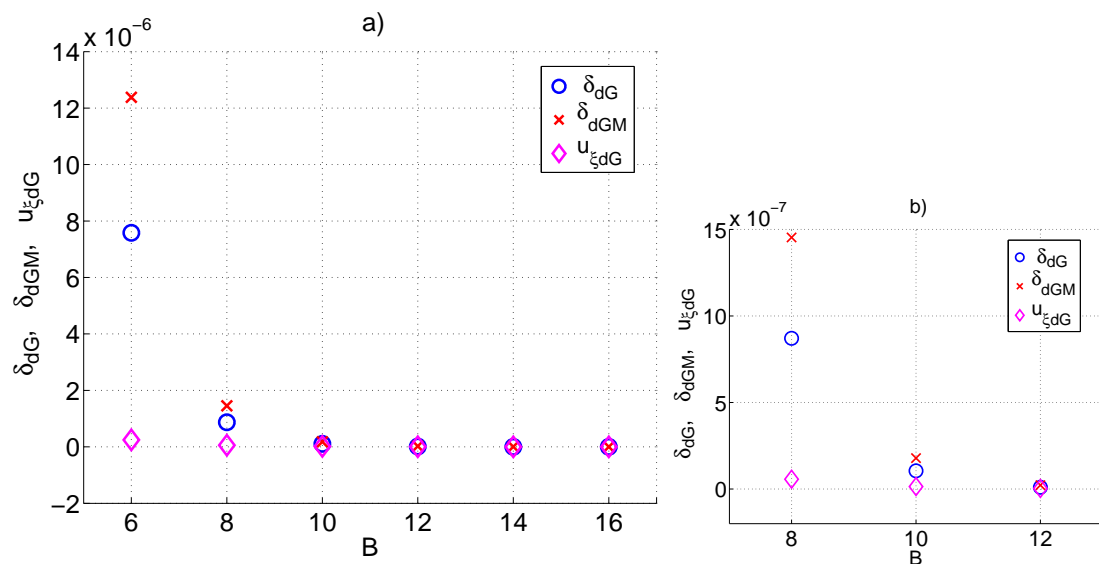
Dodatek zawiera wykresy prezentujące w formie graficznej wyniki przeprowadzonych badań, analizowanych w rozdziale 6.2.



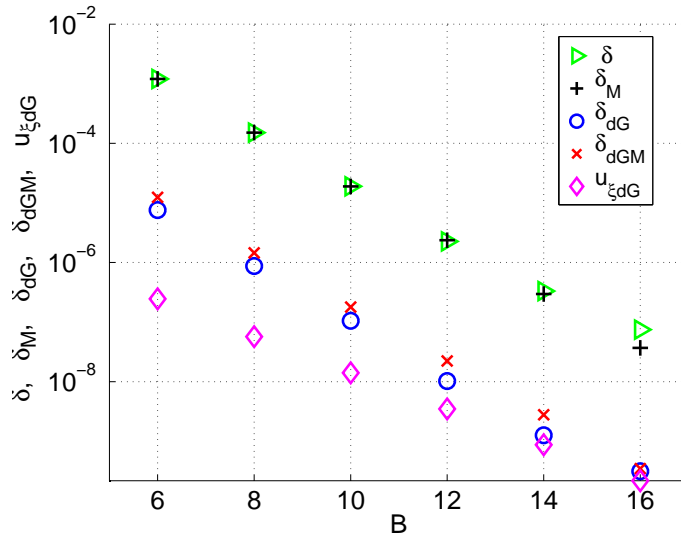
Rysunek 2. Względne obciążenie δ_{dGM} , δ_{dG} w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



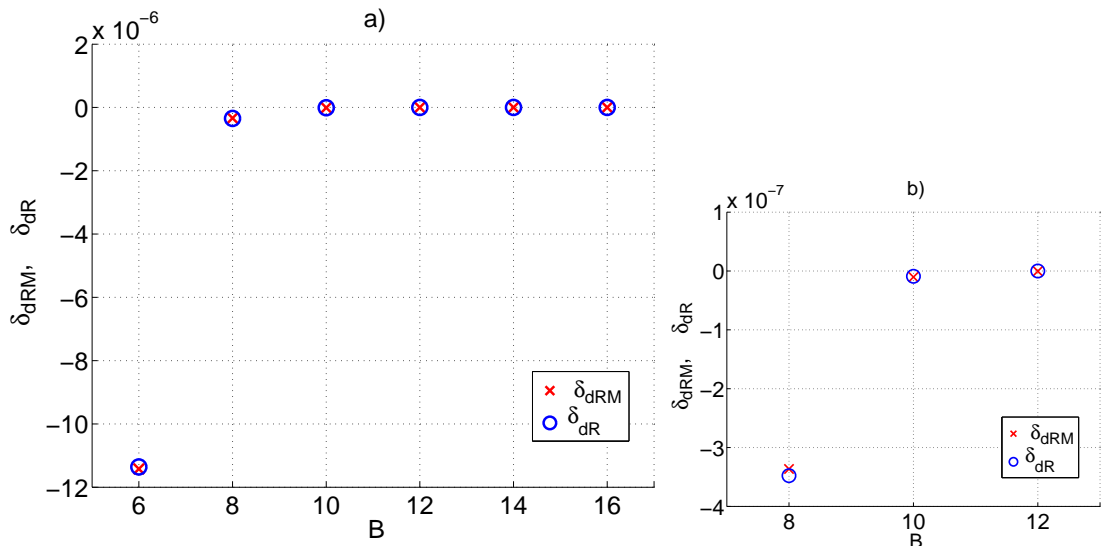
Rysunek 3. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym δ_{dG} , δ_{dGM} wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



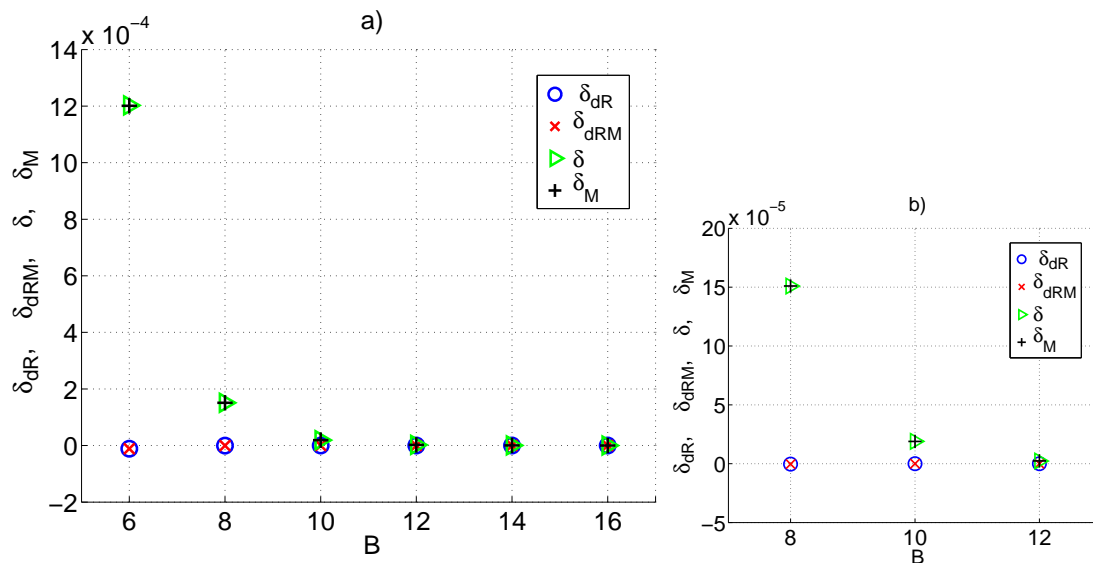
Rysunek 4. Względne obciążenie δ_{dG} , δ_{dGM} oraz względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dG}$ estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



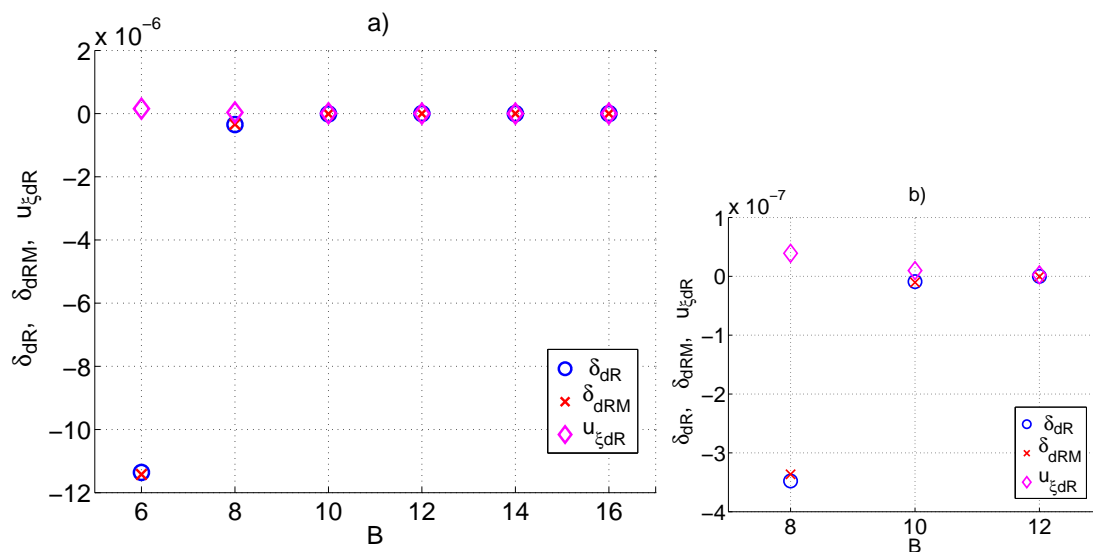
Rysunek 5. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M oraz względne obciążenie δ_{dG} , δ_{dGM} i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dG}$ sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym wyznaczone dla B -bitowych przetworników



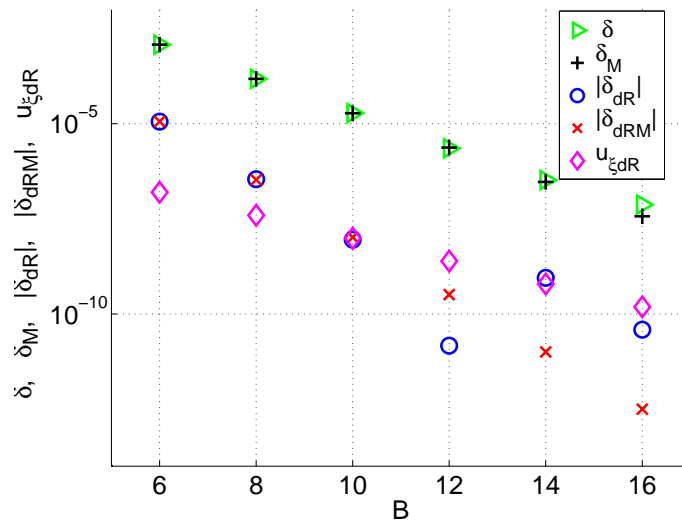
Rysunek 6. Względne obciążenie δ_{dRM} , δ_{dR} w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



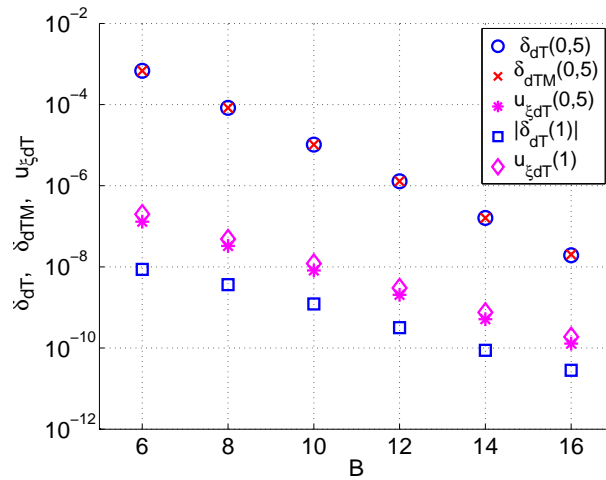
Rysunek 7. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym δ_{dR} , δ_{dRM} wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



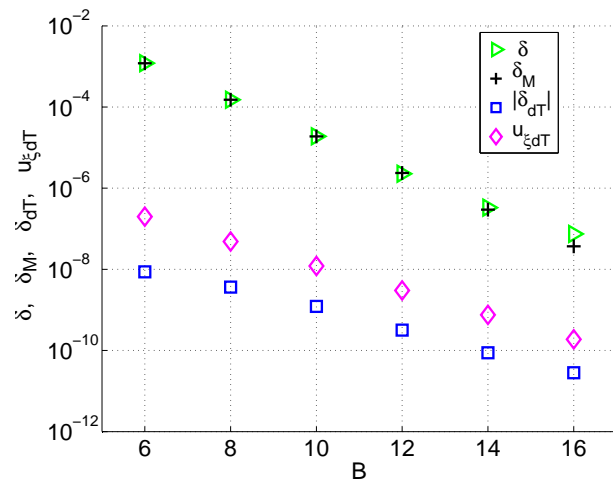
Rysunek 8. Względne obciążenie δ_{dR} , δ_{dRM} oraz względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dR}$ estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



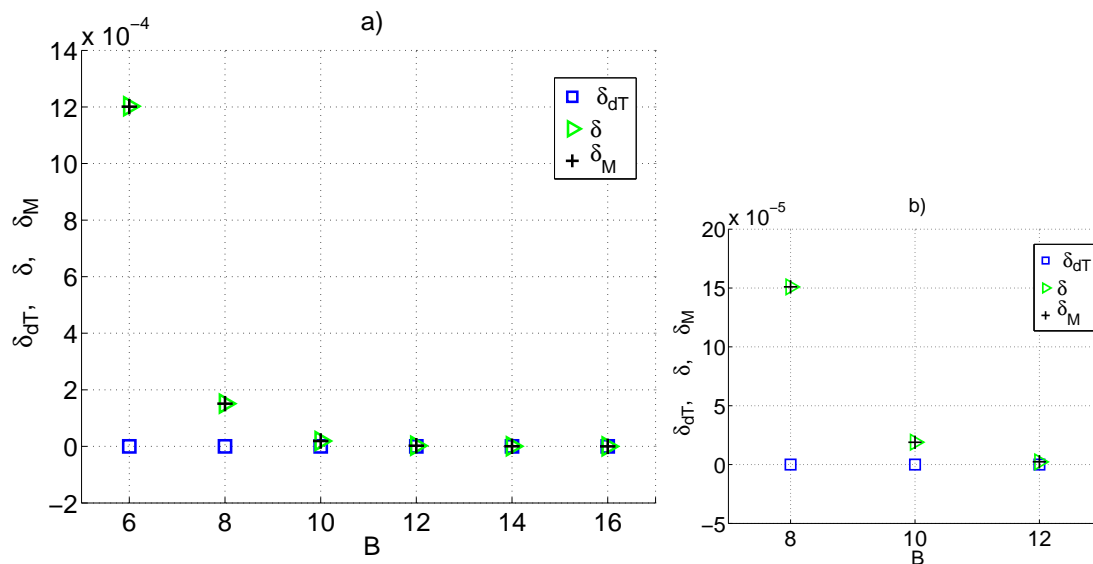
Rysunek 9. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M oraz względne obciążenie δ_{dR} , δ_{dRM} i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dR}$ sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym wyznaczone dla B -bitowych przetworników



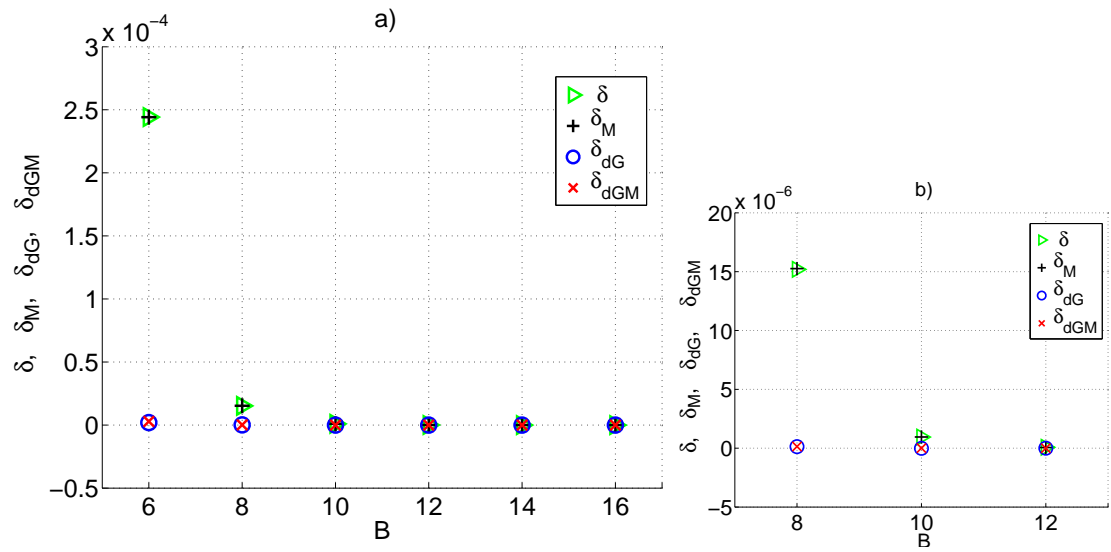
Rysunek 10. δ_{dT} , $\delta_{dT(0,5)}$ oraz $u_{\xi dT}$ estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym dla $A_{dT} = 0,5q, 1q$, $M = 2^{19} = 524\,288$, $N = 100\,000$



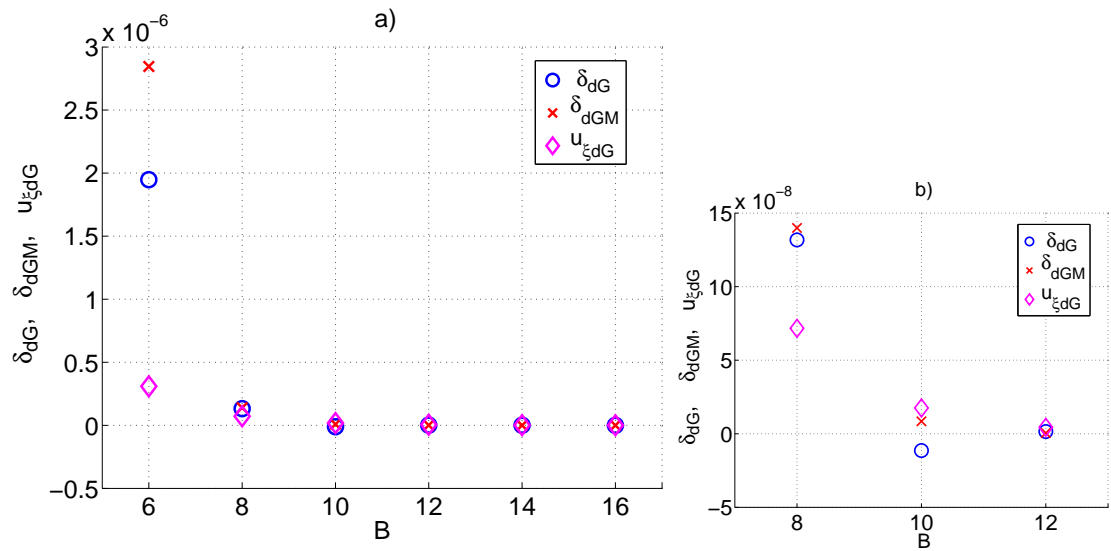
Rysunek 11. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M oraz względne obciążenie δ_{dT} i względną niepewność standardową typu A $u_{\xi_{dT}}$ sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym wyznaczone dla B -bitowych przetworników



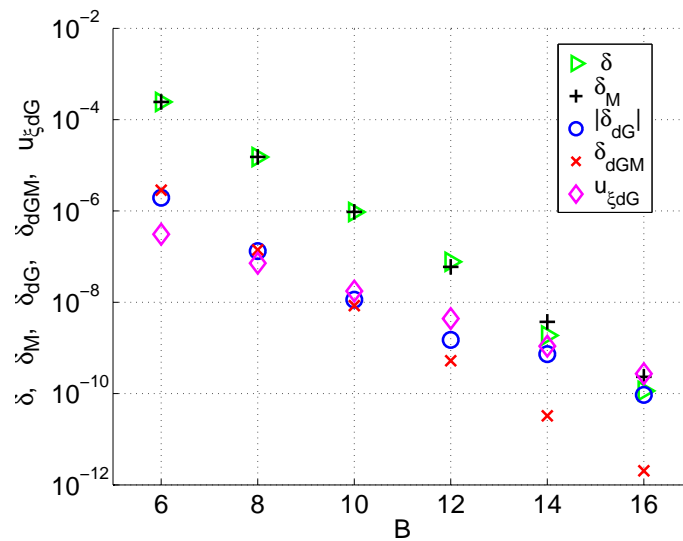
Rysunek 12. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym δ_{dT} wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



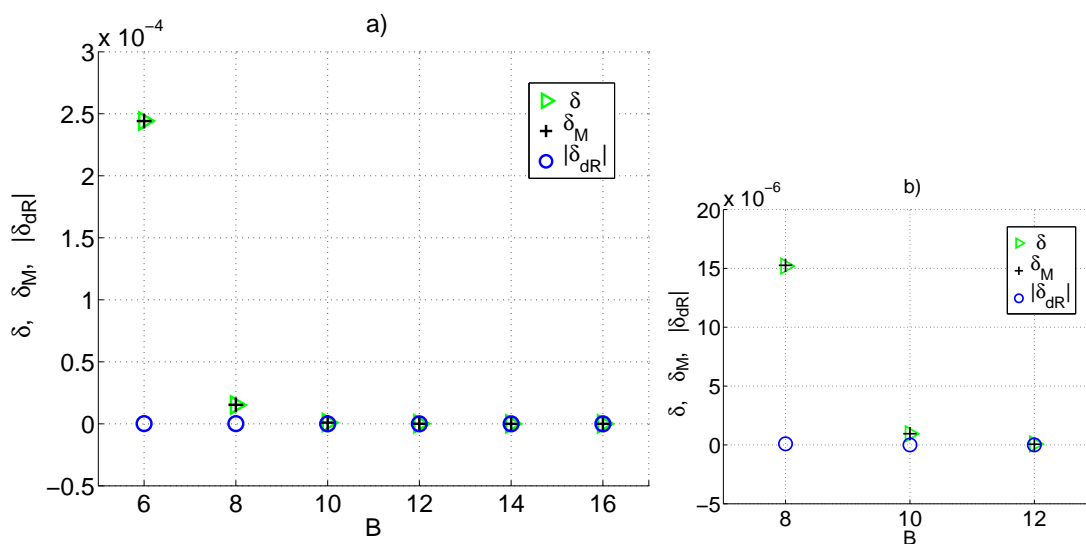
Rysunek 13. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie normalnym δ_{dG} , δ_{dGM} wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



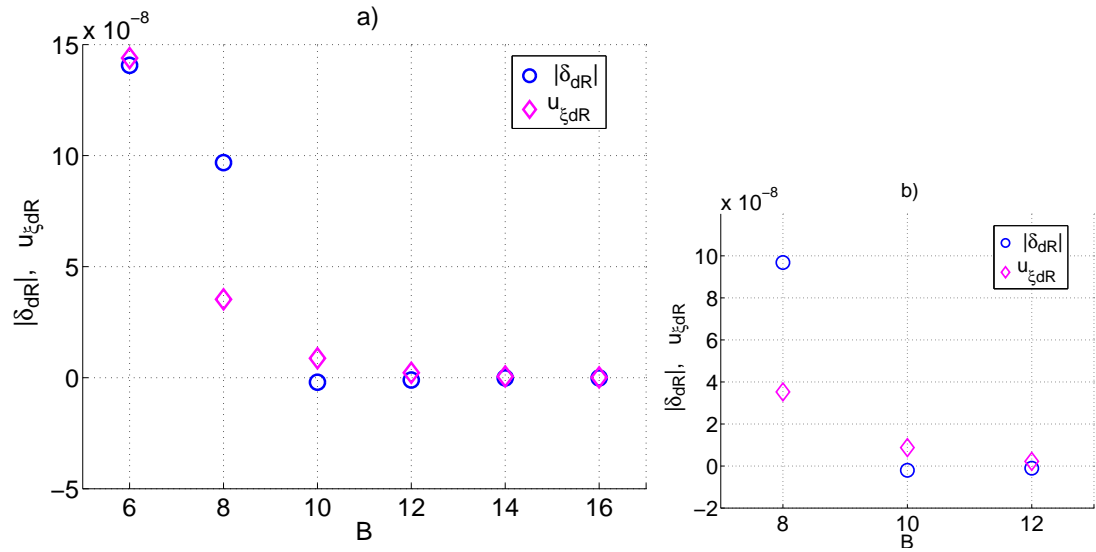
Rysunek 14. Względne obciążenie δ_{dG} , δ_{dGM} oraz względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dG}$ estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



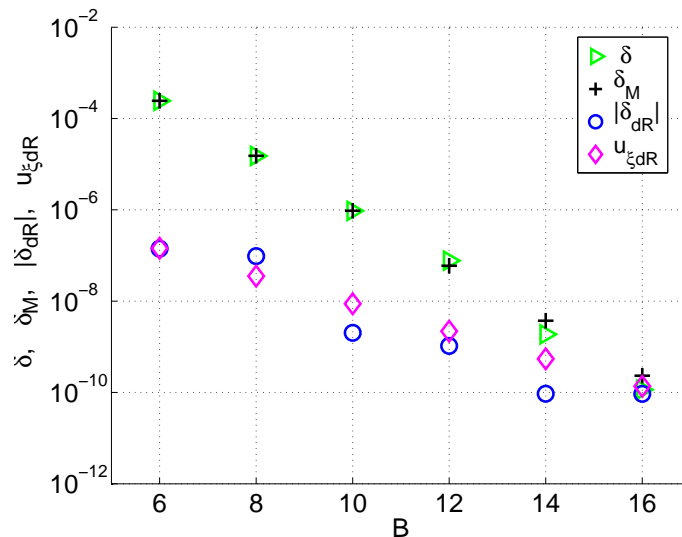
Rysunek 15. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M oraz względną obciążenie δ_{dG} , δ_{dGM} i względną niepewność standardową typu A $u_{\xi dG}$ sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie normalnym wyznaczone dla B -bitowych przetworników



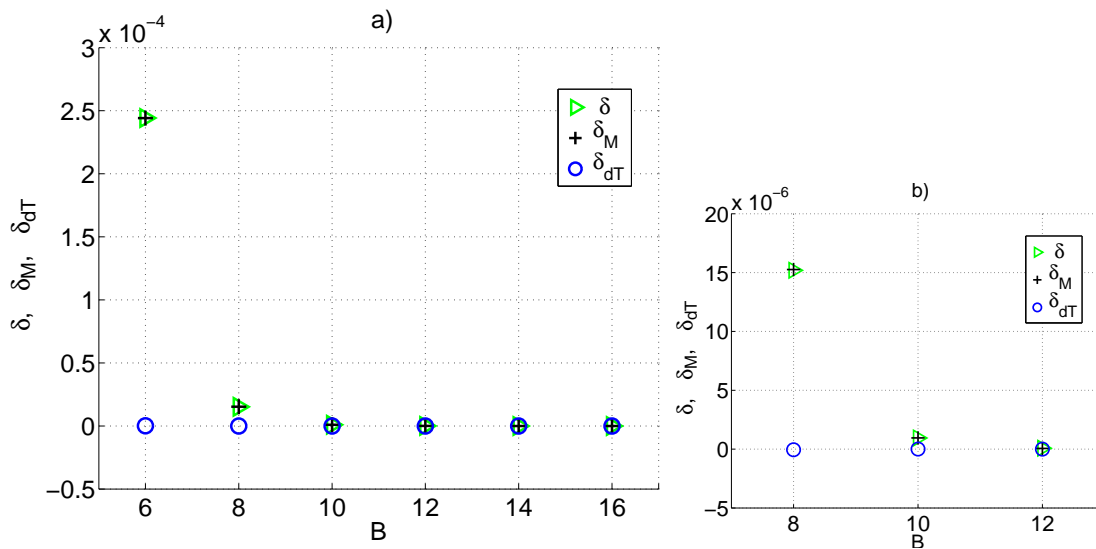
Rysunek 16. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym δ_{dR} wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



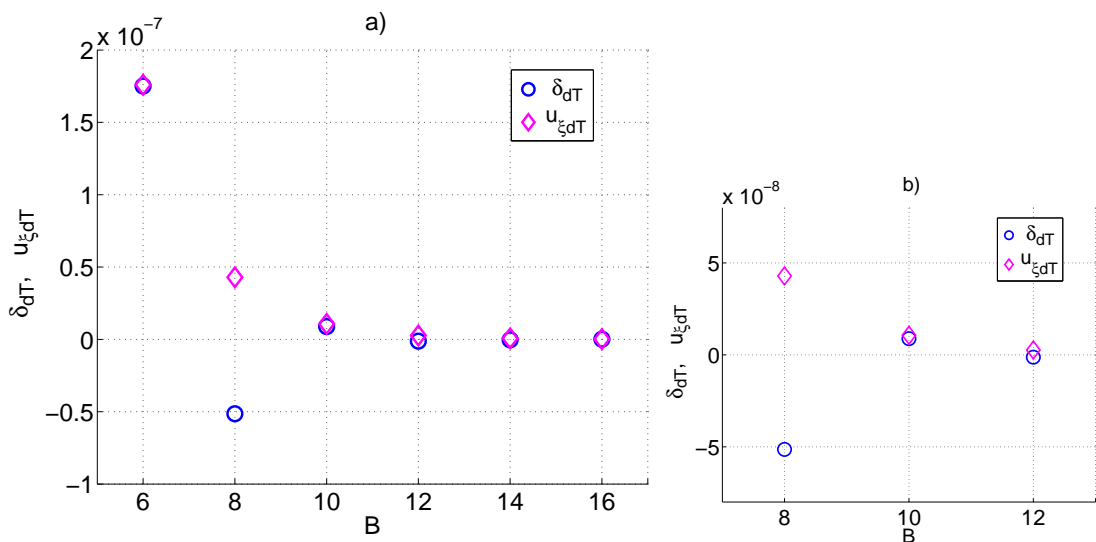
Rysunek 17. Względne obciążenie δ_{dR} oraz względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dR}$ estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie równomiernym wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



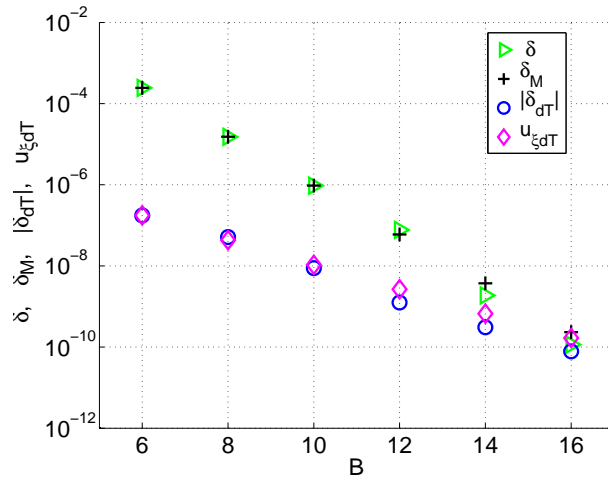
Rysunek 18. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M oraz względne obciążenie δ_{dR} i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dR}$ sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym wyznaczone dla B -bitowych przetworników



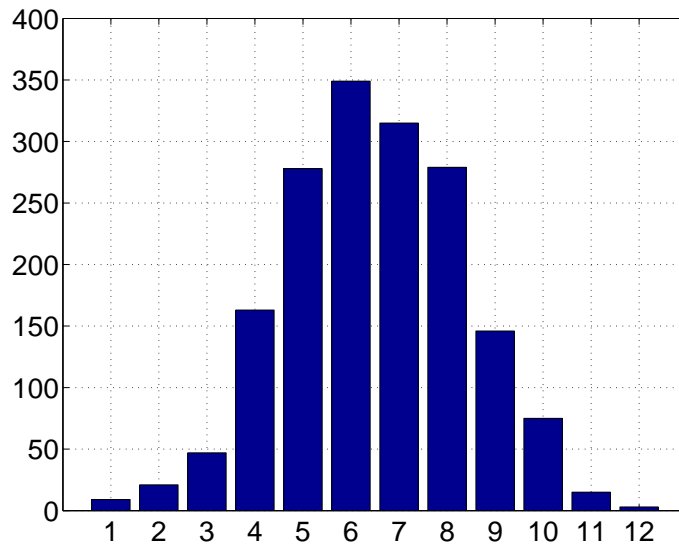
Rysunek 19. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym δ_{dT} wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



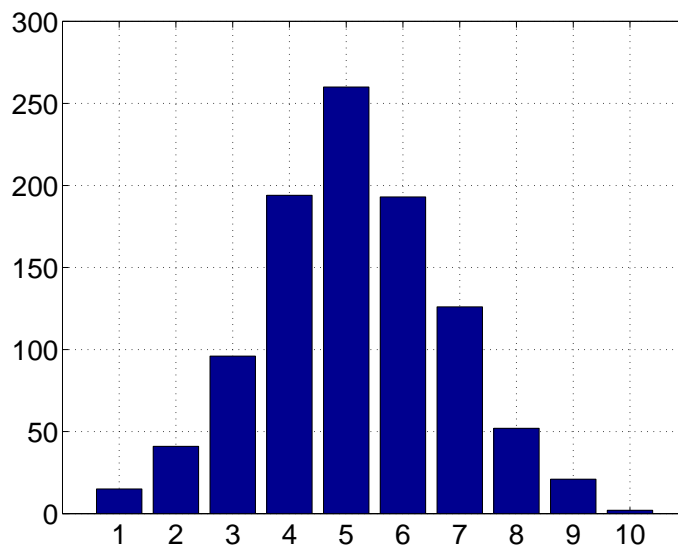
Rysunek 20. Względne obciążenie δ_{dT} oraz względny błąd standardowy $u_{\xi_{dT}}$ estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału trójkątnego z *ditherem* o rozkładzie trójkątnym wyznaczone dla przetworników a) 6 ÷ 16 bitowych, b) 8 ÷ 12 bitowych



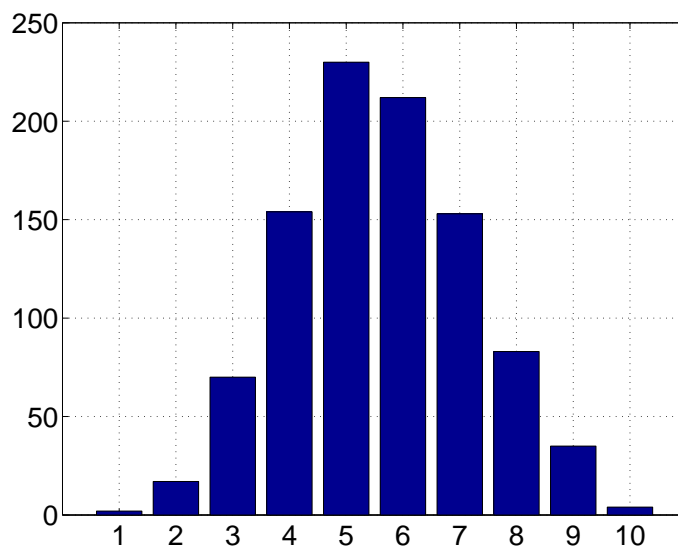
Rysunek 21. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M oraz względne obciążenie δ_{dT} i względny błąd standardowy ξ_{dT} sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym wyznaczone dla B -bitowych przetworników



Rysunek 22. Histogram względnego obciążenia δ_{dG} w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym



Rysunek 23. Histogram względnego obciążenia δ_{dR} w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym



Rysunek 24. Histogram względnego obciążenia δ_{dT} w pomiarze wartości średniokwadratowej sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym

D. Wyniki badań estymatora wartości średniokwadratowej przedstawione w formie tabelarycznej

Dodatek zawiera tabele z wynikami analizy matematycznej oraz przeprowadzonych badań symulacyjnych, omawianych w rozdziale 6.2.

Tabela 23. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M , względne obciążenie δ_{dG} , δ_{dGM} i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dG}$ sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym oraz współczynniki P_{dG} , P_{dGM} , wyznaczone dla B -bitowych przetworników ($A = 4,7 \text{ V}$, $\sigma_{dG} = 0,5q$)

B	δ	δ_M	δ_{dG}	δ_{dGM}	$u_{\xi dG}$	P_{dG}	P_{dGM}
$M = 2^{19} = 524\,288$, $N = 100\,000$							
6	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^2$	97
8	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^2$
10	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^2$
12	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$3,5 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^2$
14	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-9}$	$2,8 \cdot 10^{-9}$	$8,7 \cdot 10^{-10}$	$2,6 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^2$
16	$7,5 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-10}$	$3,5 \cdot 10^{-10}$	$2,2 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^2$

Tabela 24. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M , względne obciążenie δ_{dR} , δ_{dRM} i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dR}$ sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym oraz współczynniki P_{dR} , P_{dRM} , wyznaczone dla B -bitowych przetworników ($A = 4,9 \text{ V}$, $A_{dR} = 0,5q$)

B	δ	δ_M	δ_{dR}	δ_{dRM}	$u_{\xi dR}$	P_{dR}^*	P_{dRM}
$M = 2^{19} = 524\,288$, $N = 100\,000$							
6	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^2$
8	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$-3,5 \cdot 10^{-7}$	$-3,4 \cdot 10^{-7}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^2$	$4,5 \cdot 10^2$
10	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$-9,0 \cdot 10^{-9}$	$-1,0 \cdot 10^{-8}$	$9,8 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^3$	$1,8 \cdot 10^3$
12	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$-1,8 \cdot 10^{-9}$	$-3,2 \cdot 10^{-10}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	--	$7,3 \cdot 10^3$
14	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$8,9 \cdot 10^{-10}$	$-1,0 \cdot 10^{-11}$	$6,1 \cdot 10^{-10}$	--	$2,9 \cdot 10^4$
16	$7,5 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-11}$	$-3,1 \cdot 10^{-13}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$	--	$1,2 \cdot 10^5$
$M = 2^{21} = 2\,097\,152$, $N = 100\,000$							
12	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$-3,2 \cdot 10^{-10}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$	--	$7,3 \cdot 10^3$
14	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$-3,3 \cdot 10^{-10}$	$-1,0 \cdot 10^{-11}$	$3,1 \cdot 10^{-10}$	--	$2,9 \cdot 10^4$
16	$3,9 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$5,2 \cdot 10^{-11}$	$-3,1 \cdot 10^{-13}$	$7,7 \cdot 10^{-11}$	--	$1,2 \cdot 10^5$

* Podano wartości współczynnika P_{dR} dla przetworników 6 ÷ 10-bitowych, dla których procentowa różnica pomiędzy wynikami analizy matematycznej δ_{dRM} , a badań symulacyjnych δ_{dR} nie przekroczyła 50% (rozdział 6.1).

Tabela 25. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ , δ_M , względne obciążenie δ_{dT} , $\delta_{dT M}$ i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dT}$ sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym oraz współczynnik P_{dT} , wyznaczone dla B -bitowych przetworników ($A = 4,9 \text{ V}$, $A_{dT} = 1q$)

B	δ	δ_M	δ_{dT}	$\delta_{dT M}$	$u_{\xi dT}$	P_{dT}
$M = 2^{19} = 524\,288$, $N = 100\,000$						
6	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-9}$	0	$2,0 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^5$
8	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$	0	$4,8 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^4$
10	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$	0	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^4$
12	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^{-10}$	0	$3,0 \cdot 10^{-9}$	$7,1 \cdot 10^3$
14	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$-8,8 \cdot 10^{-11}$	0	$7,5 \cdot 10^{-10}$	$3,8 \cdot 10^3$
16	$7,5 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$-2,8 \cdot 10^{-11}$	0	$1,9 \cdot 10^{-10}$	$2,6 \cdot 10^3$

Tabela 26. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M , względne obciążenie δ_{dG} , δ_{dGM} i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dG}$ sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie normalnym oraz współczynniki

P_{dG} , P_{dGM} , wyznaczone dla B -bitowych przetworników ($A = 4,7 \text{ V}$, $\sigma_{dG} = 0,5q$)

B	δ	δ_M	δ_{dG}	δ_{dGM}	$u_{\xi dG}$	P_{dG}^*	P_{dGM}
$M = 10^6, N = 100\,000$							
6	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^2$	86
8	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$7,2 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^2$
10	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$-1,1 \cdot 10^{-8}$	$8,4 \cdot 10^{-9}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	--	$1,1 \cdot 10^2$
12	$7,7 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	$5,2 \cdot 10^{-10}$	$4,4 \cdot 10^{-9}$	--	$1,1 \cdot 10^2$
14	$1,9 \cdot 10^{-9}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$	$7,3 \cdot 10^{-10}$	$3,3 \cdot 10^{-11}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	--	$1,1 \cdot 10^2$
16	$1,1 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$	$9,4 \cdot 10^{-11}$	$2,0 \cdot 10^{-12}$	$2,7 \cdot 10^{-10}$	--	$1,1 \cdot 10^2$

* Podano wartości współczynnika P_{dG} dla przetworników 6 i 8-bitowych, dla których procentowa różnica pomiędzy wynikami analizy matematycznej δ_{dGM} , a badań symulacyjnych δ_{dG} nie przekroczyła 50% (rozdział 6.1).

Tabela 27. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M , względne obciążenie δ_{dR} , δ_{dRM} i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dR}$ sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym oraz współczynnik P_{dR} , wyznaczone dla B -bitowych przetworników ($A = 4,9 \text{ V}$, $A_{dR} = 0,5q$)

B	δ	δ_M	δ_{dR}	δ_{dRM}	$u_{\xi dR}$	P_{dR}
$M = 10^6, N = 100\,000$						
6	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	0	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^3$
8	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$	0	$3,5 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^2$
10	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$-2,0 \cdot 10^{-9}$	0	$8,8 \cdot 10^{-9}$	$4,7 \cdot 10^2$
12	$7,7 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$	$-1,0 \cdot 10^{-9}$	0	$2,2 \cdot 10^{-9}$	74
14	$1,9 \cdot 10^{-9}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$	$-9,4 \cdot 10^{-11}$	0	$5,5 \cdot 10^{-10}$	20
16	$1,2 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$	$-9,3 \cdot 10^{-11}$	0	$1,4 \cdot 10^{-10}$	1,2

Tabela 28. Względne obciążenie w pomiarze wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ , δ_M , względne obciążenie δ_{dT} , $\delta_{dT M}$ i względna niepewność standardowa typu A $u_{\xi dT}$ sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym oraz współczynnik P_{dT} , wyznaczone dla B -bitowych przetworników ($A = 4,9 \text{ V}$, $A_{dT} = 1q$)

B	δ	δ_M	δ_{dT}	$\delta_{dT M}$	$u_{\xi dT}$	P_{dT}
$M = 10^6, N = 100\,000$						
6	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	0	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^3$
8	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$-5,1 \cdot 10^{-8}$	0	$4,3 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^2$
10	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$8,8 \cdot 10^{-9}$	0	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^2$
12	$7,7 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$	$-1,3 \cdot 10^{-9}$	0	$2,7 \cdot 10^{-9}$	62
14	$1,9 \cdot 10^{-9}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$	$-3,1 \cdot 10^{-10}$	0	$6,7 \cdot 10^{-10}$	6,1
16	$1,2 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$	$7,8 \cdot 10^{-11}$	0	$1,7 \cdot 10^{-10}$	1,5

Tabela 29. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału sinusoidalnego δ oraz względne obciążenie i względna niepewność standardowa typu A sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie: normalnym o dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$, równomiernym o amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ oraz trójkątnym o amplitudzie $A_{dR} = 1q$ – porównanie uzyskanych wyników za pomocą współczynników: P_{dG}, P_{dR}, P_{dT} ($A = 4,9 \text{ V}, M = 2^{19} = 524\,288, N = 100\,000$)

B	δ	δ_{dG}	δ_{dR}	δ_{dT}	$u_{\xi dG}$	$u_{\xi dR}$	$u_{\xi dT}$
6	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$	$8,7 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-7}$
8	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$9,7 \cdot 10^{-7}$	$-3,5 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-8}$
10	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$-9,0 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$9,8 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$
12	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$	$-1,9 \cdot 10^{-9}$	$3,2 \cdot 10^{-10}$	$3,5 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	$3,0 \cdot 10^{-9}$

B	P_{dG}	P_{dR}	P_{dT}
6	$1,5 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^5$
8	$1,6 \cdot 10^2$	$4,3 \cdot 10^2$	$4,1 \cdot 10^4$
10	$1,6 \cdot 10^2$	$2,1 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^4$
12	$1,8 \cdot 10^2$	$1,3 \cdot 10^3$	$7,1 \cdot 10^3$

Tabela 30. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału trójkątnego δ oraz względne obciążenie i względna niepewność standardowa typu A sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie: normalnym o dyspersji $\sigma_{dG} = 0,5q$, równomiernym o amplitudzie $A_{dR} = 0,5q$ oraz trójkątnym o amplitudzie $A_{dR} = 1q$ – porównanie uzyskanych wyników za pomocą współczynników: P_{dG}, P_{dR}, P_{dT} ($A = 4,9 \text{ V}, M = 10^6 = 1\,000\,000, N = 100\,000$)

B	δ	δ_{dG}	δ_{dR}	δ_{dT}	$u_{\xi dG}$	$u_{\xi dR}$	$u_{\xi dT}$
6	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$9,9 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$
8	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$9,7 \cdot 10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^{-8}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$	$3,5 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-8}$
10	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$-6,1 \cdot 10^{-8}$	$-2,0 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$	$8,8 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$

B	P_{dG}	P_{dR}	P_{dT}
6	$1,6 \cdot 10^2$	$1,7 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$
8	93	$1,6 \cdot 10^2$	$3,0 \cdot 10^2$
10	16	$4,7 \cdot 10^2$	$3,8 \cdot 10^2$

E. Wyniki badań estymatora funkcji autokorelacji przedstawione w formie tabelarycznej

Dodatek zawiera tabele z wynikami przeprowadzonych badań symulacyjnych, analizowanych w rozdziale 6.3.

Dodatkowo, w celach porównawczych obliczono:

- $b_M(0)$ – obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału użytecznego, obliczone na podstawie iloczynu względnego obciążenia $\delta_M(0)$ i wartości średniokwadratowej sygnału użytecznego,
- $b_{d[GRT]M}(0)$ – obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału użytecznego i *ditherowego* o rozkładzie: normalnym b_{dGM} , równomiernym b_{dRM} lub trójkątnym b_{dTM} , obliczone na podstawie iloczynu względnego obciążenia $\delta_{d[GRT]M}(0)$ i wartości średniokwadratowej sygnału użytecznego,
- $Pb_{d[GRT]M}(0)$ – iloraz wartości bezwzględnych $b_M(0)$ oraz $b_{d[GRT]M}(0)$.

Tabela 31. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego z *ditherem* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 2^{19}, N = 100\,000, B = 6$)

k	$R_x(k), R_x^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A,dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,047, 11,054	11,060	11,054	$1,3 \cdot 10^{-2}$	--	$8,4 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,8100	7,8193	7,8101	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$6,2 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$7,5 \cdot 10^{-18}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$-6,7 \cdot 10^{-16}$	--	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$9,6 \cdot 10^{-7}$	--
$0,75\pi$	-7,8100	-7,8193	-7,8101	$-9,3 \cdot 10^{-3}$	$-7,5 \cdot 10^{-3}$	$-6,2 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^2$
1π	-11,045	-11,060	-11,045	$-1,5 \cdot 10^{-2}$	$-1,3 \cdot 10^{-2}$	$-8,8 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,8100	-7,8193	-7,8101	$-9,3 \cdot 10^{-3}$	$-7,5 \cdot 10^{-3}$	$-6,2 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^2$
$1,5\pi$	$-2,0 \cdot 10^{-15}$	$-7,5 \cdot 10^{-18}$	$-2,2 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-15}$	--	$-2,2 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	--
$1,75\pi$	7,8100	7,8193	7,8101	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^2$
2π	11,045	11,060	11,045	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$8,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 1,3 \cdot 10^{-2}, b_{dGM}(0) = 1,4 \cdot 10^{-4}, Pb_{dGM}(0) = 97$$

Tabela 32. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 8$)

k	$R_x(k), R_x^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_{dG}}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,0451, 11,0455	11,0468	11,0455	$1,7 \cdot 10^{-3}$	--	$9,6 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,80999	7,81118	7,80999	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$9,9 \cdot 10^{-17}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$-5,8 \cdot 10^{-16}$	--	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	--
$0,75\pi$	-7,80999	-7,81118	-7,80999	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,1 \cdot 10^{-3}$	$-6,5 \cdot 10^{-6}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^2$
1π	-11,0450	-11,0468	-11,0450	$-1,8 \cdot 10^{-3}$	$-1,7 \cdot 10^{-3}$	$-9,6 \cdot 10^{-6}$	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,80999	-7,81118	-7,80999	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,1 \cdot 10^{-3}$	$-7,2 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^2$
$1,5\pi$	$-2,0 \cdot 10^{-15}$	$-9,9 \cdot 10^{-17}$	$-2,8 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-15}$	--	$-2,8 \cdot 10^{-7}$	$3,9 \cdot 10^{-7}$	--
$1,75\pi$	7,80999	7,81118	7,80999	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^2$
2π	11,0450	11,0468	11,0450	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 1,7 \cdot 10^{-3}, b_{dGM}(0) = 1,6 \cdot 10^{-5}, Pb_{dGM}(0) = 1,0 \cdot 10^2$$

Tabela 33. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 2^{19}, N = 100\,000, B = 10$)

k	$R_x(k), R_x^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,04501, 11,04503	11,04522	11,04503	$2,1 \cdot 10^{-4}$	--	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,809994	7,810143	7,809995	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$1,7 \cdot 10^{-16}$	$-9,8 \cdot 10^{-9}$	$-5,1 \cdot 10^{-16}$	--	$-9,8 \cdot 10^{-9}$	$5,5 \cdot 10^{-8}$	--
$0,75\pi$	-7,809994	-7,810143	-7,809995	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-1,4 \cdot 10^{-4}$	$-7,0 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^2$
1π	-11,04500	-11,04522	-11,04500	$-2,2 \cdot 10^{-4}$	$-2,1 \cdot 10^{-4}$	$-1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,809994	-7,810143	-7,809995	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-1,4 \cdot 10^{-4}$	$-7,2 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^2$
$1,5\pi$	$-2,0 \cdot 10^{-15}$	$-1,7 \cdot 10^{-16}$	$-5,5 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-15}$	--	$-5,5 \cdot 10^{-8}$	$9,5 \cdot 10^{-8}$	--
$1,75\pi$	7,809994	7,810143	7,809995	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$8,9 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^2$
2π	11,04500	11,04522	11,04500	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$9,8 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 2,1 \cdot 10^{-4}, b_{dGM}(0) = 2,0 \cdot 10^{-6}, Pb_{dGM}(0) = 1,1 \cdot 10^2$$

Tabela 34. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 12$)

k	$R_x(k), R_x^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A,dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,045000, 11,045002	11,045025	11,045002	$2,5 \cdot 10^{-5}$	--	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,809994	7,810012	7,809995	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$2,1 \cdot 10^{-16}$	$7,6 \cdot 10^{-9}$	$-4,7 \cdot 10^{-16}$	--	$7,6 \cdot 10^{-9}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	--
$0,75\pi$	-7,809994	-7,810012	-7,809995	$-1,8 \cdot 10^{-5}$	$-1,7 \cdot 10^{-5}$	$-2,3 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$	$7,7 \cdot 10^3$
1π	-11,04500	-11,04503	-11,04500	$-2,5 \cdot 10^{-5}$	$-2,5 \cdot 10^{-5}$	$-1,8 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,809994	-7,810012	-7,809995	$-1,8 \cdot 10^{-5}$	$-1,7 \cdot 10^{-5}$	$-1,1 \cdot 10^{-7}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^2$
$1,5\pi$	$-2,0 \cdot 10^{-15}$	$-2,1 \cdot 10^{-16}$	$-3,8 \cdot 10^{-9}$	$1,8 \cdot 10^{-15}$	--	$-3,8 \cdot 10^{-9}$	$2,3 \cdot 10^{-8}$	--
$1,75\pi$	7,809994	7,810012	7,809995	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^2$
2π	11,04500	11,04503	11,04500	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 2,6 \cdot 10^{-5}, b_{dGM}(0) = 2,5 \cdot 10^{-7}, Pb_{dGM}(0) = 1,1 \cdot 10^2$$

Tabela 35. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 14$)

k	$R_x(k), R_x^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,0450000, 11,0450001	11,0450037	11,0450001	$3,7 \cdot 10^{-6}$	--	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$9,6 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,8099944	7,8099970	7,8099944	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$-1,1 \cdot 10^{-9}$	$-2,7 \cdot 10^{-16}$	--	$-1,1 \cdot 10^{-9}$	$3,4 \cdot 10^{-9}$	--
$0,75\pi$	-7,8099944	-7,8099970	-7,8099944	$-2,6 \cdot 10^{-6}$	$-2,6 \cdot 10^{-6}$	$-1,6 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^2$
1π	-11,045000	-11,045004	-11,045000	$-3,7 \cdot 10^{-6}$	$-3,7 \cdot 10^{-6}$	$-2,1 \cdot 10^{-8}$	$8,3 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,8099944	-7,8099970	-7,8099944	$-2,6 \cdot 10^{-6}$	$-2,6 \cdot 10^{-6}$	$-1,6 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^2$
$1,5\pi$	$-2,0 \cdot 10^{-15}$	$4,4 \cdot 10^{-17}$	$5,7 \cdot 10^{-10}$	$2,1 \cdot 10^{-15}$	--	$5,7 \cdot 10^{-10}$	$6,3 \cdot 10^{-9}$	--
$1,75\pi$	7,8099944	7,8099970	7,8099944	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^2$
2π	11,045000	11,045004	11,045000	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$6,8 \cdot 10^{-9}$	$3,3 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 3,3 \cdot 10^{-6}, b_{dGM}(0) = 3,1 \cdot 10^{-8}, Pb_{dGM}(0) = 1,1 \cdot 10^2$$

Tabela 36. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 16$)

k	$R_x(k),$ $R_x^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_{dG}}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,04500000, 11,04500001	11,04500082	11,04500001	$8,2 \cdot 10^{-7}$	---	$3,5 \cdot 10^{-9}$	$2,4 \cdot 10^{-9}$	$2,4 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,8099944	7,8099950	7,8099944	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-9}$	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$1,9 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$-7,5 \cdot 10^{-17}$	$-4,0 \cdot 10^{-10}$	$-7,5 \cdot 10^{-16}$	---	$-4,0 \cdot 10^{-10}$	$8,5 \cdot 10^{-10}$	---
$0,75\pi$	-7,8099944	-7,8099950	-7,8099944	$-5,8 \cdot 10^{-7}$	$-5,8 \cdot 10^{-7}$	$-2,3 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^2$
1π	-11,045000	-11,045001	-11,045000	$-8,2 \cdot 10^{-7}$	$-8,2 \cdot 10^{-7}$	$-2,7 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-9}$	$3,0 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,8099944	-7,8099950	-7,8099944	$-5,8 \cdot 10^{-7}$	$-5,8 \cdot 10^{-7}$	$-2,1 \cdot 10^{-9}$	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$2,8 \cdot 10^2$
$1,5\pi$	$-2,5 \cdot 10^{-15}$	$7,5 \cdot 10^{-17}$	$2,1 \cdot 10^{-10}$	$2,1 \cdot 10^{-15}$	---	$2,1 \cdot 10^{-10}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$	---
$1,75\pi$	7,8099944	7,8099950	7,8099944	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$	$1,4 \cdot 10^2$
2π	11,045000	11,045001	11,045000	$8,2 \cdot 10^{-7}$	$8,2 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$2,4 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 4,1 \cdot 10^{-7}, b_{dGM}(0) = 3,8 \cdot 10^{-9}, Pb_{dGM}(0) = 1,1 \cdot 10^2$$

Tabela 37. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 6$)

k	$R_x(k), R_x^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dR}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dR}(k)$	$u_{A,dR}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	12,007, 12,009	12,021	12,009	$1,4 \cdot 10^{-2}$	--	$-1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	8,4888	8,4989	8,4888	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$7,2 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^4$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-3,3 \cdot 10^{-18}$	$-4,7 \cdot 10^{-7}$	$-7,4 \cdot 10^{-16}$	--	$-4,7 \cdot 10^{-7}$	$6,9 \cdot 10^{-7}$	--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4989	-8,4888	$-1,0 \cdot 10^{-2}$	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$-2,9 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^4$
1π	-12,005	-12,021	-12,005	$-1,6 \cdot 10^{-2}$	$-1,4 \cdot 10^{-2}$	$-1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$8,9 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4989	-8,4888	$-1,0 \cdot 10^{-2}$	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$-2,1 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^4$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$3,3 \cdot 10^{-18}$	$-1,9 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-15}$	--	$-1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	--
$1,75\pi$	8,4888	8,4989	8,4888	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$-3,1 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^4$
2π	12,005	12,021	12,005	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^4$

$$b_M(0) = 1,4 \cdot 10^{-2}, b_{dRM}(0) = -1,4 \cdot 10^{-4}, Pb_{dRM}(0) = 1,1 \cdot 10^2$$

Tabela 38. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 8$)

k	$R_x(k), R_x^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dR}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	12,0051, 12,0052	12,0069	12,0052	$1,8 \cdot 10^{-3}$	--	$-4,2 \cdot 10^{-6}$	$4,7 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	8,4888	8,4901	8,4888	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$-4,7 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-16}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$-8,6 \cdot 10^{-16}$	--	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4901	-8,4888	$-1,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$3,2 \cdot 10^{-7}$	$5,9 \cdot 10^3$
1π	-12,0050	-12,0069	-12,0050	$-1,9 \cdot 10^{-3}$	$-1,8 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4901	-8,4888	$-1,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^3$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$1,2 \cdot 10^{-16}$	$-1,8 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^{-15}$	--	$-1,8 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^{-7}$	--
$1,75\pi$	8,4888	8,4901	8,4888	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$-9,5 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^4$
2π	12,0050	12,0069	12,0050	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$6,5 \cdot 10^3$

$$b_M(0) = 1,8 \cdot 10^{-3}, b_{dRM}(0) = -4,0 \cdot 10^{-6}, Pb_{dRM}(0) = 4,5 \cdot 10^2$$

Tabela 39. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 10$)

k	$R_x(k), R_x^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dR}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	12,00501, 12,00502	12,00524	12,00502	$2,3 \cdot 10^{-4}$	--	$-1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^3$
$0,25\pi$	8,4888	8,4890	8,4888	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$-4,0 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-17}$	$-1,6 \cdot 10^{-8}$	$-7,5 \cdot 10^{-16}$	--	$-1,6 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-8}$	--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4890	-8,4888	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-6,5 \cdot 10^{-8}$	$8,0 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^3$
1π	-12,0050	-12,0052	-12,0050	$-2,4 \cdot 10^{-4}$	$-2,3 \cdot 10^{-4}$	$-9,8 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4890	-8,4888	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-2,5 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$6,6 \cdot 10^3$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$1,5 \cdot 10^{-17}$	$5,4 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-15}$	--	$5,4 \cdot 10^{-8}$	$7,2 \cdot 10^{-8}$	--
$1,75\pi$	8,4888	8,4890	8,4888	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$-2,8 \cdot 10^{-8}$	$8,0 \cdot 10^{-8}$	$5,7 \cdot 10^3$
2π	12,0050	12,0052	12,0050	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$-7,2 \cdot 10^{-8}$	$8,3 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^3$

$$b_M(0) = 2,3 \cdot 10^{-4}, b_{dRM}(0) = -1,2 \cdot 10^{-7}, Pb_{dRM}(0) = 1,8 \cdot 10^3$$

Tabela 40. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 12$)

k	$R_x(k), R_x^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dR}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	12,005000, 12,005001	12,005028	12,005001	$2,7 \cdot 10^{-5}$	--	$-2,1 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^3$
$0,25\pi$	8,48882	8,48884	8,48882	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$-2,0 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$9,4 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$4,3 \cdot 10^{-17}$	$3,6 \cdot 10^{-9}$	$-6,9 \cdot 10^{-16}$	--	$3,6 \cdot 10^{-9}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	--
$0,75\pi$	-8,48882	-8,48884	-8,48882	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-7,4 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^3$
1π	-12,00500	-12,00503	-12,00500	$-2,8 \cdot 10^{-5}$	$-2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,48882	-8,48884	-8,48882	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^2$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$-4,3 \cdot 10^{-17}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-15}$	--	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	--
$1,75\pi$	8,48882	8,48884	8,48882	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$-3,5 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$5,5 \cdot 10^3$
2π	12,00500	12,00503	12,00500	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^3$

$$b_M(0) = 2,8 \cdot 10^{-5}, b_{dRM}(0) = -3,9 \cdot 10^{-9}, Pb_{dRM}(0) = 7,3 \cdot 10^3$$

Tabela 41. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V$, $A_{dT} = 1q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 6$)

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A,dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,007, 12,011	12,021	12,011	$1,4 \cdot 10^{-2}$	--	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^5$
$0,25\pi$	8,4888	8,4989	8,4888	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^4$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-3,3 \cdot 10^{-18}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$-7,4 \cdot 10^{-16}$	--	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$8,5 \cdot 10^{-7}$	--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4989	-8,4888	$-1,0 \cdot 10^{-2}$	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$-1,8 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$5,7 \cdot 10^4$
1π	-12,005	-12,021	-12,005	$-1,6 \cdot 10^{-2}$	$-1,4 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^4$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4989	-8,4888	$-1,0 \cdot 10^{-2}$	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$-3,5 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^4$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$3,3 \cdot 10^{-18}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^{-15}$	--	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	--
$1,75\pi$	8,4888	8,4989	8,4888	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^4$
2π	12,005	12,021	12,005	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^4$

$$b_M(0) = 1,4 \cdot 10^{-2}, b_{dT}(0) = 0$$

Tabela 42. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4, 9V, A_{dT} = 1q, M = 2^{19}, N = 100\ 000, B = 8$)

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A,dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,0052, 12,0054	12,0062	12,0054	$1,8 \cdot 10^{-3}$	--	$4,4 \cdot 10^{-8}$	$5,8 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^4$
$0,25\pi$	8,4888	8,4901	8,4888	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$-8,4 \cdot 10^{-9}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^5$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-16}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$-8,6 \cdot 10^{-16}$	--	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-7}$	--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4901	-8,4888	$-1,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,1 \cdot 10^{-7}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^4$
1π	-12,0050	-12,0069	-12,0050	$-1,9 \cdot 10^{-3}$	$-1,8 \cdot 10^{-3}$	$7,0 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^4$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4901	-8,4888	$-1,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,5 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$8,8 \cdot 10^3$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$1,2 \cdot 10^{-16}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-15}$	--	$5,7 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	--
$1,75\pi$	8,4888	8,4901	8,4888	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^4$
2π	12,0050	12,0069	12,0050	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^4$

$$b_M(0) = 1,8 \cdot 10^{-3}, b_{dT}(0) = 0$$

Tabela 43. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V$, $A_{dT} = 1q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\ 000$, $B = 10$)

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_{dT}}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,00501, 12,00502	12,00524	12,00502	$2,3 \cdot 10^{-4}$	--	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^4$
$0,25\pi$	8,4888	8,4890	8,4888	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$-3,7 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-17}$	$-2,3 \cdot 10^{-8}$	$-7,5 \cdot 10^{-16}$	--	$-2,3 \cdot 10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^{-8}$	--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4890	-8,4888	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-8}$	$9,8 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^3$
1π	-12,0050	-12,0052	-12,0050	$-2,4 \cdot 10^{-4}$	$-2,3 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^4$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4890	-8,4888	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$4,8 \cdot 10^3$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$1,5 \cdot 10^{-17}$	$-2,2 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-15}$	--	$-2,2 \cdot 10^{-9}$	$8,9 \cdot 10^{-8}$	--
$1,75\pi$	8,4888	8,4890	8,4888	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$-6,9 \cdot 10^{-9}$	$9,9 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^4$
2π	12,0050	12,0052	12,0050	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$-4,8 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$5,9 \cdot 10^3$

$$b_M(0) = 2,3 \cdot 10^{-4}, b_{dT_M}(0) = 0$$

Tabela 44. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V$, $A_{dT} = 1q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 12$)

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,005000, 12,005001	12,005028	12,005001	$2,7 \cdot 10^{-5}$	--	$3,8 \cdot 10^{-9}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^3$
$0,25\pi$	8,48882	8,48884	8,48882	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$5,2 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$4,7 \cdot 10^{-17}$	$-1,9 \cdot 10^{-9}$	$-6,9 \cdot 10^{-16}$	--	$-1,9 \cdot 10^{-9}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$	--
$0,75\pi$	-8,48882	-8,48884	-8,48882	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,3 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^3$
1π	-12,00500	-12,00503	-12,00500	$-2,8 \cdot 10^{-5}$	$-2,7 \cdot 10^{-5}$	$8,6 \cdot 10^{-9}$	$3,1 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,48882	-8,48884	-8,48882	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-10}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^4$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$-4,3 \cdot 10^{-17}$	$-3,9 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-15}$	--	$-3,9 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	--
$1,75\pi$	8,48882	8,48884	8,48882	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$-3,4 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$5,7 \cdot 10^3$
2π	12,00500	12,00502	12,00500	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$5,8 \cdot 10^{-10}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^4$

$$b_M(0) = 2,8 \cdot 10^{-5}, b_{dT}(0) = 0$$

Tabela 45. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V, A_{dT} = 1q, M = 2^{19}, N = 100\,000, B = 14$)

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_{dT}}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,0050000, 12,0050001	12,005004	12,005000	$4,0 \cdot 10^{-6}$	--	$-1,1 \cdot 10^{-9}$	$9,0 \cdot 10^{-9}$	$3,8 \cdot 10^3$
$0,25\pi$	8,488817	8,488820	8,488817	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$-1,9 \cdot 10^{-9}$	$6,6 \cdot 10^{-9}$	$1,4 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$2,9 \cdot 10^{-17}$	$3,0 \cdot 10^{-9}$	$-7,1 \cdot 10^{-16}$	--	$3,0 \cdot 10^{-9}$	$3,2 \cdot 10^{-9}$	--
$0,75\pi$	-8,488817	-8,488820	-8,488817	$-2,8 \cdot 10^{-6}$	$-2,8 \cdot 10^{-6}$	$-3,8 \cdot 10^{-10}$	$6,1 \cdot 10^{-9}$	$7,4 \cdot 10^3$
1π	-12,005000	-12,005004	-12,005000	$-4,0 \cdot 10^{-6}$	$-4,0 \cdot 10^{-6}$	$-4,5 \cdot 10^{-10}$	$7,8 \cdot 10^{-9}$	$9,0 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,488817	-8,488820	-8,488817	$-2,8 \cdot 10^{-6}$	$-2,8 \cdot 10^{-6}$	$-2,6 \cdot 10^{-9}$	$6,6 \cdot 10^{-9}$	$1,0 \cdot 10^3$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$-2,9 \cdot 10^{-17}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-15}$	--	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$5,6 \cdot 10^{-9}$	--
$1,75\pi$	8,488817	8,488820	8,488817	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$6,5 \cdot 10^{-10}$	$6,2 \cdot 10^{-9}$	$4,3 \cdot 10^3$
2π	12,005000	12,005004	12,005000	$4,0 \cdot 10^{-6}$	$4,0 \cdot 10^{-6}$	$-1,5 \cdot 10^{-9}$	$6,4 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^3$

$$b_M(0) = 3,5 \cdot 10^{-6}, b_{dT_M}(0) = 0$$

Tabela 46. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału sinusoidalnego oraz sumy sygnału sinusoidalnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V$, $A_{dT} = 1q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 16$)

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A,dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,00500000, 12,00500001	12,00500090	12,00500001	$8,9 \cdot 10^{-7}$	--	$-3,4 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^3$
$0,25\pi$	8,488817	8,488818	8,488817	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$-6,6 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$9,6 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$1,0 \cdot 10^{-17}$	$1,2 \cdot 10^{-9}$	$-7,3 \cdot 10^{-16}$	--	$1,2 \cdot 10^{-9}$	$8,0 \cdot 10^{-10}$	--
$0,75\pi$	-8,488817	-8,488818	-8,488817	$-6,3 \cdot 10^{-7}$	$-6,3 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	$3,6 \cdot 10^3$
1π	-12,005000	-12,005001	-12,005000	$-9,0 \cdot 10^{-7}$	$-8,9 \cdot 10^{-7}$	$8,5 \cdot 10^{-10}$	$1,9 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,488817	-8,488818	-8,488817	$-6,3 \cdot 10^{-7}$	$-6,3 \cdot 10^{-7}$	$-5,2 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$1,2 \cdot 10^3$
$1,5\pi$	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	$-1,0 \cdot 10^{-17}$	$-6,2 \cdot 10^{-10}$	$2,2 \cdot 10^{-15}$	--	$-6,2 \cdot 10^{-10}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$	--
$1,75\pi$	8,488817	8,488818	8,488817	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$-3,1 \cdot 10^{-10}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^3$
2π	12,005000	12,005001	12,005000	$9,0 \cdot 10^{-7}$	$8,9 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-10}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$	$6,2 \cdot 10^3$

$$b_M(0) = 4,4 \cdot 10^{-7}, b_{dT}(0) = 0$$

Tabela 47. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątego oraz sumy sygnału trójkątego i *dithera* o rozkładzie normalnym

$$(A = 4,7V, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 10^6, N = 100\,000, B = 6)$$

k	$R_x(k), R_x^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dG}(k)$	$b(k)$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	7,3651, 7,3721	7,3669	7,3721	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,0649	5,0641	5,0623	$-7,7 \cdot 10^{-4}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	0,3
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,8 \cdot 10^{-17}$	$-7,2 \cdot 10^{-7}$	$-1,8 \cdot 10^{-17}$	$-7,2 \cdot 10^{-7}$	$8,1 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,0649	-5,0641	-5,0623	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	0,3
$\frac{1}{2}T$	-7,3633	-7,3669	-7,3633	$-3,6 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^2$
$\frac{5}{8}T$	-5,0649	-5,0641	-5,0623	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	0,3
$\frac{3}{4}T$	$-3,8 \cdot 10^{-15}$	$1,8 \cdot 10^{-17}$	$-2,6 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-15}$	$-2,6 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,0649	5,0641	7,3633	$-7,7 \cdot 10^{-4}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	0,3
T	7,3633	7,3669	7,3633	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 1,8 \cdot 10^{-3}, b_{dGM}(0) = 2,1 \cdot 10^{-5}, Pb_{dGM}(0) = 86$$

Tabela 48. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątego oraz sumy sygnału trójkątego i *dithera* o rozkładzie normalnym

$$(A = 4,7V, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 10^6, N = 100\,000, B = 8)$$

k	$R_x(k), R_x^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dG}(k)$	$b(k)$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	7,3634, 7,3638	7,3636	7,3638	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \cdot 10^{-7}$	$5,3 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,0649	5,0624	5,0623	$-2,5 \cdot 10^{-3}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-7}$	1,0
$\frac{1}{4}T$	0	$-5,7 \cdot 10^{-18}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$-5,7 \cdot 10^{-18}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,0649	-5,0624	-5,0623	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	1,0
$\frac{1}{2}T$	-7,3633	-7,3636	-7,3633	$-2,2 \cdot 10^{-4}$	$-8,9 \cdot 10^{-7}$	$4,6 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^2$
$\frac{5}{8}T$	-5,0649	-5,0624	-5,0623	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-7}$	1,0
$\frac{3}{4}T$	$-1,4 \cdot 10^{-15}$	$5,7 \cdot 10^{-18}$	$-2,9 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-15}$	$-2,9 \cdot 10^{-7}$	$3,2 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,0649	5,0624	7,3623	$-2,5 \cdot 10^{-3}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	1,0
T	7,3633	7,3636	7,3633	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 1,1 \cdot 10^{-4}, b_{dGM}(0) = 1,0 \cdot 10^{-6}, Pb_{dGM}(0) = 1,1 \cdot 10^2$$

Tabela 49. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątego oraz sumy sygnału trójkątego i *dithera* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 10^6$, $N = 100\ 000$, $B = 6$)

k	$R_x(k), R_x^{dR}(k)$	$\overline{\widetilde{R}_x(k)}$	$\overline{\widetilde{R}_x^{dR}(k)}$	$b(k)$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	8,0054, 8,0075	8,0072	8,0075	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$7,0 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,5023	5,5042	5,5023	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^3$
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,3 \cdot 10^{-17}$	$-4,9 \cdot 10^{-7}$	$-1,3 \cdot 10^{-17}$	$-4,9 \cdot 10^{-7}$	$5,7 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,5023	-5,5042	-5,5023	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^3$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033	-8,0072	-8,0033	$-3,9 \cdot 10^{-3}$	$-3,8 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^4$
$\frac{5}{8}T$	-5,5023	-5,5042	-5,5023	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$-2,2 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$9,1 \cdot 10^3$
$\frac{3}{4}T$	$-4,0 \cdot 10^{-15}$	$1,3 \cdot 10^{-17}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$9,9 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,5023	5,5042	5,5023	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^3$
T	8,0033	8,0072	8,0033	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$-6,1 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$6,4 \cdot 10^3$

$$b_M(0) = 2,0 \cdot 10^{-3}, b_{dRM}(0) = 0$$

Tabela 50. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątego oraz sumy sygnału trójkątego i *dithera* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 10^6$, $N = 100\,000$, $B = 8$)

k	$R_x(k), R_x^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dR}(k)$	$b(k)$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	8,003457, 8,003581	8,003577	8,003581	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$-5,5 \cdot 10^{-7}$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$2,2 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,5023	5,5024	5,5023	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^3$
$\frac{1}{4}T$	0	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$-1,1 \cdot 10^{-7}$	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$-1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,5023	-5,5024	-5,5023	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^2$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033	-8,0036	-8,0033	$-2,4 \cdot 10^{-4}$	$-3,1 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$7,9 \cdot 10^2$
$\frac{5}{8}T$	-5,5023	-5,5024	-5,5023	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^{-7}$	$5,0 \cdot 10^2$
$\frac{3}{4}T$	$-4,0 \cdot 10^{-15}$	$4,4 \cdot 10^{-17}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,5023	5,5024	5,5023	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$-5,4 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^2$
T	8,0033	8,0036	8,0033	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^3$

$$b_M(0) = 1,2 \cdot 10^{-4}, b_{dRM}(0) = 0$$

Tabela 51. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątego oraz sumy sygnału trójkątego i *dithera* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 10^6$, $N = 100\,000$, $B = 10$)

k	$R_x(k), R_x^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dR}(k)$	$b(k)$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	8,00334100, 8,00334866	8,00334857	8,00334859	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$-6,7 \cdot 10^{-8}$	$9,9 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,50229	5,50230	5,50229	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$-7,1 \cdot 10^{-8}$	$7,3 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^2$
$\frac{1}{4}T$	0	$-2,0 \cdot 10^{-17}$	$-1,3 \cdot 10^{-8}$	$-2,0 \cdot 10^{-17}$	$-1,3 \cdot 10^{-8}$	$3,5 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,50229	-5,50230	-5,50229	$-7,6 \cdot 10^{-4}$	$-2,4 \cdot 10^{-8}$	$6,8 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^2$
$\frac{1}{2}T$	-8,00333	-8,00335	-8,00333	$-1,5 \cdot 10^{-5}$	$-8,7 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^2$
$\frac{5}{8}T$	-5,50229	-5,50230	-5,50229	$-7,6 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$	$7,2 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^2$
$\frac{3}{4}T$	$-4,0 \cdot 10^{-15}$	$2,0 \cdot 10^{-17}$	$6,2 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$6,2 \cdot 10^{-8}$	$6,1 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,50229	5,50230	5,50229	$7,6 \cdot 10^{-4}$	$-8,1 \cdot 10^{-8}$	$6,8 \cdot 10^{-8}$	$9,4 \cdot 10^1$
T	8,00333	8,00335	8,00333	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$-3,1 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 7,6 \cdot 10^{-6}, b_{dRM}(0) = 0$$

Tabela 52. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątego oraz sumy sygnału trójkątego i *dithera* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V, A_{dR} = 0,5q, M = 10^6, N = 100\ 000, B = 12$)

k	$R_x(k), R_x^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dR}(k)$	$b(k)$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	8,00333381, 8,00333429	8,00333443	8,00333430	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$8,0 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	77
$\frac{1}{8}T$	5,5022917	5,5022922	5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	34
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,1 \cdot 10^{-18}$	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$-1,1 \cdot 10^{-18}$	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$8,7 \cdot 10^{-9}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,5022917	-5,5022922	-5,5022917	$-5,4 \cdot 10^{-7}$	$6,1 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	89
$\frac{1}{2}T$	-8,0033333	-8,0033344	-8,0033333	$-1,1 \cdot 10^{-6}$	$-2,5 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	44
$\frac{5}{8}T$	-5,5022917	-5,5022922	-5,5022917	$-5,4 \cdot 10^{-7}$	$-3,2 \cdot 10^{-10}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^3$
$\frac{3}{4}T$	$-4,0 \cdot 10^{-15}$	$1,1 \cdot 10^{-18}$	$-8,8 \cdot 10^{-9}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$-8,8 \cdot 10^{-9}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,5022917	5,5022922	5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$-3,4 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	16
T	8,0033333	8,0033344	8,0033333	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	46

$$b_M(0) = 4,8 \cdot 10^{-7}, b_{dRM}(0) = 0$$

Tabela 53. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątnego oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym

$$(A = 4, 9V, A_{dT} = 1q, M = 10^6, N = 100\ 000, B = 6)$$

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_{dT}}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	8,0053, 8,0096	8,0072	8,0096	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^3$
$\frac{1}{8}T$	5,5023	5,5042	5,5023	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$6,2 \cdot 10^3$
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,3 \cdot 10^{-17}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$-1,3 \cdot 10^{-17}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^{-7}$	—
$\frac{3}{8}T$	-5,5023	-5,5042	-5,5023	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$-8,4 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^3$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033	-8,0072	-8,0033	$-3,9 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^3$
$\frac{5}{8}T$	-5,5023	-5,5042	-5,5023	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$9,1 \cdot 10^3$
$\frac{3}{4}T$	$-4,0 \cdot 10^{-15}$	$1,3 \cdot 10^{-17}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	—
$\frac{7}{8}T$	5,5023	5,5042	5,5023	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$-1,8 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^4$
T	8,0033	8,0072	8,0033	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^4$

$$b_M(0) = 2,0 \cdot 10^{-3}, b_{dT}(0) = 0$$

Tabela 54. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątnego oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym

$$(A = 4, 9V, A_{dT} = 1q, M = 10^6, N = 100\ 000, B = 8)$$

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_{dT}}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	8,0053, 8,0037	8,0036	8,0037	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$-5,3 \cdot 10^{-7}$	$4,9 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,5023	5,5024	5,5023	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$4,0 \cdot 10^2$
$\frac{1}{4}T$	0	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$-3,8 \cdot 10^{-8}$	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$-3,4 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,5023	-5,5024	-5,5023	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	$-3,5 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^2$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033	-8,0036	-8,0033	$-2,4 \cdot 10^{-4}$	$-4,8 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$	$5,1 \cdot 10^2$
$\frac{5}{8}T$	-5,5023	-5,5024	-5,5023	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	$-3,0 \cdot 10^{-7}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^2$
$\frac{3}{4}T$	$-4,0 \cdot 10^{-15}$	$4,4 \cdot 10^{-17}$	$-6,2 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$-6,2 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,5023	5,5024	5,5023	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$5,4 \cdot 10^2$
T	8,0033	8,0036	8,0033	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$5,5 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 1,2 \cdot 10^{-4}, b_{dT}(0) = 0$$

Tabela 55. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątnego oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym

$$(A = 4,9V, A_{dT} = 1q, M = 10^6, N = 100\,000, B = 10)$$

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_{dT}}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	8,00334, 8,00336	8,00335	8,00336	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$7,1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,50229	5,50230	5,50229	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-8}$	$8,9 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^2$
$\frac{1}{4}T$	0	$-2,0 \cdot 10^{-17}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$-2,0 \cdot 10^{-17}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,50229	-5,50230	-5,50229	$-7,6 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$8,3 \cdot 10^{-8}$	$7,5 \cdot 10^2$
$\frac{1}{2}T$	-8,00333	-8,00335	-8,00333	$-1,5 \cdot 10^{-5}$	$-8,0 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^2$
$\frac{5}{8}T$	-5,50229	-5,50230	-5,50229	$-7,6 \cdot 10^{-6}$	$-3,6 \cdot 10^{-8}$	$8,9 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^2$
$\frac{3}{4}T$	$-4,0 \cdot 10^{-15}$	$2,0 \cdot 10^{-17}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$7,4 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,50229	5,50230	5,50229	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$7,7 \cdot 10^{-9}$	$8,3 \cdot 10^{-8}$	$9,9 \cdot 10^2$
T	8,00333	8,00335	8,00333	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$8,5 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^2$

$$b_M(0) = 7,6 \cdot 10^{-6}, b_{dT}(0) = 0$$

Tabela 56. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze autokorelacji sygnału trójkątnego oraz sumy sygnału trójkątnego i *dithera* o rozkładzie trójkątnym

$$(A = 4,9V, A_{dT} = 1q, M = 10^6, N = 100\ 000, B = 12)$$

k	$R_x(k), R_x^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_x(k)$	$\widetilde{R}_x^{dT}(k)$	$b(k)$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	8.0033338, 8.0033348	8.0033344	8.0033348	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$-1,0 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-8}$	61
$\frac{1}{8}T$	5,5022917	5,5022922	5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$-1,6 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^2$
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,1 \cdot 10^{-18}$	$-2,7 \cdot 10^{-9}$	$-1,1 \cdot 10^{-18}$	$-2,7 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,5022917	-5,5022922	-5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	35
$\frac{1}{2}T$	-8,0033333	-8,0033344	-8,0033333	$-1,1 \cdot 10^{-6}$	$-2,1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	53
$\frac{5}{8}T$	-5,5022917	-5,5022922	-5,5022917	$-5,4 \cdot 10^{-7}$	$6,2 \cdot 10^{-9}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	87
$\frac{3}{4}T$	$-4,0 \cdot 10^{-15}$	$1,1 \cdot 10^{-18}$	$-7,7 \cdot 10^{-10}$	$4,1 \cdot 10^{-15}$	$-7,7 \cdot 10^{-10}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{7}{8}T$	5,5022917	5,5022922	5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$-6,2 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	87
T	8,0033333	8,0033344	8,0033333	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	40

$$b_M(0) = 4,8 \cdot 10^{-7}, b_{dT}(0) = 0$$

F. Wyniki badań estymatora funkcji korelacji wzajemnej przedstawione w formie tabelarycznej

Dodatek zawiera tabele z wynikami przeprowadzonych badań symulacyjnych, analizowanych w rozdziale 6.4.

Tabela 57. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 6$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A,dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,045	11,060	11,054	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,8100	7,8193	7,8101	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-5}$		$1,4 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$7,5 \cdot 10^{-18}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$-6,7 \cdot 10^{-16}$	--	$1,1 \cdot 10^{-6}$		--
$0,75\pi$	-7,8100	-7,8193	-7,8101	$-9,3 \cdot 10^{-3}$	$-7,5 \cdot 10^{-3}$	$-6,6 \cdot 10^{-5}$		$1,4 \cdot 10^2$
1π	-11,045	-11,060	-11,045	$-1,5 \cdot 10^{-2}$	$-1,3 \cdot 10^{-2}$	$-9,0 \cdot 10^{-5}$		$1,7 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,8100	-7,8193	-7,8101	$-9,3 \cdot 10^{-3}$	$-7,5 \cdot 10^{-3}$	$-6,4 \cdot 10^{-5}$		$1,5 \cdot 10^2$
$1,75\pi$	7,8100	7,8193	7,8101	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-5}$		$1,5 \cdot 10^2$
2π	11,045	11,060	11,045	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$9,2 \cdot 10^{-5}$		$1,6 \cdot 10^2$

Tabela 58. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 2^{19}, N = 100\,000, B = 8$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dG}(k)$	$\overline{\widetilde{R}}_{xy}(k)$	$\overline{\widetilde{R}}_{xy}^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A,dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,0450	11,0468	11,0450	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,8100	7,8112	7,8100	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$7,9 \cdot 10^{-6}$		$1,5 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$9,9 \cdot 10^{-17}$	$7,1 \cdot 10^{-7}$	$-5,8 \cdot 10^{-16}$	--	$7,1 \cdot 10^{-7}$		--
$0,75\pi$	-7,8100	-7,8112	-7,8100	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,1 \cdot 10^{-3}$	$-7,3 \cdot 10^{-6}$		$1,6 \cdot 10^2$
1π	-11,0450	-11,0468	-11,0450	$-1,8 \cdot 10^{-3}$	$-1,7 \cdot 10^{-3}$	$-9,5 \cdot 10^{-6}$		$1,9 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,8100	-7,8112	-7,8100	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,1 \cdot 10^{-3}$	$-7,2 \cdot 10^{-6}$		$1,7 \cdot 10^2$
$1,75\pi$	7,8100	7,8112	7,8100	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{-6}$		$2,0 \cdot 10^2$
2π	11,0450	11,0468	11,0450	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$		$1,7 \cdot 10^2$

Tabela 59. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 10$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,04500	11,04522	11,04500	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,80999	7,81014	7,81000	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$7,7 \cdot 10^{-7}$		$1,9 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$1,7 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-7}$	$-5,1 \cdot 10^{-16}$	--	$-1,2 \cdot 10^{-7}$		--
$0,75\pi$	-7,80999	-7,81014	-7,81000	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-1,4 \cdot 10^{-4}$	$-9,9 \cdot 10^{-7}$		$1,5 \cdot 10^2$
1π	-11,04500	-11,04522	-11,04500	$-2,2 \cdot 10^{-4}$	$-2,1 \cdot 10^{-4}$	$-1,1 \cdot 10^{-6}$		$1,9 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,80999	-7,81014	-7,81000	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-1,4 \cdot 10^{-4}$	$-1,1 \cdot 10^{-6}$		$1,4 \cdot 10^2$
$1,75\pi$	7,80999	7,81014	7,81000	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$		$1,5 \cdot 10^2$
2π	11,04500	11,04522	11,04500	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$		$2,0 \cdot 10^2$

Tabela 60. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 2^{19}, N = 100\,000, B = 12$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dG}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_{dG}}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	11,045000, 11,045002	11,045025	11,045000	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	7,809994	7,810012	7,809995	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$		$1,4 \cdot 10^2$
$0,5\pi$	$6,8 \cdot 10^{-16}$	$2,1 \cdot 10^{-16}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$-4,7 \cdot 10^{-16}$	--	$2,1 \cdot 10^{-8}$		--
$0,75\pi$	-7,809994	-7,810012	-7,809995	$-1,8 \cdot 10^{-5}$	$-1,7 \cdot 10^{-5}$	$-7,4 \cdot 10^{-8}$		$2,4 \cdot 10^2$
1π	-11,045000	-11,045025	-11,045000	$-2,5 \cdot 10^{-5}$	$-2,5 \cdot 10^{-5}$	$-2,1 \cdot 10^{-7}$		$1,2 \cdot 10^2$
$1,25\pi$	-7,809994	-7,810012	-7,809995	$-1,8 \cdot 10^{-5}$	$-1,7 \cdot 10^{-5}$	$-7,1 \cdot 10^{-8}$		$2,5 \cdot 10^2$
$1,75\pi$	7,809994	7,810012	7,809995	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$		$1,7 \cdot 10^2$
2π	11,045000	11,045025	11,045000	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$		$1,4 \cdot 10^2$

Tabela 61. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 6$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dR}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	12,005	12,021	12,005	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^4$
$0,25\pi$	8,4888	8,4989	8,4888	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$8,4 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-3,3 \cdot 10^{-18}$	$-6,0 \cdot 10^{-7}$	$-7,4 \cdot 10^{-16}$	--	$-6,0 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4989	-8,4888	$-1,0 \cdot 10^{-2}$	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$-4,5 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^4$
1π	-12,005	-12,021	-12,005	$-1,6 \cdot 10^{-2}$	$-1,4 \cdot 10^{-2}$	$-2,0 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$8,1 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4989	-8,4888	$-1,0 \cdot 10^{-2}$	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^4$
$1,75\pi$	8,4888	8,4989	8,4888	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$-7,9 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^4$
2π	12,005	12,021	12,005	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^4$

Tabela 62. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 8$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dR}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dR}(k)$	$u_{A,dR}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	12,0050	12,0069	12,0050	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$-4,5 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^3$
$0,25\pi$	8,48882	8,49011	8,48882	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-7}$		$2,4 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-16}$	$5,2 \cdot 10^{-7}$	$-8,6 \cdot 10^{-16}$	--	$5,7 \cdot 10^{-7}$		--
$0,75\pi$	-8,48882	-8,49011	-8,48882	$-1,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$-1,3 \cdot 10^{-7}$		$9,7 \cdot 10^3$
1π	-12,0050	-12,0069	-12,0050	$-1,9 \cdot 10^{-3}$	$-1,8 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-7}$		$1,6 \cdot 10^4$
$1,25\pi$	-8,48882	-8,49011	-8,48882	$-1,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-9}$		$2,5 \cdot 10^5$
$1,75\pi$	8,48882	8,49011	8,48882	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$-5,9 \cdot 10^{-7}$		$2,2 \cdot 10^3$
2π	12,0050	12,0069	12,0050	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-7}$		$4,4 \cdot 10^3$

Tabela 63. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 10$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dR}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	12,0050	12,0052	12,0050	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-7}$	$8,3 \cdot 10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^3$
$0,25\pi$	8,48882	8,48898	8,48882	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-8}$	$8,4 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-17}$	$-2,0 \cdot 10^{-9}$	$-7,5 \cdot 10^{-16}$	--	$-2,0 \cdot 10^{-9}$		--
$0,75\pi$	-8,48882	-8,48898	-8,48882	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$9,6 \cdot 10^{-8}$		$1,7 \cdot 10^3$
1π	-12,0050	-12,0052	-12,0050	$-2,4 \cdot 10^{-4}$	$-2,3 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$8,3 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,48882	-8,48898	-8,48882	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-5,0 \cdot 10^{-8}$		$3,2 \cdot 10^3$
$1,75\pi$	8,48882	8,48898	8,48882	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$		$7,6 \cdot 10^3$
2π	12,0050	12,0052	12,0050	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$		$1,2 \cdot 10^4$

Tabela 64. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 12$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dR}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dR}(k)$	$u_{A,dR}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	12,00500	12,00503	12,00500	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$-3,0 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$9,1 \cdot 10^2$
$0,25\pi$	8,488817	8,488836	8,488817	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$		$1,8 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$4,3 \cdot 10^{-17}$	$4,9 \cdot 10^{-9}$	$-6,9 \cdot 10^{-16}$	--	$4,9 \cdot 10^{-9}$		--
$0,75\pi$	-8,488817	-8,488836	-8,488817	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-6,3 \cdot 10^{-9}$		$3,0 \cdot 10^3$
1π	-12,00500	-12,00503	-12,00500	$-2,8 \cdot 10^{-5}$	$-2,7 \cdot 10^{-5}$	$-3,4 \cdot 10^{-9}$		$8,0 \cdot 10^3$
$1,25\pi$	-8,488817	-8,488836	-8,488817	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$		$5,3 \cdot 10^2$
$1,75\pi$	8,488817	8,488836	8,488817	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$-5,6 \cdot 10^{-9}$		$3,4 \cdot 10^3$
2π	12,00500	12,00503	12,00500	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$		$1,7 \cdot 10^3$

Tabela 65. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4, 9V, A_{dT} = 1q, M = 2^{19}, N = 100\ 000, B = 6$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A,dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,005	12,021	12,005	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^5$
$0,25\pi$	8,4888	8,4989	8,4888	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$		$2,4 \cdot 10^4$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-3,3 \cdot 10^{-18}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$-7,4 \cdot 10^{-16}$	--	$1,8 \cdot 10^{-6}$		--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4989	-8,4888	$-1,0 \cdot 10^{-2}$	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$		$4,3 \cdot 10^4$
1π	-12,005	-12,021	-12,005	$-1,6 \cdot 10^{-2}$	$-1,4 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$		$7,0 \cdot 10^4$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4989	-8,4888	$-1,0 \cdot 10^{-2}$	$-8,1 \cdot 10^{-3}$	$-4,1 \cdot 10^{-7}$		$2,4 \cdot 10^4$
$1,75\pi$	8,4888	8,4989	8,4888	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$		$3,6 \cdot 10^4$
2π	12,005	12,021	12,005	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$-2,4 \cdot 10^{-7}$		$6,7 \cdot 10^4$

Tabela 66. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V, A_{dT} = 1q, M = 2^{19}, N = 100\,000, B = 8$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A,dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,005	12,007	12,005	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^4$
$0,25\pi$	8,4888	8,4901	8,4888	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$		$3,2 \cdot 10^4$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-16}$	$8,7 \cdot 10^{-7}$	$-8,6 \cdot 10^{-16}$	--	$2,9 \cdot 10^{-7}$		--
$0,75\pi$	-8,4888	-8,4901	-8,4888	$-1,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$		$9,8 \cdot 10^3$
1π	-12,005	-12,007	-12,005	$-1,9 \cdot 10^{-3}$	$-1,8 \cdot 10^{-3}$	$-5,2 \cdot 10^{-8}$		$3,7 \cdot 10^4$
$1,25\pi$	-8,4888	-8,4901	-8,4888	$-1,3 \cdot 10^{-3}$	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$		$9,1 \cdot 10^3$
$1,75\pi$	8,4888	8,4901	8,4888	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$-4,6 \cdot 10^{-8}$		$2,8 \cdot 10^4$
2π	12,005	12,007	12,005	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$-4,7 \cdot 10^{-8}$		$4,1 \cdot 10^4$

Tabela 67. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V$, $A_{dT} = 1q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 10$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,0050	12,0052	12,0050	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^4$
$0,25\pi$	8,48882	8,48896	8,48882	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-8}$		$3,3 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-1,2 \cdot 10^{-17}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$-7,5 \cdot 10^{-16}$	—	$2,4 \cdot 10^{-8}$		—
$0,75\pi$	-8,48882	-8,48896	-8,48882	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$4,9 \cdot 10^{-8}$		$2,8 \cdot 10^3$
1π	-12,0050	-12,0052	-12,0050	$-2,4 \cdot 10^{-4}$	$-2,3 \cdot 10^{-4}$	$-1,8 \cdot 10^{-8}$		$1,1 \cdot 10^4$
$1,25\pi$	-8,48882	-8,48896	-8,48882	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$-1,5 \cdot 10^{-4}$	$-3,4 \cdot 10^{-8}$		$4,0 \cdot 10^3$
$1,75\pi$	8,48882	8,48896	8,48882	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$-1,2 \cdot 10^{-8}$		$1,1 \cdot 10^4$
2π	12,0050	12,0052	12,0050	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$		$5,5 \cdot 10^3$

Tabela 68. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów sinusoidalnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V$, $A_{dT} = 1q$, $M = 2^{19}$, $N = 100\,000$, $B = 12$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dT}(k)$	$b(k)$	$b(k) - \frac{q^2}{12}$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_{dT}}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	12,00500	12,00504	12,00500	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^3$
$0,25\pi$	8,488817	8,488843	8,488817	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$5,9 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$4,4 \cdot 10^3$
$0,5\pi$	$7,4 \cdot 10^{-16}$	$-4,3 \cdot 10^{-17}$	$6,7 \cdot 10^{-9}$	$-6,9 \cdot 10^{-16}$	--	$6,7 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	--
$0,75\pi$	-8,488817	-8,488843	-8,488817	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$5,8 \cdot 10^3$
1π	-12,00500	-12,00504	-12,00500	$-2,8 \cdot 10^{-5}$	$-2,7 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^4$
$1,25\pi$	-8,488817	-8,488843	-8,488817	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^4$
$1,75\pi$	8,488817	8,488843	8,488817	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$-2,9 \cdot 10^{-9}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$8,9 \cdot 10^3$
2π	12,00500	12,00504	12,00500	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$-2,7 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^3$

Tabela 69. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V$, $\sigma_{dG} = 0,5q$, $M = 10^6$, $N = 100\,000$, $B = 6$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dG}(k)$	$b(k)$	$b_{dG}(k)$	$u_{A_dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	7,3633	7,3669	7,3633	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,0649	5,0641	5,0623	$-7,7 \cdot 10^{-4}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$		1,0
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,8 \cdot 10^{-17}$	$4,6 \cdot 10^{-8}$	$-1,8 \cdot 10^{-17}$	$4,6 \cdot 10^{-8}$		--
$\frac{3}{8}T$	-5,0649	-5,0641	-5,0623	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$		1,0
$\frac{1}{2}T$	-7,3633	-7,3669	-7,3633	$-3,6 \cdot 10^{-3}$	$-1,1 \cdot 10^{-5}$		$3,2 \cdot 10^2$
$\frac{5}{8}T$	-5,0649	-5,0641	-5,0623	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$		1,0
$\frac{7}{8}T$	5,0649	5,0641	7,3633	$-7,7 \cdot 10^{-4}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$		1,0
T	7,3633	7,3669	7,3633	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$		$2,8 \cdot 10^2$

Tabela 70. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dG}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie normalnym ($A = 4,7V, \sigma_{dG} = 0,5q, M = 10^6, N = 100\,000, B = 8$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dG}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dG}(k)$	$b(k)$	$b_{dG}(k)$	$u_{A,dG}(k)$	$Pb_{dG}(k)$
0	7,3633	7,3636	7,3633	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{-7}$	$5,3 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,0649	5,0624	5,0623	$-2,5 \cdot 10^{-3}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$		1,0
$\frac{1}{4}T$	0	$-5,7 \cdot 10^{-18}$	$-7,3 \cdot 10^{-7}$	$-5,7 \cdot 10^{-18}$	$-7,3 \cdot 10^{-7}$		--
$\frac{3}{8}T$	-5,0649	-5,0624	-5,0623	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$		1,0
$\frac{1}{2}T$	-7,3633	-7,3636	-7,3633	$-2,2 \cdot 10^{-4}$	$-2,9 \cdot 10^{-7}$		$7,8 \cdot 10^2$
$\frac{5}{8}T$	-5,0649	-5,0624	-5,0623	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$		1,0
$\frac{7}{8}T$	5,0649	5,0624	7,3623	$-2,5 \cdot 10^{-3}$	$-2,6 \cdot 10^{-3}$		1,0
T	7,3633	7,3636	7,3633	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$		$7,2 \cdot 10^2$

Tabela 71. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 10^6$, $N = 100\,000$, $B = 6$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dR}(k)$	$b(k)$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	8,0033	8,0072	8,0033	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$-1,4 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^3$
$\frac{1}{8}T$	5,5023	5,5042	5,5023	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^4$
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,3 \cdot 10^{-17}$	$-5,7 \cdot 10^{-7}$	$-1,3 \cdot 10^{-17}$	$-5,7 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,5023	-5,5042	-5,5023	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^3$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033	-8,0072	-8,0033	$-3,9 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$7,2 \cdot 10^3$
$\frac{5}{8}T$	-5,5023	-5,5042	-5,5023	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-7}$		$7,6 \cdot 10^3$
$\frac{7}{8}T$	5,5023	5,5042	5,5023	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$-2,8 \cdot 10^{-6}$		$7,0 \cdot 10^2$
T	8,0033	8,0072	8,0033	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$-1,6 \cdot 10^{-6}$		$2,4 \cdot 10^3$

Tabela 72. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 10^6$, $N = 100\,000$, $B = 8$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dR}(k)$	$b(k)$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	8,0033	8,0036	8,0033	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-7}$	2,8 · 10 ⁻⁷	$2,8 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,5023	5,5024	5,5023	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-7}$		$4,0 \cdot 10^2$
$\frac{1}{4}T$	0	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$		--
$\frac{3}{8}T$	-5,5023	-5,5024	-5,5023	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	$-1,4 \cdot 10^{-8}$		$8,9 \cdot 10^3$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033	-8,0036	-8,0033	$-2,4 \cdot 10^{-4}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$		$3,1 \cdot 10^3$
$\frac{5}{8}T$	-5,5023	-5,5024	-5,5023	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-8}$		$2,4 \cdot 10^3$
$\frac{7}{8}T$	5,5023	5,5024	5,5023	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$-4,5 \cdot 10^{-7}$		$2,7 \cdot 10^2$
T	8,0033	8,0036	8,0033	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$		$2,8 \cdot 10^3$

Tabela 73. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 10^6$, $N = 100\ 000$, $B = 10$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dR}(k)$	$b(k)$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	8,00333	8,00335	8,00333	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$-4,7 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,50229	5,50230	5,50229	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$-9,3 \cdot 10^{-8}$		82
$\frac{1}{4}T$	0	$-2,0 \cdot 10^{-17}$	$-5,0 \cdot 10^{-8}$	$-2,0 \cdot 10^{-17}$	$-5,0 \cdot 10^{-8}$		--
$\frac{3}{8}T$	-5,50229	-5,50230	-5,50229	$-7,6 \cdot 10^{-6}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$		$2,0 \cdot 10^2$
$\frac{1}{2}T$	-8,00333	-8,00335	-8,00333	$-1,5 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-9}$		$1,5 \cdot 10^4$
$\frac{5}{8}T$	-5,50229	-5,50230	-5,50229	$-7,6 \cdot 10^{-6}$	$9,4 \cdot 10^{-8}$		81
$\frac{7}{8}T$	5,50229	5,50230	5,50229	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$		$4,7 \cdot 10^2$
T	8,00333	8,00335	8,00333	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$		$2,6 \cdot 10^2$

Tabela 74. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dR}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie równomiernym ($A = 4,9V$, $A_{dR} = 0,5q$, $M = 10^6$, $N = 100\,000$, $B = 12$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dR}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dR}(k)$	$b(k)$	$b_{dR}(k)$	$u_{A_{dR}}(k)$	$Pb_{dR}(k)$
0	8,0033333	8,0033344	8,0033333	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$-2,1 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	52
$\frac{1}{8}T$	5,5022917	5,5022922	5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$-5,2 \cdot 10^{-10}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^3$
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,1 \cdot 10^{-18}$	$-2,1 \cdot 10^{-8}$	$-1,1 \cdot 10^{-18}$	$-2,1 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,5022917	-5,5022922	-5,5022917	$-5,4 \cdot 10^{-7}$	$3,2 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^3$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033333	-8,0033344	-8,0033333	$-1,1 \cdot 10^{-6}$	$-2,4 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	46
$\frac{5}{8}T$	-5,5022917	-5,5022922	-5,5022917	$-5,4 \cdot 10^{-7}$	$-1,3 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	41
$\frac{7}{8}T$	5,5022917	5,5022922	5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$-1,8 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	30
T	8,0033333	8,0033344	8,0033333	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$-2,0 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$5,6 \cdot 10^2$

Tabela 75. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4, 9V, A_{dT} = 1q, M = 10^6, N = 100\ 000, B = 6$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dT}(k)$	$b(k)$	$b_{dT}(k)$	$u_{A,dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	8,0033	8,0072	8,0033	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$-3,2 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^4$
$\frac{1}{8}T$	5,5023	5,5042	5,5023	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$		$7,1 \cdot 10^3$
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,3 \cdot 10^{-17}$	$-1,5 \cdot 10^{-7}$	$-1,3 \cdot 10^{-17}$	$-1,5 \cdot 10^{-7}$		--
$\frac{3}{8}T$	-5,5023	-5,5042	-5,5023	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$6,6 \cdot 10^{-7}$		$4,2 \cdot 10^3$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033	-8,0072	-8,0033	$-3,9 \cdot 10^{-3}$	$-7,1 \cdot 10^{-8}$		$5,5 \cdot 10^4$
$\frac{5}{8}T$	-5,5023	-5,5042	-5,5023	$-2,0 \cdot 10^{-3}$	$-2,4 \cdot 10^{-7}$		$8,1 \cdot 10^3$
$\frac{7}{8}T$	5,5023	5,5042	5,5023	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$-9,5 \cdot 10^{-7}$		$2,1 \cdot 10^3$
T	8,0033	8,0072	8,0033	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$-2,0 \cdot 10^{-7}$		$2,0 \cdot 10^4$

Tabela 76. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V, A_{dT} = 1q, M = 10^6, N = 100\,000, B = 8$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dT}(k)$	$b(k)$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	8,0033	8,0072	8,0033	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$-5,2 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$4,7 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,5023	5,5024	5,5023	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$-2,7 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$4,5 \cdot 10^2$
$\frac{1}{4}T$	0	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$-9,1 \cdot 10^{-8}$	$-4,4 \cdot 10^{-17}$	$-9,1 \cdot 10^{-8}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,5023	-5,5024	-5,5023	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	$-1,9 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$6,6 \cdot 10^2$
$\frac{1}{2}T$	-8,0033	-8,0036	-8,0033	$-2,4 \cdot 10^{-4}$	$-2,0 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^3$
$\frac{5}{8}T$	-5,5023	-5,5024	-5,5023	$-1,2 \cdot 10^{-4}$	$-4,9 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^2$
$\frac{7}{8}T$	5,5023	5,5024	5,5023	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$3,6 \cdot 10^2$
T	8,0033	8,0036	8,0033	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$8,0 \cdot 10^2$

Tabela 77. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4,9V$, $A_{dT} = 1q$, $M = 10^6$, $N = 100\,000$, $B = 10$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dT}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}(k)$	$\widetilde{R}_{xy}^{dT}(k)$	$b(k)$	$b_{dT}(k)$	$u_{A_{dT}}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	8,00333	8,00335	8,00333	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$	$8,5 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,50229	5,50230	5,50229	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$8,5 \cdot 10^{-8}$	$7,4 \cdot 10^2$
$\frac{1}{4}T$	0	$-2,0 \cdot 10^{-17}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$-2,0 \cdot 10^{-17}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	--
$\frac{3}{8}T$	-5,50229	-5,50230	-5,50229	$-7,6 \cdot 10^{-6}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^2$
$\frac{1}{2}T$	-8,00333	-8,00335	-8,00333	$-1,5 \cdot 10^{-5}$	$8,2 \cdot 10^{-9}$	$8,5 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^3$
$\frac{5}{8}T$	-5,50229	-5,50230	-5,50229	$-7,6 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-8}$	$8,5 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^2$
$\frac{7}{8}T$	5,50229	5,50230	5,50229	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$-5,8 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^2$
T	8,00333	8,00335	8,00333	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$-7,5 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^2$

Tabela 78. Wartość dokładna, średnia arytmetyczna z N wyników estymacji, obciążenie, niepewność standardowa typu A oraz współczynnik $Pb_{dT}(k)$ w pomiarze korelacji wzajemnej sygnałów trójkątnych oraz ich sumy z sygnałami *ditherowymi* o rozkładzie trójkątnym ($A = 4, 9V, A_{dT} = 1q, M = 10^6, N = 100\ 000, B = 12$)

k	$R_{xy}(k),$ $R_{xy}^{dT}(k)$	$\overline{\widetilde{R}}_{xy}(k)$	$\overline{\widetilde{R}}_{xy}^{dT}(k)$	$b(k)$	$b_{dT}(k)$	$u_{A,dT}(k)$	$Pb_{dT}(k)$
0	8.0033333	8.0033344	8.0033333	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^2$
$\frac{1}{8}T$	5,5022917	5,5022922	5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$-1,2 \cdot 10^{-8}$		47
$\frac{1}{4}T$	0	$-1,1 \cdot 10^{-18}$	$2,4 \cdot 10^{-9}$	$-1,1 \cdot 10^{-18}$	$2,4 \cdot 10^{-9}$		--
$\frac{3}{8}T$	-5,5022917	-5,5022922	-5,5022917	$-5,4 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	44
$\frac{1}{2}T$	-8,0033333	-8,0033344	-8,0033333	$-1,1 \cdot 10^{-6}$	$-3,2 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	35
$\frac{5}{8}T$	-5,5022917	-5,5022922	-5,5022917	$-5,4 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$		$1,5 \cdot 10^2$
$\frac{7}{8}T$	5,5022917	5,5022922	5,5022917	$5,4 \cdot 10^{-7}$	$-7,2 \cdot 10^{-9}$		75
T	8,0033333	8,0033344	8,0033333	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$3,1 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-8}$	63