HELENA STATTLERÓWNA

Z DOŚWIADCZEŃ METODYKI RACHUNKÓW

PROTOKÓŁY LEKCYJ I DYSKUSYJ
P. W. K. N.

WARSZAWA — 1936

NAKŁADEM „NASZEJ KSIĘGARNI" SP. AKC.
ZWIĄZKU NAUCZYCIELSTWA POLSKIEGO

Z DOŚWIADCZEŃ METODYKI RACHUNKÓW

DRUKARNIA NARODOWA W KRAKOWIE

TREŚĆ

WSTĘP.

Prowadząc przez szereg lat na Państwowym Wyższym Kursie Nauczycielskim w Warszawie metodykę matematyki w zakresie programu szkoły powszechnej, miałam sposobność z szeregu dyskusyj ze słuchaczami, oraz z wielu lekcyj pokazowych, które bądź osobiście prowadziłam, bądź też obserwowałam w wykonaniu któregoś ze słuchaczy, zebrać pewien materjał doświadczalny, którym obecnie pragnę podzielić się z szerszym ogółem nauczycielstwa. Muszę jednak zastrzec, że ani dokonanych doświadczeń, ani też wniosków z przeprowadzonych dyskusyj nie traktuję jako niezawodne wskazania metodyczne, lecz jedynie jako materjał w dalszym ciągu dyskusyjny, który na łamach pism pedagogicznych mógłby znaleźć należyte oświetlenie.

Doświadczenia i wnioski dobierałam i szeregowałam według nowych programów szkoły powszechnej, pomijając, jako zbędne obecnie, wiele punktów, które przed kilku laty były na Kursie Nauczycielskim dyskutowane, teraz zaś z programu szkoły powszechnej zostały wyłączone. Wielu punktów programu nie dotykam wcale, bądź dlatego, że nie zostały należycie przez nas rozważone, bądź dlatego, że pod względem metodycznym nie nasunęły wątpliwości.

Poza tem do rozważań czysto metodycznych dołączyłam nieco uwag natury ogólniejszej, które nasuwały nam się nieraz w ciągu pracy na kursie, a więc uwagi o wykresach, o strukturze zadań układanych przez dzieci i t. d.

Osobno omawiam zagadnienia geometryczne; miejsce ich w kursie danej klasy zależeć będzie z jednej strony od ilości i jakości przerobionego materjału rachunkowego, z drugiej od wyboru podręcznika, który narzuci nauczycielowi pewną kolejność w toku pracy.

Praca na P. W. K. N. obejmowała głównie metodykę V, VI i VII klasy. Klasy niższe omawialiśmy mniej szczegółowo, bez eksperymentowania w naszej szkole ćwiczeń.

Tu objaśnić muszę, że to, co nazywam naszą szkołą ćwiczeń, było w gruncie rzeczy najzwyklejszą i jedną z uboższych szkół powszechnych siedmioklasowych męskich m. Warszawy. Szkoła rozporządzała lokalem bardzo niewystarczającym, klasy były ciasne, niektóre źle oświetlone, ławki starego typu, wąskie; liczba uczni w klasie, poczynając od r. 1931/32 przewyższała 50. Żadnych urządzeń laboratoryjnych dla pracy nad matematyką, ani też pomocy szkolnych poza małą liczbą brył geometrycznych szkoła nie posiadała; w razie potrzeby słuchacze P. W. K. N. sami sporządzali sobie potrzebne do lekcji pomoce.

Dyskusje metodyczne na P. W. K. N. obejmowały oczywiście w równym stopniu klasy V, VI i VII; lecz za teren doświadczalny służyła nam zazwyczaj w ciągu całego roku szkolnego tylko jedna, a najwyżej dwie z tych klas.

Całość nauczania w obranej klasie spoczywała w moich rękach; zazwyczaj na 4 godziny rachunków prowadziłam sama bez asysty słuchaczy 2 godziny, pozostałe zaś 2 godziny przeznaczone były bądź na hospitacje moich lekcyj, bądź na lekcje pokazowe słuchaczy. W r. 1933/34 i 34/35 uzyskaliśmy zgodę inspektora szkolnego na podział klasy na dwie grupy w godzinach, przeznaczonych na hospitacje i lekcje pokazowe. Tym sposobem słuchacze mogli prowadzić lekcje tylko z połową klasy, co wobec ciasnoty izb szkolnych było ważnym momentem, ułatwiającym nieco doświadczenia metodyczne.

Szczegóły te podaję, aby zaznaczyć, że praca nasza nie odbywała się pod żadnym względem w warunkach specjalnie sprzyjających; wyniki zatem eksperymentów mogą być stosowane w każdej bez wyjątku siedmioklasowej szkole powszechnej, tembardziej, że nie zawierają żadnych „rewolucyjnych“ pomysłów, ani też odbiegających od zwykłego toku pracy inowacyj metodycznych.

LEKCJE I DYSKUSJE NA TEMATY ARYTMETYCZNE

1. Powtórzenie materjału klasy IV.

Pierwsze miesiące pracy w klasie V mają być przeznaczone według brzmienia programu na „usystematyzowanie wiadomości o dziesiątkowym układzie pozycyjnym, powtórzenie i ugruntowanie działań na liczbach całkowitych", wreszcie na „stosowanie tych umiejętności do zagadnień z życia praktycznego".

Te ważne punkty, wyszczególnione w programie pod wspólnym tytułem: „Nawiązanie do materjału ubiegłego roku", bywają przeważnie traktowane dość pospiesznie i pobieżnie, jak wszystkie „powtórzenia". Spieszymy się zawsze z rozpoczęciem t. zw. nowego materjału raz dlatego, że niepokoi nas obawa, czy z nim zdążymy do końca roku, powtóre dlatego, że zarówno dla ucznia, jak i dla nauczyciela tematy całkiem świeże większy mają powab i większą wzbudzają ciekawość.

Niejednokrotnie w dyskusjach na P. W. K. N. stwierdziliśmy, że spiesząc się z rozpoczęciem nauki o ułamku w V klasie, zanim owe pierwsze punkty programu zostaną należycie przerobione, popełniamy duży błąd, który mści się nietylko na całym dalszym ciągu nauki, lecz i na sprawności życiowej naszych uczniów przez długie lata po opuszczeniu przez nich szkoły powszechnej.

O ile bowiem człowiek przeciętny może całkiem dobrze przeżyć życie, nie umiejąc wcale działań z ułamkami, w szczególności z ułamkami zwyczajnemi, o tyle, aby w życiu nie być skończonym niedołęgą, m u s i umieć każdą liczbę wielocyfrową przeczytać i napisać, oraz na wszelkich liczbach całkowitych wykonywać cztery działania.

Tembardziej niesłusznym jest pośpiech, z jakim przystępujemy do dalszych punktów programu, że ów pierwszy punkt pozornie tylko jest powtórzeniem materjału przerobionego w klasie IV; w gruncie rzeczy zaś można go traktować, jako materjał całkiem nowy.

Dziecko, przechodząc z klasy IV do V przeważnie nie umie jeszcze wcale wykonywać sprawnie i pewnie czterech działań z liczbami całkowitemi. Wyrażony w programie dezyderat „wyników nauczania“ dla klasy IV, owa umiejętność w wykonywaniu czterech działań na liczbach naturalnych w zakresie miljona (!), jest przeważnie niedościgłem marzeniem nauczyciela. Jeszcze z dodawaniem i odejmowaniem idzie jako tako, ale z czytaniem i pisaniem liczb wielocyfrowych o wiele gorzej, z mnożeniem jeszcze gorzej (tabliczka mnożenia!), a z dzieleniem już całkiem źle.

Na P. W. Kursie Naucz. próbowaliśmy badać przyczyny tych niedociągnięć. Oczywiście, wszyscy wskazywali przedewszystkiem na przepełnienie klas i płynący stąd brak czasu na wyćwiczenie w liczeniu każdego z uczniów z osobna; niemniej obok tego stwierdzono pewne poważne trudności, leżące w samym materjale, a dające się dopiero stopniowo pokonać.

Do takich trudności należy, między innemi, pełne zrozumienie układu pozycyjnego. Sądzę, że niedostatecznie zdajemy sobie sprawę, ile symboliki, ile umownego pierwiastku leży w samej zasadzie układu. Zważmy, iż ów genjalny indusko-arabski pomysł związania wartości liczby z miejscem, na którem stoi, oraz wprowadzenie zera na miejsce brakujących jednostek układu, musiał sobie w Europie wywalczać prawo obywatelstwa przez parę stuleci (walka abacystów z algorytmistami); zważmy, jak bardzo powoli i uważnie musielibyśmy wykonywać działania w innym układzie, niż ten, do któregośmy przywykli, jak mało uświadamiamy sobie np. cechy podzielności w innym, niż dziesiątkowy, układzie. To nas przekonywa, że zasada układu jest sprawą trudną i że nie możemy wymagać od dzieci, aby szybko z nią sobie poradziły.

Tembardziej wzmagają się trudności, że cała nauka układu dziesiątkowego opierać się musi jedynie na interpretacji słownej, bez możności jakiegokolwiek uzmysłowienia, bez możności doświadczalnego wniknięcia w budowę liczby.

To ostatnie twierdzenie na dyskusjach naszego Kursu wywoływało nieraz gorące sprzeciwy. Przecie staramy się uzmysłowić, właśnie drogą doświadczalną przedstawić dzieciom, jak to jednostki wyższych rzędów powstają z jednostek rzędów niższych, jak to się odbywa zamiana niższych rzędów na wyższe, oraz rozmiana wyższych na niższe. Przecie właśnie w celu upoglądowienia wiążemy 10 patyczków w dziesiątkę, 10 takich wiązek w setkę.

Tak jest; ale też na tem poglądowość w tej dziedzinie się kończy. Przypuśćmy nawet, że nauczyciel z dużym nakładem trudu i czasu rozciągnie tę samą metodę na cały tysiąc, budując wraz z dziećmi aż 10 wielkich wiązek, z których każda będzie złożona z 10 małych, a każda z tych ostatnich z 10 oddzielnych patyczków. Napewno jednak na tem się zatrzyma, uspokajając sumienie nauczycielskie przeświadczeniem, że dzieci już zrozumiały zasadę układu, że zatem wszystko już będzie dla nich jasne i oczywiste.

Tymczasem wcale tak nie jest. Dzieci mówią wyrazy: dziesięć tysięcy, sto tysięcy, wreszcie miljon, ale p o z a w y r a z y n i e w y c h o d z ą. Pojęcia zawarte w tych słowach są jeszcze bardzo mętne, a wyobrażenia zmysłowego związanego z temi pojęciami niema wcale, tak samo zresztą, jak i my nie „wyobrażamy" sobie miljona jakichkolwiek przedmiotów.

Jako dowód przytoczę np. fakt następujący: każdy z nas wie, że metr sześcienny zawiera miljon centymetrów sześciennych. Nawet nietrudno „wyobrazić sobie" odpowiedniej wielkości skrzynię, wypełnioną malutkiemi sześciankami, ułożonemi porządnie w rzędy i warstwy. Niewątpliwie jednak doznamy pewnego, chwilowego choćby zdziwienia, uprzytomniwszy sobie, że ów miljon zamkniętych w skrzyni sześcianków zająłby aż 10 km, gdybyśmy zechcieli ułożyć je w szeregu jeden za drugim.

Z drugiej strony miljon sekund to raptem niecałe 12 dni; natomiast napisanie kolejno liczb od jednego do miljona, licząc jedną cyfrę na sekundę, kosztowałoby nas przeszło 200 dni nieprzerwanej pracy po 8 godzin dziennie.

Takie to niespodzianki czyni nam miljon. Ciekawym psychologicznie może być fakt, że gdy wykonałam z dziećmi dokładne obliczenie, dotyczące powyższej sprawy, tj. napisania liczb kolejnych do miljona, przyczem z zegarkiem w ręku sprawdzaliśmy, ile cyfr można napisać w ciągu minuty, dzieci jednak nie uwierzyły matematycznie stwierdzonej prawdzie, lecz upierały się, że w ciągu dwóch tygodni, „najdalej dwóch tygodni!" potrafią tej pracy dokonać.

„Napiszę pani liczby od jednego do tysiąca w pół godziny" — obiecywał jeden malec z 4-ej klasy. Zastanowił się chwilę, gdy mu poddałam myśl napisania nie pierwszego tysiąca, ale np. sto pierwszego, od liczby 100001, 100002 i t. d. aż do 100999, 101000. Może wtedy dopiero błysnęła mu myśl, że nie wie dobrze, co tam się dzieje „wewnątrz“ miljona.

Jakiż stąd wniosek?

Oczywiście, nie może być mowy o „środkach poglądowych“ poza zakresem pierwszej setki, a najwyżej pierwszego tysiąca. Musimy poprzestać na całkiem teoretycznem ujęciu. Nic bowiem wspólnego z „uzmysłowieniem“ liczby nie mają owe choćby skądinąd praktyczne tablice różnej konstrukcji, gdzie, zamiast pisać cyfry danej liczby, dziecko wsuwa, czy wiesza je na odpowiednie miejsca porubrykowanych deseczek. Tę samą pracę można wykonać kredą na zwykłej tablicy.

Zamiast zatem starać się uzmysławiać to, co uzmysłowić się nie da, spróbujmy oprzeć naukę układu pozycyjnego, a w związku z tem i naukę metrycznego układu miar jedynie na pojęciu uporządkowania.

Przeglądając świeżo wydane podręczniki na kl. V, prawie wszędzie spotykamy na wstępie króciutki opis, jak to z jedności tworzą się dziesiątki, z dziesiątek setki i t. d., a następnie wzmiankę o możliwości innego porządkowania, czyli innego układu liczenia. Następnie idzie wyjaśnienie dziesiątkowego układu pozycyjnego, czyli zasady pisania liczb, potem zaś ćwiczenia dotyczące czytania i pisania liczb, rozkładu na rzędy i t. d. Przykłady dotyczące porządkowania są zazwyczaj bardzo skąpe.

A jednak zdaje się, że te właśnie ćwiczenia są ważne; wszak cała umiejętność liczenia polega na umiejętności znalezienia m i e j s c a danej liczby w ciągu liczbowym.

Ćwiczenia na porządkowanie liczb mogą być bardzo urozmaicone i dla dzieci ciekawe. Najbardziej pospolitym typem takich ćwiczeń są te, które poprostu polegają na uszeregowaniu kilku liczb według ich wielkości. I tu jednak zdarzyć się mogą ćwiczenia, zasługujące na większą uwagę przez swą pomysłowość i mające więcej walorów metodycznych. Tak np. w podręczniku Rusieckiego i Zarzeckiego znajdujemy ćwiczenie, które poleca uporządkować według wielkości liczby: 7707, 770, 7, 7000 i t. d., słowem liczby zbudowane jedynie z siódemek i zer. Możemy być pewni, że to łatwe napozór ćwiczenie wielu dzieciom w klasie przysporzy kłopotu. Przyczynę ukrytej w niem trudności łatwo zrozumieć. Dziecko nie zawaha się w orzeczeniu, czy większą jest liczba 500, czy 600, bo tu sam dobór cyfr stanowi wystarczającą wskazówkę. Natomiast liczby zbudowane z tych samych cyfr zmieniają wartość w zależności jedynie od miejsca, na którem dana cyfra stoi i to musi dziecko zbadać. A zaś umiejętność zbadania tej sprawy jest zależna od stopnia zrozumienia zasady układu pozycyjnego.

Inny typ ćwiczeń na porządkowanie stanowią te, w których dziecko musi napisać jedną lub kilka liczb kolejnych, następujących po danej liczbie, lub poprzedzających ją. W szczególności kształcące będą te ćwiczenia, w których dziecko musi przekroczyć próg od jednego rzędu do drugiego. W jednym z podręczników mamy ćwiczenie: Napisać liczbę następującą po liczbie 249999. Niewątpliwie tu również nastąpi zawahanie. Dlaczego? Bo w przykładzie tym musi uczeń przegrupować wszystkie rzędy aż do przedostatniego. Ale też taki przykład może mu oświetlić w znacznym stopniu pojęcie układu dziesiątkowego.

Podobnem do poprzednich ćwiczeniem jest wypełnianie przerw między liczbami; np. wpisywanie wszystkich liczb brakujących (oczywiście tylko całkowitych) pomiędzy liczby 1595 i 1603; dalej wyszukiwanie miejsca danej liczby: w której setce znajduje się liczba 1573 (daty historyczne: w którem stuleciu żyjemy?); znajdowanie pierwszej i ostatniej liczby danego tysiąca, danej setki; obliczanie ilości liczb jedno-, dwu-, trzycyfrowych, i t. d.; budowanie liczb z podanych cyfr i szeregowanie ich według wielkości; oraz wiele innych.

Ćwiczenia takie nie mogą trwać nieprzerwanym ciągiem; stałyby się bowiem nużące. Równocześnie z niemi będzie miejsce na powtarzanie i pogłębianie działań na świeżym materjale zadaniowym.

2. Numeracja rzymska.

Jeśli ten punkt programu poddawaliśmy dyskusji na P. W. K. N., to jedynie poto, aby zawsze i zgodnie dojść do wniosku, że praktyczna jego rola jest znikomo mała i że nie należy wiele czasu numeracji rzymskiej poświęcać.

Istotnie, poza staremi dokumentami, których dzieci naszej szkoły powszechnej według wszelkiego prawdopodobieństwa czytać nie będą, używanie numeracji rzymskiej jest bardzo rzadkie i coraz rzadsze. Zegarki kieszonkowe nowszej konstrukcji znaczone są cyframi arabskiemi, zegary wieżowe i ścienne coraz częściej nie posiadają cyfr wcale, tylko kreseczki, znaczące podział tarczy (np.: zegary w gmachu M. W. R. i O. P.). Rozdziały książek przeważnie już dziś posiadają numerację arabską lub słowną. Tracić więc dużo czasu na wdrożenie dzieci do numeracji, mającej dziś jedynie znaczenie historyczne, wydaje się zbytkiem, na który przeważnie pozwolić sobie nie możemy, tembardziej iż jest to odcinek pracy dosyć trudny.

Szczególniej trudnem dla dzieci jest rozróżnienie, kiedy należy do danej liczby inną liczbę dodać, kiedy — odjąć. Np. CX znaczy 110, natomiast XC znaczy 90.

Stwierdzaliśmy zgodnie, że wystarczy, gdy dzieci nauczą się pisać liczby cyframi rzymskiemi od 1 do 20, gdy spamiętają znaczenie liczbowe znaków V, X, L, C, D, M, wreszcie gdy niektóre łatwe liczby zdołają z pomocą nauczyciela przeczytać i napisać. Jeśli na frontonie starego kościoła ujrzą dzieci podczas wycieczki napisaną rzymskiemi cyframi datę założenia, wiadomości powyższe wystarczą, aby ją wspólnie z kierownikiem wycieczki odcyfrować.

Jeśli jednak praktyczne znaczenie numeracji rzymskiej jest małe (i coraz mniejsze), to teoretycznie może nam ona oddać poważne usługi, gdy przez porównanie z układem pozycyjnym dziesiątkowym przyczyni się do głębszego zrozumienia tego ostatniego.

Na jednej z lekcji w kl. V nadarzyła się sposobność stwierdzenia tego faktu, co było tem ciekawsze, że porównanie dwóch numeracyj wypłynęło niepostrzeżenie w toku lekcji prawie bez udziału nauczyciela.

Zaczęło się od rozważania, który sposób pisania jest wygodniejszy. Dzieci same zauważyły, że 8 jest u nas liczbą jednocyfrową, a „po rzymsku“ aż czterocyfrową, że u nas 19 jest liczbą dwucyfrową, a „po rzymsku“ — trzycyfrową. Ale zato napisanie liczb 100 i 1000 u nas wymaga 3 cyfr i 4 cyfr, a tam tylko jednej litery C lub M.

Następnie wysunięte zostało przez nauczyciela zagadnienie, czy w numeracji rzymskiej cyfry zmieniają znaczenie w zależności od swego miejsca? Czasem zmieniają, np. IX i XI; czasem nie zmieniają, np. w liczbie XX obie dziesiątki mają tę samą wartość. Więc niema stałego prawa. A w układzie naszym dziesiątkowym? Na zakończenie nauczyciel zadał zagadkę: jak od 19 odjąć 1, aby pozostało 20? Dzieci podały rozwiązanie natychmiast: napisały XIX i skreśliły jedynkę. Co ciekawsze, odpowiedziały inną zagadką: jak od 20 odjąć 88, aby zostało 22. Podaję rozwiązanie:

$$\begin{array}{r} \mathrm{XX} \\ -\ 88 \\ \hline 22 \end{array}$$

W ostatniej łamigłówce, polegającej, jak widzimy, na zastosowaniu do numeracji rzymskiej praw, przysługujących układowi dziesiątkowemu, szczególnie jasno występuje różnica między układem pozycyjnym i niepozycyjnym, co było, jak sądzę, momentem bardzo korzystnym.

3. Powtórzenie i ugruntowanie działań na liczbach całkowitych.

Temu punktowi programu poświęcaliśmy na P. W. K. N. niewiele czasu z dwóch przyczyn: po pierwsze, technika działań wchodzi do programu kl. IV; nie było więc czasu i miejsca na omawianie jej podczas przerabiania kursu kl. V, tembardziej, że wskazówki do programu M. W. R. i O. P. dość szczegółowo tę sprawę traktują; powtóre, dział ten najmniej może ze wszystkich nasuwa wątpliwości. Natomiast sporo czasu poświęciliśmy sprawie zastosowań i zadań, rozważając najpierw kolejno każde z czterech działań, następnie łącząc po kilka w jednem zadaniu.

Równocześnie omawialiśmy w dyskusjach sprawę elementarnych praw każdego z działań, oraz związków pomiędzy działaniami. Ten ostatni dział występuje w programie kl. IV jako króciutka, w jednem zdaniu zawarta wzmianka, dotycząca „związków między liczbami w dodawaniu i odejmowaniu“ i „związków między liczbami w mnożeniu i dzieleniu“; w programie kl. VI, jako przypomnienie „o niezmienności ilorazu w przypadku pomnożenia dzielnej i dzielnika przez jedną i tę samą liczbę“; wreszcie w programie kl. VII, jako jeden punkt: „Zmiany wyników działań w zależności od zmiany danych“, rozszerzony nieco w Uwagach: „W szczególności należy zwrócić uwagę na zmianę wyniku mnożenia w przypadku, kiedy jeden z czynników pomnożymy lub podzielimy przez daną liczbę (całkowitą lub ułamkową), na mnożenie lub dzielenie iloczynu kilku czynników zapomocą pomnożenia albo podzielenia jednego z czynników, wreszcie na badanie zmiany wyrażenia ułamkowego w zależności od zmiany licznika i mianownika“.

Wszystkie te wskazówki, w szczególności zaś wskazówka dotycząca kl. IV, nasunąć mogą wiele wątpliwości.

Związki między liczbami działań są bardzo złożone i liczne.

a wskazówka nie podaje, które z tych związków dziecko ma opanować, ani też jak do tego opanowania je doprowadzić. Tymczasem dalsze „Uwagi do całości programu“ podają cały szereg sposobów liczenia w zakresie kl. III i IV, opartych właśnie na związkach między liczbami działań i stosowanych jakoby „według własnego pomysłu ucznia“, np.: „w wykonaniu dodawania 386 + 97 uczeń może do liczby 386 dodać 100, a od wyniku odjąć 3“. Albo: „w przypadku mnożenia 5 . 72 obliczamy 5 . 70 = 350, potem 5 . 2 = 10, wreszcie dodajemy 350 i 10“. Albo jeszcze: „w przypadku mnożenia 300 . 36 dzieci obliczają 3 . 36 = 108 i dopisują w pamięci dwa zera: 10800“.

Czy możliwem i dopuszczalnem jest objaśniać dziecku, że pierwszy przykład opiera się na prawie dodawania różnicy, drugi — na prawie rozdzielności mnożenia względem dodawania, trzeci wreszcie — na zmianie iloczynu w zależności od zmiany czynników lub, jak kto woli, na prawie łączności w mnożeniu? Z drugiej strony, czy można podawać „sposób“ wykonania pracy bez objaśnienia jego zasady?

W dyskusjach częstych i niejednokrotnie dość gorących dochodziliśmy przeważnie do wniosku, że prawo sformułowane w sposób ogólny rzadko kiedy trafia do umysłu dziecka nawet, gdy je oprzemy na szeregu przykładów, że zatem wprowadzane być może jedynie praktycznie, w zastosowaniu każdorazowem do poszczególnych obliczeń, o ile nasuwa się możliwość łatwych uproszczeń i skrótów.

Tak np. dziecko (miejskie) wie z życia praktycznego, że płacąc w sklepie 97 gr, może zapłacić całe 100 gr czyli 1 zł, a otrzymać 3 gr reszty. Ten fakt, znany mu dobrze, może stanowić objaśnienie wielu faktów analogicznych, a więc i faktu podanego w Uwagach do programu. Ale stąd daleko jeszcze do opanowania odnośnego związku i daleko do płynącego z w ł a s n e j i n i c j a t y w y stosowania go w odpowiednich wypadkach.

Jeśli idzie o technikę i opanowanie poszczególnych działań, przytaczam wynik ciekawszych dyskusyj.

A. *Dodawanie.*

Niewątpliwie jest to działanie, wykonywane w życiu najczęściej i nie budzące w zastosowaniu żadnych wątpliwości. W kl. V nie zdarza się prawie nigdy, aby normalnie rozwinięte dziecko zawahało się wobec wyboru działania wówczas, gdy tem działaniem jest dodawanie. Zato jakże niezdarnie je wykonywa! O zakład można pójść, że jeśli ma dodać 5 liczb napisanych w kolumnie, np.

$$\begin{array}{r} 121 \\ 14 \\ 26 \\ 139 \\ 17 \end{array}$$

to dodając jedności, będzie je dodawało stereotypowo z dołu do góry i „po jednemu“, a więc: 7 a 9 to 16, a 6, to 22, a 4 to 26, a 1, to 27. Ale nie zauważy, że może znakomicie robotę sobie skrócić i ułatwić, dodając z góry na dół i przytem dodając do liczby 1 odrazu sumę dwóch liczb następnych 6 i 4, czyli 10. Otrzyma wtedy łańcuszek krótszy i łatwiejszy: 1 a 10 jest 11, a 9 jest 20, a 7 jest 27. A przecież w kl. V dzieci teoretycznie już wiedzą, że mogą przestawiać składniki, oraz dodawać sumy paru składników odrazu. Wiedzą, tylko nie umieją wyciągnąć stąd wniosków praktycznych.

Jaki stąd wniosek?

Przedewszystkiem ten, że, aby dzieci wdrożyć do szybkiego dodawania, musimy obmyślać takie przykłady i takie zadania, w których dzieci zmuszone byłyby sumować nie dwa lub trzy składniki, lecz dłuższe kolumny liczb, jak to najczęściej w życiu się zdarza. Powtóre, każdą kolumnę niech liczą parokrotnie i w różny sposób, wyszukując najpraktyczniejsze ugrupowania. Będzie to zarazem sprawdzenie roboty. Przekonaliśmy się niejednokrotnie, że ćwiczenia takie nietylko nie nudzą dzieci, lecz przeciwnie, rozwijają pomysłowość i inicjatywę.

Rozważając na P. W. K. N. w dalszym ciągu ćwiczenia, dotyczące dodawania, zatrzymaliśmy się dłużej na t. zw. uzupełnianiu tabelek statystycznych. Były głosy przeciwne tabelkom, jako zadaniom o nikłej treści, nie wymagającym planu pracy. Większość jednak wypowiadała się za tym typem ćwiczeń, o ile będą odpowiednio wykorzystane.

Weźmy przykład (Podręcznik Rusieckiego i Zarzeckiego na kl. V) „Samochody w Polsce“.

Woj. wschodnie	Prywatne i urzędowe	Taksówki (dorożki)	Autobusy	Ciężarowe	Razem
WN	157	168	210	63	
NW	115	56	102	44	
PL	146	28	67	32	
WŁ	221	62	131	60	
Razem					

Dyskutując nad tem, zadaliśmy sobie między innemi pytanie: czy nie możnaby uzupełniać takich tabelek wprost w książce, bez przepisywania ich do zeszytów? Zysk na czasie byłby ogromny. Jeśli zaś idzie o korzyść, wynikającą z uważnego przepisywania liczb, nie byłaby ona całkiem straconą, bo niewątpliwie uczeń, mając dodać kilka liczb w poziomym wierszu, będzie wolał osobno dodać je w zeszycie, przepisawszy w kolumnie pionowej. Uniknie jednak dwukrotnego przepisywania.

Następnie, niedosyć obliczyć wszystkie sumy kolumn i wierszy i powpisywać je, gdzie należy; trzeba rozumieć, co która z sum oznacza. Pytania odnośne, zadawane dzieciom, stwierdzały, że niezawsze i nieodrazu umiały dzieci powiedzieć, co oznacza np. pierwsza z sum u góry naprawo. Albo odwrotnie: ile wszystkich samochodów było np. w woj. poleskiem w r. 1930. Na takie pytania warto postawić nacisk.

Wreszcie suma ostateczna u dołu naprawo. Powinniśmy otrzymać ją dwukrotnie: jako sumę ostatniego wiersza, lub też jako sumę ostatniej kolumny. Jest ona sprawdzianem całej roboty; stąd między innemi płynie walor takich tabelek, że działania same siebie sprawdzają. Pytanie: chociaż liczby ostatniego wiersza były całkiem inne, niż liczby ostatniej kolumny, skąd wiemy jednak n a p e w n o, że obie sumy muszą być równe?

Wypływają tu znów w zmienionej postaci prawa przemienności i łączności: wszak każda z liczb ostatniego wiersza jest sumą kilku (ilu i których?) z pośród danych 12 składników; te same składniki, tylko w innym porządku, wchodzą w skład sum, tworzących ostatnią kolumnę; jaki stąd wniosek?

Tą drogą wykorzystamy tabelkę bardziej wszechstronnie a może i mniej nudnie, niż się to dzieje zazwyczaj.

B. *Odejmowanie.*

Dyskutując nad tem działaniem na P. W. K. N., niejednokrotnie rozważaliśmy zawarte w niem bogactwo treści pojęciowej. Istotnie, o ile dodawanie obraca się stale koło dwóch tylko zagadnień: łączenia kilku zbiorów w jeden, oraz powiększania danego zbioru o inny dany zbiór, o tyle odejmowanie może być pojmowane:

a) jako rozkład sumy na składniki; np.: na dwa sprawunki wydano 35 zł, przyczem na jeden z nich wydano 23 zł. Ile wydano na drugi?

b) jako uzupełnienie danego zbioru do danej całości; np. ile jeszcze winien jestem za komorne, jeśli ono wynosi 80 zł, a ja zapłaciłem dopiero 65 zł?

c) jako obliczanie reszty z danego zbioru; np. ile pozostanie ze 100 zł po wydaniu 59 zł.

d) jako zmniejszenie danego zbioru o inny dany zbiór; np. wczoraj wypłacono z kasy 92 zł, a dziś o 13 zł mniej. Ile kasa dziś wypłaciła?

wreszcie e) jako obliczanie różnicy, czyli porównywanie, który z dwóch zbiorów jest większy, względnie mniejszy, i o ile; np. o ile droższa jest mąka pszenna od żytniej, jeśli 1 kg mąki pszennej kosztuje 55 gr, a żytniej 42 gr?

Stąd wynika wielka rozmaitość zagadnień, doprowadzających do odejmowania. Podręczniki zazwyczaj nie wyczerpują tej różnorodności, ani też nie porządkują zadań na podstawie wymienionych powyżej różnic w treści pojęciowej. Niektóre wypadki np. punkt b) (ile brakuje do całości?) jest często całkiem pomijany. Że jednak to ma wpływ na umysłowość dziecka, widzimy z zadań układanych przez dzieci. Z góry przewidzieć można, że jeśli polecimy dzieciom w którejkolwiek, choćby w VII klasie, ułożyć zadanie na odejmowanie, większość ułoży zadanie odpowiadające punktowi c): kupiono — zużyto; ile zostało? — i na tem koniec.

Dlaczego? Oczywiście dziecko idzie drogą najpospolitszą, a często nie widzi nawet innego użytku z odejmowania, choć wie np., że zapytanie, który zbiór jest większy i o ile, prowadzi również do odejmowania; ani też nie zawaha się, gdy mu każemy obliczyć nieznany składnik sumy i t. d.

Jako wniosek z dyskusji przyjęliśmy, że pożądaną jest sprawą pogłębić nieco traktowanie odejmowania w kl. V, w szczególności wyodrębnić odejmowanie jako rozkład j e d n e g o zbioru, do czego dadzą się sprowadzić punkty a, b, c i d, oraz odejmowanie, jako porównywanie d w ó c h zbiorów (punkt e). Inaczej mówiąc, nie plątać pojęcia reszty z pojęciem różnicy, choćby nawet teoretycznie miał być ustalony tylko ten drugi termin (odjemna, odjemnik, r ó ż n i c a).

C. *Związek dodawania z odejmowaniem.*

Jest to punkt bardzo ważny. Na wyższych stopniach nauczania, w szczególności przy opracowaniu liczb względnych, niejednokrotnie mści się zarówno na uczniu jak i na nauczycielu przeoczenie w nauce elementarnej dokładnego opracowania związku między temi dwoma działaniami.

Na jednej z lekcyj w naszej szkole ćwiczeń mogliśmy się przekonać, jak łatwo dzieci ten związek chwytają.

Nauczycielka wyszła od bardzo prostego zagadnienia: w pewnej rodzinie pracują zarobkowo mąż i żona, przyczem mąż zarabia 220 zł, żona — 150 zł miesięcznie. Jak się przedstawia dochód miesięczny rodziny?

Dzieci oczywiście napisały bez namysłu:

$$220 + 150 = 370.$$

Tu nastąpiła króciuteńka (w paru zdaniach) pogawędka o tem, iż w obecnych czasach z powodu bezrobocia władze często nie dopuszczają do tego, aby w jednej rodzinie kilka osób zarobkowało („aby jak najwięcej rodzin miało z czego żyć“ — dodały dzieci). I tu również tak się stało: zredukowano żonę. Jak się przedstawia obecnie dochód rodziny?

Bez chwili wahania dzieci napisały:

$$370 - 150 = 220;$$

przyczem żadnemu przez myśl nawet nie przeszło wykonywać odejmowanie w celu o b l i c z e n i a różnicy.

„A gdyby zredukowano nie żonę, lecz męża?“

Znowu bez wahania:

$$370 - 220 = 150.$$

Ta natychmiastowość, z jaką dzieci napisały wzory obu zadań na odejmowanie i wyniki działań bez ich obliczania świadczy, że w tym wypadku związek dodawania z odejmowaniem żadnej wątpliwości nie nasunął; nie świadczy jednak jeszcze o pełnem, w każdym wypadku, uchwyceniu tego związku. Tutaj dzieci miały do czynienia z sumą dwóch składników; jako zadanie odwrotne narzucał się nieodparcie rozkład sumy na składniki, z których ją utworzono.

Możnaby jednak wyjść nie od pojęcia sumy, lecz od pojęcia powiększania zbioru, np.: „Żona zarabia miesięcznie 150 zł, a mąż o 70 zł więcej. Ile stanowi zarobek męża?"

Z tem zadaniem dzieci niewątpliwie nie miałyby żadnego kłopotu; bez wahania napiszą:

$$150 + 70 = 220.$$

Jak jednak wygląda działanie odwrotne?

Albo:

$$220 - 70 = 150;$$

albo:

$$220 - 150 = 70.$$

Stąd dwa zupełnie odmienne typy zadań. W pierwszym wypadku zmniejszanie zbioru: ile zarabia żona, jeśli zarabia o 70 zł mniej od męża?

W drugim — porównywanie: o ile różnią się zarobki męża i żony?

Tutaj związek dodawania z odejmowaniem nie jest już tak przejrzysty, jak w zadaniu poprzedniem, gdy szło o rozkład sumy na składniki.

Stąd nasuwa się wniosek, że jako pierwsze podejście do wyjaśnienia związku dodawania z odejmowaniem nadaje się najlepiej zadanie oparte na rozkładzie sumy na składniki. Nie byłoby jednak słusznem na tem poprzestać.

W szczególności może byłoby pożądanem samodzielne układanie przez dzieci zadań odwrotnych na zasadzie jednego, podanego początkowo; przyczem to pierwsze, zasadnicze zadanie niekoniecznie musi być zadaniem na dodawanie.

Tego odcinka pracy nie mieliśmy jednak możności wypróbować doświadczalnie w „szkole ćwiczeń".

D. *Mnożenie.*

Tak się złożyło, że w naszej „szkole ćwiczeń" nie przeprowadzaliśmy w zakresie mnożenia liczb całkowitych ani jednej takiej lekcji, którąby mogła być uważana za eksperyment. Wszystkie lekcje, które bądź sama prowadziłam, bądź obserwowałam, nie wychodziły poza tematy ogólnie znane.

Natomiast w dyskusjach mówiło się dużo o mnożeniu i wówczas okazywało się, że ani technika mnożenia, ani związki między czynnikami i iloczynem wcale nie są pozbawione punktów spornych. Tylko że wątpliwości, nasuwające nam się w dyskusjach, były tego rodzaju, że nie mogły być rozstrzygnięte na jednej, ani nawet na kilku lekcjach.

Do spornych zagadnień należał między innemi porządek czynników. Wprawdzie uwagi do programu kl. I mówią wyraźnie: „przy zapisywaniu mnożenia należy z a w s z e pisać mnożnik na pierwszem miejscu, a na drugiem mnożną“ (z mianem lub bez miana).

Ale już w uwagach do całości programu w rozdziale „Działania piśmienne“ polecenie to jest wypowiedziane w formie o wiele mniej kategorycznej: „Jeżeli mnożenie jest zaznaczone we wzorze w związku z konkretnem zadaniem, to na pierwszem miejscu pisze się mnożnik, a potem mnożną z mianem lub bez miana, np.: 12 . 2 zł 50 gr = 30 zł. Natomiast przy piśmiennem wykonaniu mnożenia kierujemy się względami wygody, np. dla wyznaczenia iloczynu 144 . 7 gr, możemy wykonać mnożenie

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 7 \\ \hline 1008 \end{array}$$

i zanotować wynik: 144 . 7 gr. = 10 zł 08 gr“.

To rozróżnienie zapisu mnożenia w związku z konkretnem zadaniem, oraz mnożenia t. zw. liczb niemianowanych było na kursie zawsze przedmiotem długich dyskusyj.

Przedewszystkiem: jak rozumieć wskazówki podane w programie?

Jeśli twórcy programu każą zapisywać mnożnik na pierwszem miejscu, to niewątpliwie mają na myśli również i odpowiednie odczytanie słowne, np. zapis: 5 . 18 zł odczytamy: 5 razy po 18 zł.

Ale jeśli w nauce późniejszej, w mnożeniu liczb kilkocyfrowych, porządek czynników wolno nam uzależniać od wygody, to zwykle bierzemy za mnożnik ten z dwóch czynników, przez który łatwiej mnożyć. A więc np. 200 razy po 357, a nie 357 razy po 200, choćby „w konkretnem zadaniu“ właśnie 357 było mnożnikiem a nie mnożną.

Nie dość na tem; zmienia się też stopniowo i urozmaica wysłowienie. Uczeń mówi: 200 razy po 357, ale może też wyrazić się: 200 razy 357 (opuszczając wyraz „po“), albo: mnożę 357 przez 200, albo jeszcze krócej: 357 przez 200, wreszcie 357 razy 200, mając jednak ciągle na myśli 200 jako mnożnik. Czy ta dowolność słowna nie powinna iść w parze z dowolnością zapisu?

Tu jednak zjawia się nowa wątpliwość: z chwilą gdy przychodzi mnożenie ułamków, całkiem innego sensu nabiera iloczyn liczb np. $\frac{1}{4}$ i 5 w zależności od tego, którą z nich przyjmiemy za mnożnik. Jeśli mnożnikiem jest liczba 5, wówczas $5 \cdot \frac{1}{4}$ będzie znaczyło piątą wielokrotność ułamka $\frac{1}{4}$ i może być przeczytane: 5 razy po $\frac{1}{4}$. Natomiast jeśli mnożnikiem jest $\frac{1}{4}$ wówczas $\frac{1}{4} \cdot 5$ znaczy: czwarta część liczby 5 i tak też musi być przeczytane, n i g d y z a ś $\frac{1}{4}$ r a z y p o 5, bo to nie ma sensu. A więc tu dowolności być nie może; prawo przemienności n a r a z i e zostaje zawieszone i dopiero po dłuższej nauce odzyska swoje prawa.

Z drugiej strony, objaśniając technikę mnożenia liczby ułamkowej przez całkowitą, dziecko wyraża się zazwyczaj: „należy pomnożyć licznik ułamka $\frac{1}{4}$ przez 5“, stawiając tem samem 5 na drugiem miejscu i równocześnie zgodnie z brzmieniem prawidła pisząc $\frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{1 . 5}{4}$.

Jak pogodzić te sprzeczności?

W dyskusjach dawały się słyszeć bardzo różne zdania. Jedni twierdzili, że jeśli, zgodnie z programem, przyjmiemy na niższych poziomach zapis mnożnika na pierwszem miejscu, to powinniśmy konsekwentnie trzymać się tej zasady w ciągu całej dalszej nauki, a więc zarówno w mnożeniu liczb wielocyfrowych (piśmiennem czy ustnem), jak i w mnożeniu ułamków. W takim razie prawo przemienności staje się praktycznie zbędnem i sprowadza się jedynie do czysto teoretycznej własności mnożenia, z której uczeń użytku w życiu nie czyni.

Na to odpowiadali inni: ze względów rachunkowych porządek czynników gra bardzo ważną rolę. Czemu uczeń nie ma sobie ułatwić pracy, robiąc użytek z prawa przemienności czynników, skoro nawet i sam program wprowadza ustępstwo od zasady, pozwalając pisać w mnożeniu piśmiennem mnożnik pod mnożną, a więc na drugiem miejscu?

Nie możemy się pochwalić, abyśmy z tych dyskusyj zdołali wyprowadzić „niezawodne" wskazówki metodyczne (o ile takowe istnieją), tembardziej, iż dyskusje nasze nie mogły być oparte na eksperymentach. Niemniej stopniowo zarysowały się wnioski następujące:

1) Na wyższym (poczynając już od kl. IV) poziomie nauczania nie to jest ważne, g d z i e dziecko napisze mnożnik, ale to, czy zdaje sobie dokładnie sprawę, k t ó r y z dwóch czynników jest mnożnikiem. Że niezawsze tak bywa, świadczą o tem częste błędy wysłowienia u dzieci, np.: mnożę 2 zł przez 8 kg; lub odwrotnie „kilogramy przez złote", oraz idące w parze z tem błędne zapisy, np. t. zw. miano przy obu czynnikach, albo przy mnożniku zamiast przy mnożnej.

Nie możemy zatem poprzestać na gołosłownem stwierdzeniu przez dzieci, że „trzeba pomnożyć", lecz wymagajmy prawidłowego objaśnienia, którą liczbę mnożą przez którą i dlaczego;

2) zasadniczo możemy umówić się z dziećmi (ale tylko „umówić"), że mnożnik piszemy na pierwszem miejscu; ale w wypadku, gdy ta umowa ze względów technicznych jest niewygodna, możemy świadomie ją zmienić. Idzie tylko o to, aby uczeń zmieniając porządek czynników, robił to ś w i a d o m i e, nie tracąc z oczu znaczenia czynników w zadaniu, które rozwiązuje.

Będzie to zarazem częściowe przynajmniej zabezpieczenie od późniejszych błędów w interpretacji, zapisie oraz technice mnożenia ułamków.

E. *Dzielenie; związek dzielenia z mnożeniem.*

O dzieleniu mówiło się naogół mniej, niż o mnożeniu, może dlatego, że program daje w sprawie dzielenia piśmiennego całkiem wystarczające wskazówki. Jedyny temat, jaki, o ile sobie przypominam, przeszedł przez dyskusję w zakresie kursu kl. V, dotyczył rozróżnienia dwóch rodzajów dzielenia. Lekcja na ów temat zdarzyła się przygodnie w związku z dorocznemi egzaminami eksternów, a tem samem nie miała nawiązania do normalnej pracy na P. W. K. N. Słuchacze P. W. K. N. oczywiście na lekcji nie byli obecni; zreferowałam ją sama i poddałam dyskusji pewne nasuwające mi się wątpliwości.

Właściwym tematem lekcji był związek mnożenia z dzieleniem, ale stąd wypłynęło samorzutnie zagadnienie dwóch rodzajów dzielenia zależnie od tego, czy przy odwróceniu mnożenia dzielnikiem stawał się mnożnik czy też mnożna.

Nauczyciel wiedział oczywiście, że oba rodzaje dzielenia „po kilka“ i „na kilka części“ znają dzieci z kursu klas niższych, że zatem lekcja musi mieć charakter powtórzenia, zestawienia i pogłębienia wiadomości, nabytych uprzednio.

Punktem wyjścia było zadanie konkretne na mnożenie. Dzieci rozwiązały je bez trudu, tembardziej że (niepotrzebnie zresztą) dobór liczb był bardzo łatwy. Niemniej, gdy przyszło do odwrócenia zadania, zaczęły się plątać.

Trudno określić, czy przyczyna tkwiła w niedość jasnem ujęciu zagadnienia ze strony nauczyciela, czy też w doszczętnem zapomnieniu uprzednio przerobionego materjału ze strony dzieci. Bądź co bądź, referując lekcję, musiałam zaznaczyć, że związek mnożenia z dzieleniem nie jest sprawą tak prostą, jak związek dodawania z odejmowaniem, i że należy poświęcić mu więcej trudu.

Wywiązała się o tem pogawędka. Stwierdziliśmy przedewszystkiem, że niedociągnięcia w kl. V wynikają z braku ciągłości pracy w klasach poprzednich.

Istotnie, wprowadzenie dwóch wypadków dzielenia według programu następuje w kl. II, przyczem najpierw wprowadzamy dzielenie „po kilka“ czyli t. zw. popularnie „mieszczenie“, albo według brzmienia programu „w znaczeniu podziału na części równe o danej wielkości“, a następnie dopiero dzielenie „na kilka“ czyli podział na daną liczbę równych części.

W programie kl. III i IV niema prawie nic o dwóch wypadkach dzielenia, poza wzmianką o dwóch rodzajach dzielenia wyrażeń dwumianowanych. Może w tem leży przyczyna pewnego zaniedbania czy pomijania tej sprawy w przerabianiu materjału, co odbija się ujemnie w kl. V przy powtarzaniu 4 działań. Stąd wniosek pierwszy: pożądanem jest w kl. III, IV i dalej jeszcze przy przerabianiu zadań konkretnych rozróżniać wypadki dzielenia i zwracać uwagę na wysławianie się dzieci. A więc np. niech uczeń nie poprzestaje na powiedzeniu: dzielę 250 przez 50, ale: dzielę 250 zł po 50 zł, albo (zależnie od treści): dzielę 250 zł na 50 części. Potem już w trakcie wykonywania dzielenia mogą dzieci robić skróty słowne.

Z drugiej strony niepodobna tracić z oczu faktu, że są to jednak dwa wypadki tego samego działania i że, jeśli idzie o sprawność rachunkową, posługujemy się w dzieleniu liczb wielocyfrowych bądź jednym bądź drugim rodzajem dzielenia zależnie od wygody.

Tak np. w rachunku ustnym, chcąc podzielić 36000 przez 3, uciekniemy się, nie dbając o konkretną treść zadania do podziału na 3 części, a nie do obliczania, ile razy po 3 mieści się w liczbie pięciocyfrowej. Natomiast dzieląc tę samą liczbę np. przez 12000, odrazu sprowadzamy to zagadnienie do obliczenia, ile razy ów duży pięciocyfrowy dzielnik mieści się w dzielnej, choćby z treści zadania wynikał podział na 12000 części.

Natomiast w dzieleniu piśmiennem niezależnie od doboru liczb używamy zwrotów i wyrażeń właściwych dzieleniu „po kilka" (podziału na części równe o danej wielkości). Np. dzieląc piśmiennie 2873 przez 12, mówimy: 12 w 28 setkach m i e ś c i s i ę 2 razy (właściwie: 2 setki razy); 12 w 47 dziesiątkach m i e ś c i s i ę 3 razy i t. d., a nie 28 setek n a 12 części i t. d.

Stąd drugi wniosek: rozróżniając według treści zadania dwa rodzaje dzielenia, dziecko musi jednak stopniowo (chyba jednak dopiero w IV lub V kl.) dojść do wniosku, że dla obliczenia ilorazu jest całkiem wszystko jedno, którym rodzajem dzielenia się posługuje, że zatem może obliczeń dokonywać tak, jak mu w danym wypadku najłatwiej.

F. *Dzielenie z resztą.*

Dzielenie z resztą, jako odcinek pracy należący raczej do programu klas niższych, nie weszło u nas na porządek dzienny jako temat lekcyj pokazowych; natomiast ze względu na ścisły związek tej sprawy z nauką cech podzielności (o czem poniżej), bywało niejednokrotnie przedmiotem ożywionych dyskusyj, których główne punkty postaram się streścić.

A więc przedewszystkiem dyskutowaliśmy nad doborem zadań, z których dałoby się w sposób wolny od sztuczności wyprowadzić pojęcie reszty. Jasną jest rzeczą, że pojęcie to wynika jedynie z rodzaju dzielenia, zwanego popularnie „mieszczeniem", inaczej mówiąc, z czynności wyczerpywania danego zbioru przy pomocy innego, mniej licznego. Bowiem drugi rodzaj dzielenia, dzielenie na części, doprowadza albo do pojęcia ułamka, albo do odpowiedzi negatywnej: dany podział uskutecznić się nie da.

A więc np. czynność podziału 20 zeszytów po 3 zeszyty na ucznia doprowadza do odpowiedzi: wystarczy dla 6 uczniów i jeszcze 2 zeszyty pozostaną.

Natomiast zadanie: podziel 20 zeszytów równo między 6 uczniów (czyli na 6 równych części) nie da się wykonać; można podzielić w ten sposób 18 zeszytów, ale nie 20, bo przecie zeszytów rozdzierać nie będziemy. Gdyby zamiast zeszytów były do podziału przedmioty, dające się krajać, np. bochenki chleba, podział dałby się uskutecznić, ale przy wprowadzeniu ułamków.

Ustaliwszy ten prosty fakt, nie mieliśmy już trudności w znalezieniu mnóstwa sytuacyj życiowych, z których bez sztuczności dałoby się wyprowadzić pojęcie reszty.

Z kolei musimy doprowadzić dzieci do ustalenia stosunku między wielkością reszty i dzielnika. Ten punkt niemal w każdym z podręczników bywa starannie opracowany; zresztą i nauczycielowi nietrudno obmyślić szereg ćwiczeń, w których stopniowy wzrost dzielnej przy stałym dzielniku powoduje wzrost reszty. Dziecko samo z łatwością spostrzega, w jakich granicach może zmieniać się reszta i jaka jest jej wartość maksymalna.

W końcu trzeci etap pracy: wyznaczenie dzielnej na zasadzie dzielnika, ilorazu i reszty, oraz wyznaczenie dzielnika na zasadzie trzech liczb pozostałych. Związek dzielenia z mnożeniem, omawiany powyżej, stanowi już wystarczające przygotowanie do tego odcinka pracy. Prawie zawsze dzieci same dochodzą, w jaki sposób w dzieleniu z resztą odbudować dzielną. Jeśli w powyżej przytoczonem zadaniu dziecko rozdało 20 zeszytów po 3 każdemu z kolegów, to jasną dlań będzie rzeczą, że, aby otrzymać z powrotem owe 20 zeszytów, musi od 6 kolegów odebrać po 3 zeszyty i dołączyć do tej liczby owe 2 pozostałe.

Oczywiście, w dyskusji podkreślaliśmy niejednokrotnie konieczność powracania do tych spraw w *każdej klasie* do piątej włącznie. W piątej nastąpi zestawienie całego powyższego materjału, a jeśli czas, oraz poziom klasy na to pozwoli, *pogłębienie go od strony teoretycznej.*

Cel ten możemy osiągnąć w drodze ćwiczeń np. następujących: Jeśli dzielna wynosi 135, a reszta — 15, to jaki *może być* dzielnik i iloraz. Odpowiedzi słusznych jest wiele, bowiem po odjęciu reszty od dzielnej otrzymamy liczbę 120, będącą iloczynem dzielnika i ilorazu, a dającą się rozłożyć w różny sposób na 2 czynniki.

I tu nastąpi moment szczególnie pouczający: niewszystkie sposoby rozkładu czynią zadość warunkowi reszty, o której wiemy, że ma się równać 15. Nie może np. dzielnik być równy liczbie 12, bo musi być *większy od reszty*. Istotnie, uczeń łatwo sprawdzi, że dzieląc 135 przez 12, otrzyma resztę 3, nie zaś 15. To mu naświetli głębiej jeszcze związek między dzielną, dzielnikiem, ilorazem i resztą.

Jako przygotowanie do „cech podzielności" musimy jednak pojęcie reszty rozważyć jeszcze dalej: pod kątem *podzielności sumy*. Sprawę tę omawiam w rozdziale następnym.

4. Podzielność liczb.

Rozważając na P. W. K. N. kolejne punkty programu i ustalając wytyczne lekcyj, największy kłopot mieliśmy zawsze z temi odcinkami pracy, które najmniej wiążą się z życiem praktycznem. Wchodziła tu w grę pomiędzy innemi przesadna obawa przed t. zw. „pojęciami oderwanemi“, jako pozornie najmniej zajmującemi dla dzieci i najtrudniej dającemi się przyswoić.

Do takich kłopotliwych kwestyj należało między innemi opracowanie cech podzielności. Ogólnie w dyskusji twierdzono, że nie jest to rzecz trudna dla dzieci, ale nudna, niewdzięczna i niedająca się nawiązać do żadnych prawie „życiowych“ i „aktualnych“ sytuacyj.

Ostatecznie doszliśmy do wniosku, że łatwiej poradzimy sobie z tym odcinkiem pracy, o ile cechy podzielności potraktujemy, jako wnioski z pewnych praw, które dzieci już praktycznie (ale tylko praktycznie) znają.

Prawa te dają się ująć w trzy twierdzenia, dotyczące, oczywiście, tylko liczb całkowitych:

1) Jeśli każdy ze składników sumy jest podzielny przez daną liczbę, to i suma również jest przez tę liczbę podzielna; a stąd: jeśli wszystkie składniki są podzielne przez tę liczbę, a jeden ze składników przez nią się nie dzieli, to suma nie podzieli się przez daną liczbę;

2) jeśli suma reszt z podziału poszczególnych składników dzieli się bez reszty przez daną liczbę, to i ogólna suma składników również jest przez tę liczbę podzielna, wreszcie

3) jeśli jakaś liczba dzieli się bez reszty przez daną liczbę, to dzieli się również przez wszystkie czynniki danej liczby.

To uprzytomnienie sobie praw, na których mieliśmy oprzeć prawa podzielności (oczywiście bez podawania ich dzieciom w formie ogólnej), pozwoliło nam stanąć na realniejszym gruncie przy opracowywaniu odnośnych lekcyj.

Przedewszystkiem zatem ustaliliśmy porządek pracy: najpierw opracować podzielność przez 10 i przez 100, potem przez 5 i przez 2, potem przez 25 i przez 4. Będzie to pierwszy etap pracy. Drugi etap obejmie cechy podzielności przez 9 i przez 3, przyczem najpierw przez 9, a potem przez 3.

Opracowując cechy podzielności przez 10 i przez 100, nauczyciel miał zadanie bardzo łatwe. Oparł się na często spotykanej w życiu konieczności wymiany drobniejszych pieniędzy na grubsze banknoty; na szeregu przykładów dzieci same orzekały, po czem poznać, czy wymiana da się uskutecznić bez reszty, a stąd sformułowanie ogólnej zasady okazało się całkiem proste. Niedomagało ono może pod względem ścisłości wysłowienia; dzieci mówiły: „liczba dzieli się przez 10 (względnie przez 100), gdy się k o ń c z y zerem (względnie — dwoma zerami)“.

Niemniej, zrozumienie sprawy było zupełne. Owo wyrażenie: „kończy się zerem, piątką, dwójką“ niewątpliwie powinno być stopniowo zastępowane wyrażeniem ściślejszem: „liczba, w której na miejscu jedności stoi zero, piątka, dwójka“; trudno jednak wymagać od dzieci, aby w samodzielnem sformułowaniu swych myśli wyrażały się z matematyczną ścisłością.

Drugi punkt pracy, cechy podzielności przez 2 i przez 5, oparliśmy na zrozumieniu faktu, że jeśli jakaś liczba składa się z dziesiątek, to można ją rozłożyć i na piątki (względnie: na dwójki), bo każda dziesiątka to są dwie piątki (lub 5 dwójek). Jak widzimy, posłużyło nam tutaj trzecie z wymienionych na początku twierdzeń.

Obok szeregu ćwiczeń i przykładów takich jak: „Z ilu dziesiątek składa się liczba 20, 30 i t. d.?“ A więc — z ilu piątek? Która z liczb 30, 45, 58, 70 da się bez reszty rozmienić na piątki? Która nie da się bez reszty rozmienić na piątki? — poznać to odrazu „na oko!“ — wykonywały dzieci również i zadania „z treścią“ np. „Do fabryki na sobotnią wypłatę przyniesiono z kasy pieniądze samemi pięciozłotowemi (ewentualnie — dwuzłotowemi) monetami. Jednemu z robotników należało się za robotę w tym tygodniu 35 zł, drugiemu — 48 zł, trzeciemu — 60 zł, czwartemu — 45 zł, piątemu — 27 zł. Którzy z tych robotników mogli otrzymać swoją należność bez wydawania reszty i bez rozmiany pieniędzy na drobniejsze monety? Po czem to można poznać?

Jak widzimy, zaczęło się od poznawania „na oko“, przyczem błędy ze strony dzieci nie zdarzały się prawie nigdy. Dopiero po długim szeregu takich wstępnych ćwiczeń pojawiło się zagadnienie: Dlaczego to, gdy „na końcu" liczby stoi liczba parzysta lub zero, można z całą pewnością powiedzieć, że liczbę tę da się podzielić, rozłożyć na dwójki?

Tutaj odpowiedź nie nasuwała się bezpośrednio; nauczyciel, prowadzący lekcję, musiał zatem uciec się do t. zw. pytań naprowadzających: Dlaczego mówisz, że 138 zł można napewno rozmienić na monety 2-złotowe? Z czego się składa liczba 138 (Rozkład na dziesiątki i jedności)? Czy 130 zł można rozmienić na 2-złotówki? Skąd to wiesz? A 8 zł czy możesz rozmienić? A więc?

Odwrotnie: pomyśl sam taką liczbę złotych, którą możnaby rozmienić na 5-złotówki, na 2-złotówki. Wytłumacz! Jak widać, wchodziło tu w grę twierdzenie pierwsze.

Stąd po szeregu przykładów nasunął się wniosek: Aby się dowiedzieć, czy liczba dzieli się przez 5, albo przez 2, wystarczy rozłożyć liczbę na dziesiątki i na jedności, a potem zbadać tylko jedności, bo podzielność dziesiątek jest niewątpliwa.

Wreszcie: sformułowanie cechy podzielności początkowo niezgrabnym dziecięcym językiem, następnie poprawne.

Trudniej poszło z następnym punktem pracy, z cechą podzielności przez 4 i przez 25. Trudność wynikała przedewszystkiem z faktu, że wobec braku monet 4-złotowych i 25-złotowych niemożna było oprzeć się w dalszym ciągu na rozmianie pieniędzy; zawodził więc najbardziej naturalny punkt wyjścia. Trzeba było zatem bądź nawiązywać do innych, dość sztucznych faktów „z życia", bądź też rozwiązać to zagadnienie czysto teoretycznie. Wybraliśmy to ostatnie; bowiem opracowanie zagadnienia dla liczb 2 i 5 dawało nam rękojmię, że próba się powiedzie.

Istotnie, nietylko się powiodła, lecz nieoczekiwanie rozszerzyła się obok liczb 4 i 25 na liczby 20 i 50.

Nauczyciel oparł się znowu na prawie (trzeciem), że podzielność przez daną liczbę pociąga za sobą podzielność przez wszystkie jej czynniki. A więc jeśli możemy rozłożyć liczbę na setki, to możemy rozłożyć ją i na czwórki, bo liczba 100 składa się z czwórek, a dalej na 20, na 25, na 50.

Ustaliwszy ten fakt, rozwiązywał z dziećmi przykłady liczbowe: czy 200 da się rozłożyć na pięćdziesiątki? A 250? Dlaczego?

Czy 300 da się rozłożyć na 20? A 380? Dlaczego? A dalej: rozłóż liczbę 450 na setki i na resztę. Co powiesz zatem o liczbie 450? Czy dzieli się ona przez 50, przez 25? Czy dzieli się przez 4, przez 20? Dlaczego nie dzieli się przez te liczby?

Znowu, jak poprzednio, na długo przed sformułowaniem prawidła dzieci badały „na oko“, przez jakie czynniki liczby 100 dana liczba się dzieli, następnie dopiero objaśniając swoje spostrzeżenia rozkładem na setki i na resztę. Odwrotnie, budowały z setek i z odpowiedniej liczby dwucyfrowej takie liczby, któreby się dały podzielić przez 4, 25, 20, 50. W końcu sformułowały wniosek — cechę podzielności.

Drugi etap pracy, podzielność przez 9 i przez 3, poprzedzony został szeregiem ćwiczeń i zadań, mających na celu wdrożenie dzieci do badania sumy reszt (a więc zastosowanie twierdzenia drugiego).

Np.: „Dzieci z 3 klas: IV, V i VI poszły na wycieczkę. Wyszedłszy za miasto na szosę, chciały się ustawić czwórkami bez podziału na klasy. Czy da się to uskutecznić, jeśli z kl. IV poszło 49 uczniów, z kl. V — 47, a z VI — 48? Odpowiedzieć na to pytanie, nie licząc, ilu jest wszystkich uczniów. Pytania naprowadzające: Jeśli kl. IV utworzy czwórki, ilu chłopców zostanie „luzem?“ Ilu zostanie z kl. V, z kl. VI? Czy z tych pozostałych dadzą się ustawić czwórki?

Albo: „Spółdzielnia utargowała w ciągu 3 dni: pierwszego dnia 273 zł, drugiego 389 zł, trzeciego 348 zł. Trzeba te pieniądze złożyć w P. K. O., ale kasa P. K. O. niechętnie przyjmuje t. zw. bilon. Czy można całą kwotę wypłacić banknotami 20-złotowemi? 50-złotowemi? Odpowiedzieć, nie sumując utargów dziennych.

Z podobnych zadań i z szeregu przykładów liczbowych w rodzaju następujących: nie sumując składników określić resztę z podziału: $(232 + 314 + 123) : 8$ dzieci przyswoiły sobie rzecz ważną: metodę badania podzielności sumy za pomocą badania sumy reszt.

Wtedy dopiero przystąpiliśmy do opracowania cechy podzielności przez 9 i przez 3.

Dlaczego zaczęliśmy tę pracę od liczby 9, a nie od liczby 3?

Dlatego, że reszty z podziału tysięcy, setek, dziesiątek, jedności przez 9 istotnie odpowiadają cyfrom, wchodzącym w skład danej liczby, podczas gdy z liczbą 3 niezawsze tak bywa.

Np.: Gdy dzielimy 700 przez 9, otrzymujemy resztę 7; natomiast gdy tę samą liczbę 700 podzielimy przez 3, otrzymujemy resztę 1, a nie 7, i nie mamy prawa bez zastrzeżeń i omówień szczegółowszych stosować tej samej, co i dla liczby 9, cechy podzielności.

W ciągu 2 lat kolejnych cecha podzielności przez 9 opracowana była przez dwu różnych nauczycieli. Każdy z nich ujął zagadnienie inaczej.

Pierwsze opracowanie (w kl. V) oparte było ściśle na przykładach sumowania reszt, zacytowanych powyżej.

A więc najpierw dzieci rozwiązywały przykłady i zadania typu następującego:

Obliczyć, bez sumowania składników, ile zostanie reszty z podziału:

$$(65 + 34 + 28) : 9.$$

Dzieci rozwiązywały takie przykłady ustnie, mówiąc: z liczby 65 po podzieleniu przez 9 pozostanie reszta 2, z 34 — reszta 7, z 28 — reszta 1, a więc razem pozostanie 10. Gdy tę resztę podzielimy jeszcze przez 9, pozostanie reszta 1.

Drugim etapem były przykłady w rodzaju poniższego:

Ile reszty pozostanie z podziału:

$$(500 + 80 + 5) : 9.$$

Tu nauczyciel podsunął dzieciom myśl, aby dla ułatwienia sobie obliczeń zbadały wpierw resztę z każdej dziesiątki, z każdej setki i t. d. To doprowadziło bardzo łatwo do stwierdzenia, że w każdej liczbie reszty z podziału przez 9 dają się odrazu odczytać z cyfr tej liczby, a stąd wynikła bezpośrednio żądana cecha podzielności.

Z liczbą 3 było nieco więcej kłopotu; jeśli bowiem cyfry w danej liczbie były większe od trójki, dzieci nie widziały powodu, aby brać pod uwagę takie duże reszty. „Przecie gdy dzielimy przez 3, to reszta może być najwyżej 2“.

Trzeba było dodatkowo wyjaśniać, że dzieląc np. 500 : 3 wygodniej brać pod uwagę tyle jedności reszty, ile jest setek, bo wówczas łatwo zastosować znaną już poprzednio cechę podzielności, tę samą co dla liczby 9.

W następnym roku wypadło nam opracowywać ten sam temat w kl. VI, zapóźnionej pod względem przerobionego materjału. Nauczyciel tym razem oparł się na szeregach liczb i porównywaniu reszt z każdego szeregu. Najpierw zatem polecił dzieciom wypisać na tablicy kolejno liczby: 10, 20, 30... aż do 90, a pod niemi reszty z podziału przez 9.

Następnie nad liczbami pierwszego szeregu polecił wynotować drugi szereg: 100, 200... aż do 900; jeszcze wyżej trzeci: 1000, 2000... aż do 9000.

Dzieci szybko spostrzegły, że reszta z podziału przez 9 liczb 10, 100, 1000 jest wciąż ta sama i równa jedności; reszta z podziału przez 9 liczb 20, 200, 2000 — znów ta sama, równa liczbie 2, i t. d. Ćwiczenia ustne w rodzaju: powiedz odrazu resztę z podziału przez 9: liczb 50, 500, 5000; resztę z podziału przez 9 liczb: 80, 800, 8000 — poszły gładko, a stąd już wynikło bezpośrednio sformułowanie cechy podzielności. Dodać należy, że zarówno tutaj jak i w eksperymencie z roku poprzedniego nauczyciele używali stale wyrażenia „suma reszt", unikając, mojem zdaniem całkiem słusznie, stereotypowego i bardzo nieścisłego zwrotu „suma cyfr".

Tak więc, odcinek programu, uważany za specjalnie niewdzięczny, dał się opracować w nieco żywszy sposób, jakkolwiek „nawiązanie do życia" odegrało tu rolę stosunkowo znacznie słabszą, niżeli t. zw. przykłady „oderwane".

5. Ułamki zwykłe.

A. *Wprowadzenie pojęcia ułamka.*

W programach szkoły powszechnej z przed r. 1930 pierwsze pojęcie ułamka wchodziło do materjału kl. I.

Program z r. 1930 przewidywał ten sam odcinek pracy w kl. II.

Programy ostatnie mówią o pierwszem pojęciu ułamka dopiero w klasie IV.

Jak widzimy, początki nauki o ułamku przesuwają się stopniowo do klas coraz wyższych. To dowodzi, że praktyka szkolna ujawniła duże trudności, zawarte w realizacji tego skromnie brzmiącego odcinka pracy i że twórcy programów uznali za słuszne liczyć się z wnioskami, wysnutemi z doświadczeń.

Na Wyższym Kursie mówiliśmy o tem sporo, starając się zanalizować i zdefinjować trudności, związane z nauczaniem ułamków. Niestety jednak, mało doświadczeń zdołaliśmy przeprowadzić nad owem pierwszem stadjum nauki o ułamku, wobec czego wnioski nasze, nie poparte praktyką, mają jedynie wartość tematów do dyskusji dla szerszych kół nauczycielskich.

Raz tylko jeden prowadziliśmy naukę ułamków od samego początku i to nie w kl. IV lecz w V. Dzieci wprawdzie utrzymywały z niezachwianą pewnością, że wszystko było dla nich nowe; nie zdołaliśmy jednak sprawdzić, czy istotnie ten odcinek pracy został z jakichś szczególnych przyczyn pominięty, czy też został przerobiony w roku poprzednim i doszczętnie zapomniany.

Te kilka początkowych lekcyj poszło sprawnie. W szczególności ciekawe były dwie pierwsze lekcje, ze względu na ściśle zachowany między niemi związek logiczny.

Na pierwszej lekcji dzieci wespół z nauczycielem dzieliły, krajały, składały na części mnóstwo konkretów: sznurków, pasków papieru, krążków i t. d., a stąd wyprowadzały pojęcie części: połowy, ćwierci, części trzeciej i t. d., wraz z odpowiednim zapisem. Porządek pracy każdorazowo był następujący: Nauczyciel polecał złożyć (rozciąć) pasek papieru np. na dwie równe części; rozważał wraz z dziećmi, jak nazwać jedną z dwóch otrzymanych części, w końcu — jak ją zapisać. Czasem polecany był podział na nierówne części; dzieci dochodziły wówczas do wniosku, że żadna z dwóch nierównych części nie może być nazwana połową. Taki sam przebieg pracy zachowany był przy dzieleniu na trzy, cztery i więcej części.

Na drugiej lekcji z kolei dzieci wykonywały robotę odwrotną: nauczyciel dawał polecenie: znaleźć połowę, ćwierć, trzecią część danej całości, np. odcinka, prostokąta, krążka, a następnie tuzina, kopy, złotego, godziny i t. d. Dzieci musiały zatem bądź wykonywać odpowiednią czynność techniczną: złożyć, rozciąć i t. d., bądź też zapisać odpowiednie działanie na liczbach.

Tym sposobem pojęcie ułamka skojarzone zostało należycie z czynnością d z i e l e n i a.

Dyskusja nad temi lekcjami potoczyła się przedewszystkiem naokoło doboru konkretów i grafiki ułamków. Zauważono, że w pewnych poszczególnych wypadkach nadają się bardziej jedne środki poglądowe, w innych — inne. Tak np. krążek szczególnie się nadaje jako ilustracja połowy i ćwierci ze względu na charakterystyczny kształt półkola i ćwiartki koła. Natomiast przy podziale całości na trzy, pięć i więcej części, ze względu na związane z podziałem koła trudności techniczne, o wiele praktyczniejszym okazuje się prostokąt, kwadrat, wreszcie odcinek określonej z góry długości.

Z dalszych etapów pracy ciekawie wypadło wprowadzenie pojęcia ułamka niewłaściwego, które nauczyciel (zgodnie z podręcznikiem, którym się posługiwał) oparł na tworzeniu szeregów ułamków o wspólnym mianowniku, np. $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ i t. d. aż do przekroczenia całości. Pierwsze szeregi tworzone były w związku z określonem zadaniem, np. odcinaniem kolejno po $\frac{1}{4}$ metra, wydawaniem po $\frac{1}{5}$ złotego i t. d.; następne tworzyły dzieci już teoretycznie. Termin: ułamek właściwy i niewłaściwy, podane zostały dopiero przy końcu lekcji, łącznie z zagadnieniem: po czem poznać, który ułamek jest właściwy, a który niewłaściwy.

W dyskusji zarzucono prowadzącemu lekcję zbytnią teoretyczność w ujęciu zagadnienia, skąpe posługiwanie się rysunkiem i konkretem. To doprowadziło do dyskusji ogólniejszej: czy potrzebne są środki poglądowe nawet wówczas, gdy dzieci nie zdradzają żadnych wahań w zrozumieniu danej sprawy, ani też same nie szukają sposobów uzmysłowienia? Czy środki poglądowe nie stają się czasami zbędnym balastem, krępującym dzieci wówczas, gdy pragną same biec myślą prędzej i dalej, niż to nauczyciel przewidywał? Z drugiej strony, czy dzieci czasem nie ulegają złudzeniu, że sprawa jest dla nich całkiem jasna, lub też czy nie czepiają się jedynie formy, sposobu zapisu, bez głębszego opanowania treści pojęciowej?

Na te pytania, oczywiście, trudno było sformułować odpowiedź niezawodną; jak wiele spraw, tak i powyższa rozstrzygana być musi w każdym poszczególnym wypadku przez samego nauczyciela w oparciu o znajomość uczniów, oraz o obserwacje psychologiczne i własne doświadczenie. Niemniej dyskusja powyższa miała tę wartość, że skłoniła do bardziej krytycznego rzutu oka na środki poglądowe, używane przy nauce ułamków.

Niewątpliwie, zarówno w doborze środków jak i w sposobie posługiwania się niemi, bywa dużo przesady. Niejednokrotnie nauczyciel podczas pierwszych lekcyj w zakresie ułamków sili się na przygotowywanie środków poglądowych sztucznych, zbyt złożonych, niepotrzebnie barwnych, podczas gdy ten sam efekt osiągnąćby można przez całkiem prosty rysunek wykonany na poczekaniu ręką dziecka w zeszycie, a ręką nauczyciela kredą na tablicy. Niejednokrotnie dziecko odrzuca pomoce naukowe, lub skłonione do posługiwania się niemi, czyni to niedbale, z lekceważeniem, z góry przeświadczone o wyniku jaki otrzyma.

Z drugiej strony w kursie ułamków są pewne odcinki pracy, w których jedynie jak najdłuższe i jak najczęstsze posługiwanie się poglądem gwarantuje należyte zrozumienie sprawy. Do takich zagadnień należy, między innemi porównywanie ułamków, zamiana jednych ułamków na inne równowartościowe, czyli t. zw. popularnie „zmiana postaci ułamka“, sprowadzanie do wspólnego mianownika i t. d.

Z tematów powyższych najwięcej czasu poświęciliśmy dyskusji nad grafiką ułamków przy nauce t. zw. „zmiany postaci ułamka“.

B. *Ułamki równe i ich przekształcanie.*

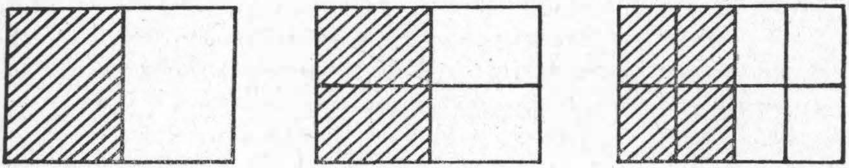
Lekcja, którą opisuję, nie była bynajmniej specjalnie pomysłową w sprawie grafiki ułamków, dała jednak powód do ożywionej na ten temat dyskusji.

Nauczyciel miał w kl. V powtórzyć z materjału kl. IV porównywanie ułamków z mianownikami 2, 4, 8, oraz 3, 6, 9 i rozszerzyć to zagadnienie na wszelkie inne ułamki.

Zabrał się do tego w sposób właściwy, chociaż dość stereotypowy. Oto przypiął na tablicy kilka jednakowych prostokątów i polecił jeden z nich podzielić kreską na 2 równe części, drugi na 4, trzeci na 8 równych części. Dzieci uczyniły to, mierząc boki prostokątów i według poczynionych znaków czarnemi kreskami na białem tle wyznaczając żądany podział.

Wówczas nauczyciel polecił im na każdym z tych prostokątów zacieniować połowę otrzymanych części.

Wskazówka była dość niejasna i trochę dla dalszego ciągu lekcji niebezpieczna, bo dzieci mogły w każdym z podzielonych prostokątów zacieniować połowę otrzymanych małych prostokącików, nie troszcząc się o ogólny kształt figury zacieniowanej, co niewątpliwie utrudniłoby porównywanie. Na szczęście dzieci na taki pomysł nie wpadły, lecz idąc drogą najmniejszego oporu, zacieniowały części trzech prostokątów jak poniżej (Rys. 1),



Rys. 1

skąd już bez trudu wyciągnęły wniosek, że:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

W podobny sposób wykonano jeszcze dwa doświadczenia, prowadzące do wniosków:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ oraz } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

Tyle zawierała część powtórzeniowa, oparta całkowicie na grafice.

Natomiast w części lekcji, mającej na celu wprowadzenie materjału nowego, nauczyciel oparł się wyłącznie na teoretycznem prawidle zwiększania, względnie zmniejszania licznika i mianownika jednakową liczbę razy, wytłumaczywszy tę czynność dość pobieżnie, jako rozmianę na drobniejsze części.

Oczywiście dzieci pochwyciły prawidło w lot i zastosowały bez błędu. Rozmieniały bez trudu połowę na szesnaste, trzydzieste drugie i (z własnej inicjatywy) sześćdziesiąte czwarte części, bez wahania podawały całe szeregi ułamków równych ułamkom $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ itd., a potem ułamkom $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{5}$ itd. Pozornie zatem cel został osiągnięty; upraszczanie ułamków i sprowadzanie do wspólnego mianownika w oparciu o powyższe prawidło również nie nasunęły trudności.

Czy jednak szybko opanowanej technice towarzyszyło równie jasne przyswojenie treści pojęciowej?

To właśnie zagadnienie wypłynęło w dyskusji, jako jeden z zarzutów przeciwko czysto formalnemu przebiegowi lekcji.

Prowadzący lekcję uznawał słuszność zarzutów, stwierdzając, że jedynie chęć wyczerpania tematu i płynący stąd pośpiech był przyczyną poniechania grafiki.

Wywiązała się dyskusja na temat owej grafiki. Nasunęło się w pierwszym rzędzie pytanie, czy ilustracje poszczególnych faktów z dziedziny t. zw. „zmiany postaci ułamka“ powinny być przeprowadzane wciąż na jednej i tej samej figurze, czy też na coraz to innych figurach? A dalej: jak długo grafikę ową stosować? Kiedy jej zaniechać?

Z różnych, odzywających się w tej sprawie głosów wypłynęły wnioski następujące:

Po pierwsze, figury geometryczne, służące do uzmysłowienia wartości ułamków, powinny być łatwe do kreślenia i do podziału. Ponieważ dzieci mają przeważnie zeszyty rachunkowe kratkowane, więc siłą rzeczy, jako podstawowa forma przy nauce ułamków, nasuwa się prostokąt, przyczem długość boków (liczbę kratek) należy każdorazowo obrać tak, aby podział nie przedstawiał nadmiernych trudności i nie zabierał zbyt wiele czasu. Oczywiście, figury kreślone lub przypinane na tablicy muszą (w należytej skali) odpowiadać tym, które dzieci kreślą w zeszytach.

Powtóre: każdy stwierdzony na rysunku fakt równości ułamków musi być porządnie zapisany zarówno na tablicy jak w zeszytach. Pod koniec lekcji szereg zapisów przedstawiać musi łatwe do ogarnięcia wzrokiem zestawienie, np.:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \text{ i t. d.}$$

Powyższa tabelka zostaje przez dzieci przeczytana bez komentarzy ze strony nauczyciela, a w każdym razie bez podawania prawidła o zmianie liczników i mianowników. Conajwyżej nauczyciel poleca dzieciom, aby się przyjrzały tabelce i na następnej lekcji powiedziały, co zauważyły. Jeśli ten i ów sprytny malec odrazu wyskoczy z odkryciem, tem lepiej; będzie na czem oprzeć się w dalszej pracy.

Po trzecie, metoda powyższa musi być systematycznie stosowana w ciągu paru kolejnych lekcyj ze stopniowaniem trudności; — a więc po zamianie ułamków jednostkowych następuje zamiana ułamków trudniejszych, jak $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ itd., zawsze jednak w oparciu o rysunek.

Tu przytoczyć muszę parę własnych spostrzeżeń, związanych z pracą na ten sam temat. Prowadząc osobiście z dziećmi parę lekcyj następnych po opisanej powyżej, starałam się wyciągać z dzieci wyjaśnienia, skąd np. wiedzą, że $\frac{1}{2} = \frac{16}{32}$?

Po większej części otrzymałam odpowiedzi niewystarczające, będące jedynie powtórzeniem zbyt pośpiesznie podanego prawidła. A więc $\frac{1}{2}$ i $\frac{16}{32}$ są równe „bo i licznik i mianownik powiększyliśmy 16 razy“.

Jednak były wśród dzieci takie, które nie zadowoliły się prawidłem; jedno z nich powiedziało mi: całość to jest $\frac{32}{32}$, więc pół całości musi być $\frac{16}{32}$. Ta odpowiedź całkowicie samorzutna i bardzo rozsądna poddaje myśl, że nawet bez pomocy grafiki nie musimy koniecznie powoływać się odrazu na zmianę licznika i mianownika, a raczej oprzeć się na pojęciu całości, rozmienionej na drobniejsze cząstki.

Przebieg pracy byłby wówczas np. następujący: Całość wynosi 15 piętnastych części; jedna trzecia całości wyniesie zatem 5 piętnastych (działanie 15 : 3 dziecko wykonywa pamięciowo i bez zapisu); wreszcie $\frac{2}{3}$ wyniesie 2 razy po 5 piętnastych, czyli $\frac{10}{15}$. Zapis ostateczny: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

W związku z tem nadawałyby się takie np. trochę łamigłówkowe ćwiczenia: Ile osiemnastych części „idzie" na $\frac{5}{6}$ całości? przyczem zapis zagadnienia byłby następujący: $\frac{5}{6} = \frac{?}{18}$.

(Patrz: Wójtowicz. „Arytmetyka i geometrja dla V kl. szk. powsz.", str. 145).

Oczywiście ostatni etap pracy polegać musi na sformułowaniu prawidła, przyczem pożądanem jest, aby zostało to wykonane, o ile możności, samodzielnie przez dzieci.

Po wprowadzeniu prawidła upraszczanie (skracanie) ułamków, oraz t. zw. rozszerzanie ułamków stopniowo mechanizują się. Mechanizacja ta, o ile opiera się na dobrem zrozumieniu odnośnych czynności, a więc o ile nie jest przedwczesna, szkody dzieciom nie przynosi; przeciwnie, oszczędzając czasu, przyczynia się wydatnie do sprawnego wykonywania dalszych działań: dodawania i odejmowania ułamków z różnemi mianownikami i związanego z tem sprowadzania do wspólnego mianownika.

C. *Sprowadzanie ułamków zwykłych do wspólnego mianownika.*

Lekcyj na temat dodawania i odejmowania ułamków z różnemi mianownikami w związku ze sprowadzaniem do wspólnego mianownika było na P. W. K. N. kilka i bardzo różnych co do wartości i pomysłowości.

Zanim jednak omówię kolejno trzy różne pomysły, zacząć muszę od zanotowania drobnego faktu, który na jednej z lekcyj ogromnie nauczycielowi dopomógł.

Dzieci w kl. V dodawały i odejmowały ułamki z jednakowemi mianownikami, układając same odpowiednie zadania i przykłady, przyczem jeden z uczniów miał polecone „zadać" odpowiedni przykład na tablicy, a inni zgłaszali się na ochotnika jako wykonawcy. Jeden z malców (nie wiem, czy omyłkowo, czy przez niewinną przekorę), napisał: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$

Wśród dzieci powstało zamieszanie: „On się pomylił; takich ułamków n i e m o ż n a dodać".

Byli jednak tacy (nieliczni zresztą), którzy pamiętali coś niecoś z zeszłego roku: przecie można dodać $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, więc „chyba" i to da się wykonać.

Byli inni, najbardziej przedsiębiorczy, choć nie najbardziej myślący, którzy „wykonali" przykład, dodając osobno liczniki, osobno mianowniki: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$!

Tu już oczywiście zainterwenjował nauczyciel, kreśląc na tablicy trzy równe odcinki i odwzorowując na nich (dla pośpiechu własnoręcznie, nie odwołując się do pomocy uczniów) trzy ułamki: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ oraz rzekomą sumę: $\frac{2}{7}$. Błąd stał się odrazu widoczny, bo $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ okazało się „na oko" daleko więcej, niż $\frac{2}{7}$. Jeszcze lepiej można było przekonać dzieci o tym błędzie, polecając im np. obliczyć w cm $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ oraz $\frac{2}{7}$ odcinka długości 84 cm.

Rada w radę, dzieci wraz z nauczycielem zaczęły zastanawiać się nad dwiema sprawami. Po pierwsze, czy zdarza się w życiu takie dodawanie?

Odpowiedź dzieci była natychmiastowa: oczywiście, może się zdarzyć; np. „ktoś przejdzie $\frac{1}{4}$ km, a potem $\frac{1}{3}$ km, i chce policzyć, ile razem przeszedł".

Powtóre, skoro zdarza się dodawać (a więc i odejmować) ułamki z różnemi mianownikami, to jak to zrobić?

Tu nauczyciel sięgnął do wspomnień zeszłorocznych: Gdyście dodawali $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, to zamiast $\frac{1}{2}$ pisaliście $\frac{2}{4}$, itd. Nasunęła się konieczność powtórzenia dodawania ułamków z kursu kl. IV, czemu poświęciliśmy osobną godzinę. W rezultacie dzieci doszły do cennego wniosku: ułamków z różnemi mianownikami dodawać ani odejmować niepodobna; trzeba się starać o to, aby wszystkie ułamki miały ten sam mianownik.

Tym sposobem, dzięki drobnemu incydentowi, dzieci zostały doprowadzone do jasnego sformułowania sobie zagadnienia, które przed niemi stanęło.

Oczywiście, niezawsze złoży się tak szczęśliwie, że ów chwyt metodyczny wywołany zostanie przez dzieci same; częściej musi go wywołać nauczyciel. Ale fakt ten doprowadził do ważnego wniosku metodycznego, który też w dyskusji na P. W. K. N. wyraźnie został sformułowany:

Sprowadzanie do wspólnego mianownika nie może poprzedzać dodawania i odejmowania ułamków, lecz właśnie powinno wynikać z wątpliwości, nasuwających się dzieciom przy dodawaniu i odejmowaniu ułamków z różnemi mianownikami. Najpierw zatem zagadnienie: musimy obliczyć sumę np. $\frac{1}{4}$ kg i $\frac{1}{5}$ kg pewnego towaru, a potem dopiero: jak to uczynić, skoro części czwarte i piąte są różnej wielkości, więc dodawać ich nie możemy.

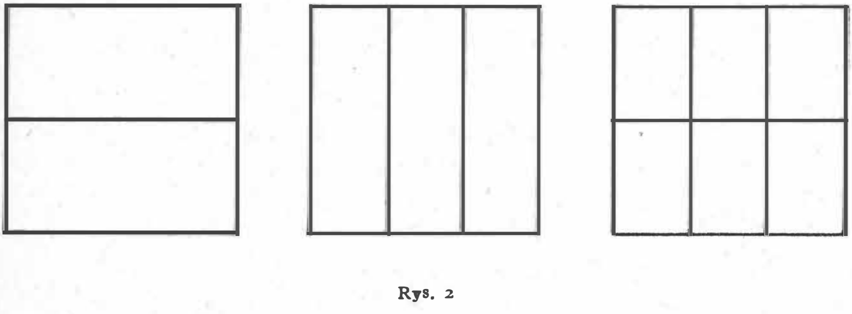
Przy takim toku pracy sprowadzanie do wspólnego mianownika staje się (zgodnie ze swą rolą w arytmetyce) czynnością pomocniczą do działania arytmetycznego, a nie samem działaniem. Że obieramy aż nazbyt często drogę odwrotną, niewłaściwą, świadczą o tem błędy popełniane przez dzieci, gdy zapytane o działanie, jakie należy wykonać w danem zadaniu, odpowiadają: trzeba sprowadzić do wspólnego mianownika.

Przystępując następnie do opracowania powyższego tematu, ustaliliśmy w dyskusji drugą jeszcze zasadę natury tym razem raczej praktycznej niż dydaktycznej:

Zakres liczbowy mianowników, dla których dzieci mają szukać wspólnej wielokrotnej, musi być bardzo ograniczony. Wniosek ten łatwo umotywować popierwsze dużemi trudnościami i stratą czasu, związaną z czynnościami pomocniczemi (rozkład na czynniki, budowanie wspólnej, choćby niekoniecznie „najmniejszej“ wielokrotnej, odpowiednie działania z licznikami itd.), powtóre bardzo nikłem zastosowaniem praktycznem ułamków zwykłych o dużych mianownikach. Program nie daje w tym względzie ścisłych wskazówek, ograniczając się do uwagi, aby w dodawaniu i odejmowaniu ułamków dobierać mianowniki takie, które łatwo się rozkładają na czynniki pierwsze. Istotnie, trudno bliżej sprecyzować tę sprawę; nauczyciel w każdym poszczególnym wypadku sam zadecyduje, czy sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika jest warte trudu, czy też lepiej poczekać, aż uczeń nauczy się zastępować ułamki zwykłe ułamkami dziesiętnemi z odpowiedniem przybliżeniem.

Pierwszą lekcję na powyższy temat w kl. V opracował jeden ze słuchaczy W. K. N. bez porozumienia się ze mną bądź ze słuchaczami Kursu. Szło mu mianowicie o zademonstrowanie pewnych pomocy szkolnych. Były to kwadraty, względnie prostokąty z przeświecającego papieru; zdaniem wielu jego kolegów jeszcze lepsze byłyby szklane, barwne.

Nauczyciel stawiał pytanie: na jakie części trzeba rozmienić np. części drugie i części trzecie, aby móc je dodać? Dla rozstrzygnięcia pytania demonstrował dzieciom dwa kwadraty równej wielkości, jeden podzielony na połowy, drugi na trzecie części, i polecał nałożyć jeden na drugi pod światło, tak, aby widoczne były obie siatki podziału. Wówczas na powierzchni kwadratu zarysowywała się nowa siatka, dzieląca kwadrat na części szóste (rys. 2).

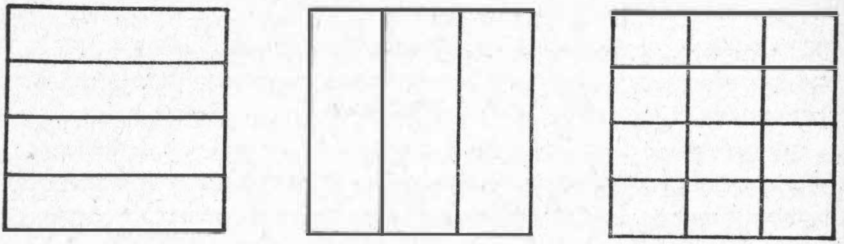


Rys. 2

Podobnie, przez nakładanie dwóch kwadratów podzielonych na części trzecie i czwarte, otrzymywało się siatkę dzielącą kwadrat na części dwunaste (rys. 3). Siatka części czwartych w połączeniu z siatką części piątych dawała siatkę części dwudziestych itd.

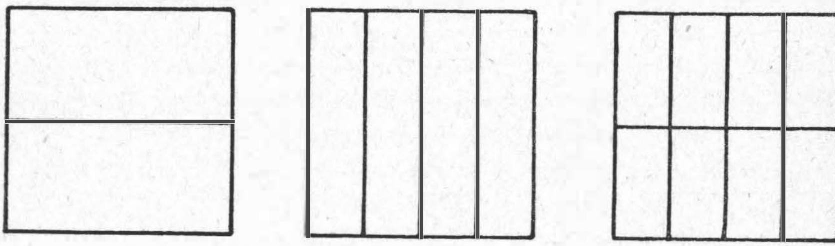
Dzieci szybko uchwyciły pomysł i wnet same zaczęły konstruować i oglądać pod światło różne siatki, „odczytując“ z nich odrazu odpowiednie wnioski, np.: „Dodając części trzecie do piątych, rozmieniamy je na piętnaste“ itd.

Zdarzały się jednak nieoczekiwane błędy. Jakiś mało pomy-



Rys. 3

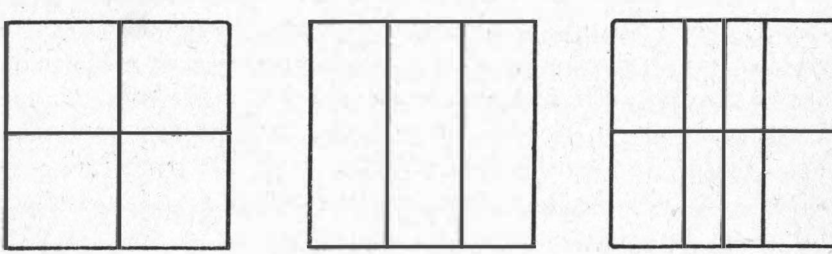
słowy malec nakrył siatkę „połówek" siatką „ćwiartek" jak na rys. 4 i wywnioskował stąd, że aby dodać $\frac{1}{2}$ do $\frac{1}{4}$ t r z e b a je rozmienić na części ósme.



Rys. 4

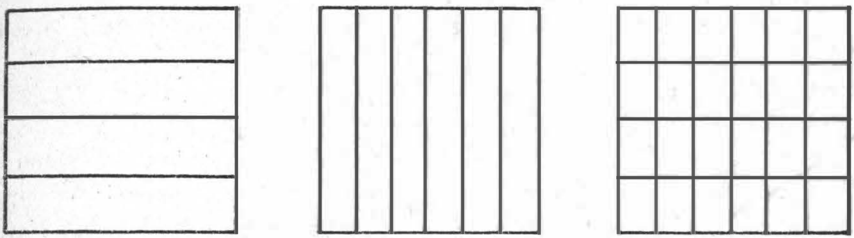
Nie popełniłby błędu, gdyby zamiast wyrazu „trzeba" użył wyrazu „można". Niemniej nauczyciel zmuszony był wniosek zdyskwalifikować, co poderwało wiarę dzieci w niezawodną skuteczność metody.

Nieraz też dzieci rysowały siatki w taki sposób, że nie mogły, nakładając jednę na drugą, otrzymać siatki, krającej cały kwadrat n a c z ę ś c i r ó w n e, np. (rys. 5).

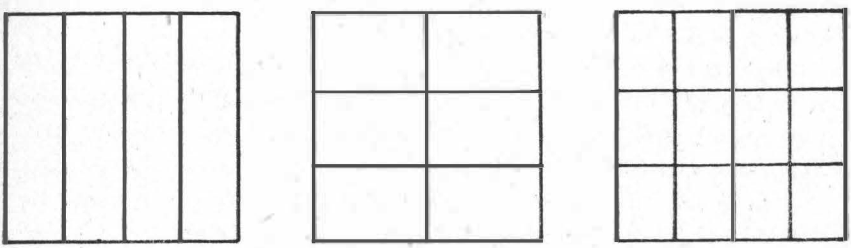


Rys. 5

W dyskusji nad lekcją błędy dzieci dostarczyły słuchaczom W. K. N. niezbitych zarzutów przeciwko powyższemu pomysłowi. W szczególności wysunęły się objekcje: po pierwsze, metoda powyższa nie jest powszechną; zawodzi w wypadkach innego nałożenia lub innej konstrukcji siatek; dalej, w wypadkach mianowników zawierających wspólne czynniki, np. części czwarte i części szóste, doprowadzić może (choć nie musi) do wykrycia mianownika zbyt wielkiego (rys. 6 a) zamiast najmniejszego (rys. 6 b); jest zatem niepraktyczna.



Rys. 6a



Rys. 6b

Wreszcie metoda owa pozwala wprawdzie dzieciom odnajdywać wspólne mianowniki „od wypadku do wypadku", lecz nie nasuwa żadnych ogólnych wniosków, nie doprowadza do syntezy. Może więc służyć, jako pomoc początkowa na pierwszych lekcjach poświęconych danemu tematowi, lub też dorywczo, jako ilustracja w poszczególnym wypadku.

W roku następnym inny nauczyciel opracował również w klasie V lekcję na ten sam temat, lecz zabrał się do niej całkiem inaczej. Nakreślił mianowicie na tablicy aż 12 równych odcinków, długości, o ile pamiętam, 60 cm. Dzieci nakreśliły to samo w zeszytach w odpowiedniej skali. Pierwszy odcinek, niepodzielony, ilustrował całość; drugi został podzielony na 2 równe części, trzeci na 3, itd., aż do ostatniego pokrajanego na 12 równych części. To samo uczyniły dzieci w swoich zeszytach.

Następnie, przesuwając linjał prostopadle do odcinków, polecał dzieciom odczytywać, ile części czwartych, szóstych, ósmych, dziesiątych, dwunastych „idzie“ na $\frac{1}{2}$? Ile części szóstych, dziewiątych, dwunastych „idzie“ na $\frac{1}{3}$? itd.

Dzieci, obserwując położenie linjału, prędko zorjentowały się, że połowy nie dadzą się rozmienić ani na trzecie, ani na piąte, siódme, dziewiąte części, że trzecie części nie rozmienią się na czwarte, ani na ósme, itd.

Ale i połowy, i trzecie części rozmienią się na szóste; i połowy, i piąte części rozmienią się na dziesiąte itd. Stąd w umyśle dzieci zaczęło zarysowywać się prawo, wynikłe z poczynionych spostrzeżeń: wspólnym mianownikiem paru ułamków jest wspólna wielokrotność ich mianowników. Oczywiście, dużo jeszcze czasu przeszło, zanim dzieci pojęły to jasno, jakkolwiek intuicyjnie dosyć prędko wpadały na właściwe odpowiedzi.

W dyskusji stawiano zarzuty co do wykorzystania grafiki. Przedewszystkiem: poco naraz aż 12 odcinków, których podział niejednokrotnie mącił dzieciom w oczach? Np. trudno było odróżnić części dwunaste od dziesiątych wobec małej różnicy w ich wielkości. Następnie odcinki ilustrujące części siódme i jedenaste były całkiem zbędne. Wreszcie czy nie byłoby słuszniej ilustrować każdy poszczególny wypadek z osobna? Mając np. dodać $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$, uczeń obrazowałby na 2 odcinkach odpowiednie ułamki, a potem zastanawiałby się nad podziałem części czwartych i szóstych tak, aby otrzymać drobniejsze, ale równe cząstki. Nietrudno byłoby mu zauważyć, że wystarczy w tym celu podzielić każdą część jednego odcinka na 3 drobniejsze kawałeczki, a każdą część drugiego na 2 takie same.

Zarzuty powyższe nauczyciel odpierał, zwracając uwagę na fakt, że graficzne przedstawianie działań „od wypadku do wypadku“ nie sprzyja powstawaniu w umyśle dzieci wniosków ogólniejszych.

Trzecia lekcja, również w kl. V, ale w innym roku szkolnym, przygotowana została przez jedną ze słuchaczek W. K. N., i do pewnego stopnia z moim udziałem. Nowość stanowi w niej to, że postanowiłyśmy spróbować, czy nie można w nauce sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika obejść się bez pomocy ilustracyj graficznych.

W ciągu lekcji, poprzedzającej właściwy temat, nauczycielka przeprowadziła z dziećmi szereg ćwiczeń następujących: Na jakie drobniejsze części dadzą się rozmienić połowy, części trzecie, czwarte, piąte itd. Dzieci odpowiadały najpierw ustnie, potem zapisywały w kolejnych rzędach:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \ldots \text{itd.}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} \ldots \text{itd.}$$

Ćwiczenia szły całkiem gładko: dzieci znały już prawo niezmiennika ułamkowego i bez trudu je stosowały.

Na następnej lekcji, mając przed sobą w zeszytach i na tablicy wynotowane powyższe szeregi, dzieci odpowiadały na pytania w rodzaju: na jakie drobniejsze części możemy rozmienić i części trzecie, i części czwarte? Dzieci nie zadawalały się jedną odpowiedzią, lecz mówiły: części trzecie i części czwarte dadzą się rozmienić na dwunaste, na dwudzieste-czwarte, na sześćdziesiąte, itd., przyczem trzeba było raczej ukrócać ich pomysłowość, aniżeli ją pobudzać. Stąd był już tylko jeden krok do zastosowania tych odkryć w dodawaniu i odejmowaniu ułamków.

W dyskusji podniesiono dwa zarzuty. Pierwszy dotyczył czysto formalnego charakteru lekcji, bez oparcia o doświadczenie dzieci; drugi — faktu, że nauczycielka pozostawiła dzieciom zbyt wielką swobodę w wyborze wspólnego mianownika, bez nacisku na n a j m n i e j s z y wspólny mianownik.

W sprawie zarzutu zbytniego formalizmu, nauczycielka przyznała, że błędem było powoływanie się odrazu na wynotowane szeregi, bez żadnej ilustracji, sprawdzającej wnioski dzieci i bez oparcia o tzw. „zadania z treścią". Natomiast drugi zarzut energicznie odparła, twierdząc nie bez racji, że ważnym jest tylko fakt znalezienia wspólnego mianownika, a niekoniecznie „najmniejszego". Reszta jest raczej kwestją wprawy. Już przytem i na tej pierwszej lekcji dzieci zaczynały wzajemnie korygować swoją pracę, np. dodając $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$, mówiły: poco bierzesz aż dwudzieste-czwarte części? Łatwiej wziąć dwunaste". Było to tem cenniejsze, że doprowadzało dzieci do wniosku: ostateczny wynik działania nie zależy od doboru wspólnego mianownika.

Pozostawał jeszcze pokaźny, ale, zdaniem całego Wyż. Kursu (nie wyłączając i mnie), dość zbędny trud poszukiwania wspólnego mianownika za pomocą rozkładu na czynniki. Ten odcinek pracy nie był specjalnie przez nas eksperymentowany, ani też szczegółowiej dyskutowany.

Tak samo niewiele dyskutowaliśmy nad dodawaniem i odejmowaniem ułamków. Przeważnie zresztą dyskusja obracała się nie dookoła pojęcia i techniki odnośnych działań, lecz dookoła doboru zadań, pozwalających na ich zastosowanie i wyćwiczenie.

6. Wprowadzenie liczb dziesiętnych.

W metodyce ułamków dziesiętnych zatrzymywaliśmy się dłużej tylko nad temi zagadnieniami, które bądź nasuwały różne możliwości, bądź też były trudniejsze do opracowania; pomijaliśmy natomiast odcinki pracy łatwe i proste, nie wzbudzające żadnych wątpliwości co do przebiegu lekcji. Dlatego też mam do zanotowania aż trzy lekcje dotyczące wprowadzenia ułamków dziesiętnych, a ani jednej dotyczącej ich dodawania i odejmowania.

Pierwszą lekcję kilka lat temu przeprowadziłam sama w klasie czwartej (według ówczesnych programów); dwie inne prowadzili słuchacze W. K. N. według nowych programów, a więc w klasach piątej i szóstej.

W lekcji swojej oparłam się wyłącznie na pojęciu układu dziesiątkowego. A więc zaczęłam od analizy kilkucyfrowych liczb całkowitych, przyczem celowo brałam liczby, złożone z jednakowych cyfr, jak 333, 4444 itd. Dzieci rozkładały każdą z nich ustnie na części składowe według rzędów, zaczynając bądź od najwyższego, bądź od najniższego rzędu. Badały następnie wartość cyfr w zależności od miejsca, dochodząc do wniosku (nienowego dla nich zresztą), że np. „trójka" stojąca na trzeciem, najwyższem miejscu (z lewej strony) jest 10 razy więcej warta, niż trójka stojąca obok po prawej stronie, a ta znów jest 10 razy więcej warta, niż trójka stojąca obok niej jeszcze bardziej na prawo itd. A więc im bardziej na prawo, tem mniejszą wartość mają jednostki poszczególnych rzędów.

Przerobiwszy pewną liczbę takich ćwiczeń, dałam do rozważenia liczbę 1111. Dzieci z moją pomocą doszły do wniosku, który podaję w ich własnem sformułowaniu: najwięcej warta jest „ta jedynka, która stoi na początku" liczby, bo oznacza aż tysiąc, następna jedynka na prawo znaczy tylko sto, więc już 10 razy mniej, trzecia znaczy tylko 10, więc jeszcze 10 razy mniej, a ostatnia znaczy najmniej, bo tylko jeden.

Zapytałam wówczas, „coby było", gdyby przy tej „ostatniej" dopisać na prawo jeszcze jedną jedynkę?

W pierwszej chwili dzieci orzekły, że tego zrobić nie można, bo „nie może być mniej niż jeden". Ale wygłosiwszy to zdanie, spostrzegły odrazu swój błąd: „A prawda, może być pół, i ćwierć, i jeszcze mniej, wogóle ułamek".

Wówczas powołałam się na spostrzeżenie uprzednie i zapytałam: jaki to ułamek ma 10 razy mniejszą wartość od całości? Oczywiście, odpowiedź była natychmiastowa: $^1/_{10}$ całości.

A więc, jeśli do liczby 1111 dopiszemy z prawej strony jeszcze jedną „jedynkę", to ile ona będzie warta?

Dzieci uznały, że właściwie „powinna znaczyć $\frac{1}{10}$", ale przecie $\frac{1}{10}$ inaczej się pisze. Przytem, gdy do liczby 1111 dopiszemy jeszcze jedną jedynkę, „to się z tego zrobi" 11 tysięcy sto jedenaście. Skąd będzie wiadomo, że ta piąta jedynka znaczy ułamek?

Uznając słuszność tych zarzutów (sformułowanych zresztą nie odrazu i nie w tak jasnej formie), wprowadziłam po naradzie z dziećmi u m o w ę: Na prawo od jedności pisać będziemy części dziesiąte, przyczem aby ich nie plątać z jednościami postawimy po jednościach przecinek. A więc liczbę 1111,1 przeczytamy: tysiąc sto jedenaście całości i jedna dziesiąta.

Sprawdziliśmy jeszcze raz, czy wszystko jest w porządku, czyli mówiąc językiem matematycznym (nie dla dzieci!), czy umowa nie zawiera sprzeczności. Istotnie, nowa jedynka na prawo od jedności miała, tak jak każda z poprzednich, 10 razy mniejszą wartość od swej sąsiadki z lewej strony, wobec czego dzieci przyjęły umowę bez sprzeciwu.

Zaraz jednak znalazło się paru spryciarzy, którzy domyślili się rozszerzyć tę umowę na dalsze rzędy: „A jeżeli napiszemy jeszcze szóstą jedynkę? A potem jeszcze jedną?"

Poprosiłam ich o cierpliwość i resztę lekcji poświęciłam pisaniu i czytaniu liczb dziesiętnych z j e d n y m t y l k o z n a k i e m p o p r z e c i n k u. Ćwiczenia nie sprawiły trudności; zawahanie, całkiem zresztą zrozumiałe, nastąpiło tylko raz jeden, gdy zażądałam, aby dzieci napisały jedną dziesiątą, tylko jedną dziesiątą, „bez całości". Musiałam wówczas rzucić tak zw. pytanie naprowadzające: ile całości mamy napisać? „Wcale, nic, zero" brzmiały odpowiedzi, i oto już dzieci uchwyciły zagadnienie, pisząc i czytając: „zero całości, przecinek, i jedna dziesiąta".

Na następnej lekcji rozszerzyliśmy naszą „umowę", przyczem dzieci prawie same doszły, jak i gdzie pisać części setne i tysiączne. Wystarczyło parę pytań w rodzaju: jaka cząstka całości jest 10 razy mniejsza od $\frac{1}{10}$, od $\frac{1}{100}$?

Ponieważ lekcję tę prowadziłam tylko wobec części słuchaczy W. K. N., więc wobec ogółu musiałam ją zreferować ustnie, stawiając równocześnie pewne punkty do dyskusji. A więc: 1) Taki przebieg pracy nie uwydatnia związku między ułamkiem zwykłym i dziesiętnym. Jak ów związek wprowadzić? Jak doprowadzić dzieci do wniosku, że ułamek dziesiętny jest tylko „szczególnym wypadkiem" ułamków znanych im poprzednio? 2) W ciągu mojej lekcji nie posługiwałam się grafiką, ani żadnemi innemi pomocami. Czy i jakie środki poglądowe tutaj się nadają?

Ponieważ zagadnienia te występowały również w dyskusjach w latach późniejszych, więc odkładam na razie tę sprawę, przechodząc z kolei do zreferowania dwóch dalszych lekcyj.

Pierwszą z nich poprowadził jeden ze słuchaczy W. K. N. w kl. VI, postanowiwszy wypróbować pomysł podany w podręczniku dla kl. VI „Matematyka" A. M. Rusieckiego i A. Zarzeckiego.

Nie znając jednak dostatecznie klasy, w której lekcję prowadził, a raczej znając ją ogólnie, jako klasę o niskim poziomie, nauczyciel musiał często cofać się do kursu kl. V. Skutkiem tego lekcja pozbawiona była ciągłości.

Po krótkiem powtórzeniu układu metrycznego miar długości, nauczyciel podyktował dzieciom kilka liczb, które zapisały w jednym szeregu na tablicy: 3 dm, 23 cm, 317 mm. Polecił następnie dzieciom pod każdą z tych liczb napisać to samo w ułamku metra, a więc: $\frac{3}{10}$ m, $\frac{23}{100}$ m, $\frac{317}{1000}$ m.

Po kilku podobnych wstępnych ćwiczeniach nauczyciel zaczął wraz z dziećmi rozważać mianowniki zapisanych ułamków, doprowadzając do wniosku, że wszystkie mianowniki składają się „z jedynki z zerami". Cofając się znowu do materjału powtórzeniowego, przypomniał dzieciom skracanie ułamków i polecił skrócić: $\frac{40}{100}$, $\frac{200}{1000}$ przez skreślanie zer w liczniku i mianowniku.

Drugi etap lekcji stanowiło zrealizowanie pomysłu podanego w podręczniku. Nauczyciel napisał na tablicy ułamek $\frac{378}{1000}$ i polecił rozłożyć ten ułamek na szereg innych, według setek, dziesiątek i jedności wchodzących w skład licznika. Dzieci napisały rozkład $\frac{378}{1000} = \frac{8}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{300}{1000}$, przyczem samorzutnie i wbrew woli nauczyciela zaczęły „od końca". Po skróceniu i przepisaniu (za poradą nauczyciela) w odwrotnym porządku otrzymały rozkład: $\frac{378}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000}$.

Po kilku takich ćwiczeniach nauczyciel przystąpił do trzeciego etapu: wprowadzenia zapisu liczb dziesiętnych na podstawie układu pozycyjnego, co zostało uskutecznione bez trudu przy pomocy tabelki:

T	S	D	I	d	s	t
7	7	7	7	7	7	7

W tym punkcie dzieci wyprzedziły nawet przewidywany tok lekcji, czytając odrazu prawą część tabelki: 777 tysiącznych, podczas gdy nauczyciel był przygotowany na przeczytanie: 7 dziesiątych, 7 setnych i 7 tysiącznych, co zresztą polecił uczynić dzieciom wraz z odpowiedniem objaśnieniem. Szło mu bowiem słusznie o ogniwo, wiążące zapis liczb dziesiętnych z rozkładem ich na szeregi ułamków, opracowanym uprzednio.

Całkiem inaczej opracowała ten temat w kl. V jedna ze słuchaczek. Oparła się ona wyłącznie na układzie miar metrycznych. Rozdawszy dzieciom paski papieru z podziałką metrową, polecała wskazywać na tej miarce 1 dm, 2 dm, 3 dm itd, przyczem dzieci odrazu mówiły i pisały: 1 dm $= \frac{1}{10}$ m, 2 dm $= \frac{2}{10}$, itd. To samo przerobione zostało z centymetrami: 1 cm $= \frac{1}{100}$ m, 3 cm $= \frac{3}{100}$ m.

Przerobiwszy pewną liczbę tych ćwiczeń, nauczycielka zestawiła szereg: metry — całości; decymetry — części dziesiąte; centymetry — części setne itd., i odrazu p o k a z a ł a dziesiętny sposób zapisywania. Nastąpiły ćwiczenia w rodzaju: jak inaczej napisać 2 m i 3 dm. Dzieci pisały: 2 m i 3 dm $= 2\frac{3}{10}$ m $= 2,3$ m.

Podobnie wprowadziła zapisywanie dziesiątych części stopnia na termometrze. Przedstawiła dzieciom rysunek termometru (w bardzo dużem powiększeniu) i poleciła odczytywać na nim i zapisywać różne wskazywane przez nią temperatury, np 5,3°.

Na dalszy ciąg zabrakło już czasu; z wyjaśnień wykonawczyni podczas dyskusji wynikało, że plan przez nią opracowany opierał się przedewszystkiem na praktycznem wdrożeniu dzieci w zapisywanie miar metrycznych, stopni temperatury, pieniędzy itd. w sposób dziesiętny.

Po każdej z lekcji zreferowanych powyżej odbywała się dyskusja z udziałem tej grupy słuchaczy W. K. N., która na danej lekcji była obecna. Ponieważ jednak wszystkie te dyskusje miały dużo punktów stycznych, zdaję sprawę ze wszystkich razem.

Dyskusje przeważnie dotyczyły punktu wyjścia, tembardziej, że na każdej z trzech lekcyj (bądź bezpośrednio znanych słuchaczom, bądź zreferowanych przeze mnie) zarysował się inny punkt wyjścia: a) nawiązanie bezpośrednie do układu pozycyjnego liczb całkowitych, b) rozkład na szeregi ułamków o mianownikach dziesiętnych, c) podejście czysto-praktyczne: wprowadzenie zapisu dziesiętnego znanych dzieciom miar i monet.

Zwolna zarysował się pogląd, że wszystkie te trzy punkty wyjścia stanowią raczej 3 kolejne etapy nauki, przyczem najłatwiejszym a więc pierwszym etapem w klasie V byłoby praktyczne zaznajomienie dzieci z zapisem dziesiętnym miar, monet itd. Drugim etapem, również w kl. V, będzie rozszerzenie układu pozycyjnego na rzędy ułamkowe, przyczem zapis poznany uprzednio w drodze praktycznej posłuży za materjał do rozważań. Trzeci etap, już w kl. VI, noszący w pewnej mierze charakter powtórzenia, służy do pogłębienia pojęcia liczby dziesiętnej, oraz porównania i zestawienia ułamków zwykłych i dziesiętnych. Ten ostatni etap, rozkład na szeregi, daje się bardzo łatwo nawiązać do następnego odcinka programu: t. zw. zamiany ułamków zwykłych na dziesiętne, czyli ściślej mówiąc, rozwinięcia ułamka zwykłego w szereg dziesiętny (skończony lub nieskończony zależnie od wypadku.)

W dyskusji często również poruszano sprawę środków poglądowych, grafiki ułamków itd. Zgadzano się zresztą na to, że owych środków poglądowych wymaga przedewszystkiem etap pierwszy.

7. Mnożenie przez ułamek zwyczajny.

Przez parę lat z rzędu na P. W. K. N. łamaliśmy sobie głowę nad opracowaniem mnożenia przez ułamek.

Zaczęliśmy od tego, żeśmy postarali się zdać sobie dokładnie sprawę z trudności, jakie nasuwa ten odcinek pracy. Wszyscy zgodnie stwierdzaliśmy, że dzieci, doskonale rozumiejące i bez wahania stosujące działania na liczbach całkowitych, załamują się z chwilą, gdy na warsztacie znajdzie się ułamek jako mnożnik; że nauczyciel w chwili wprowadzenia tego działania często traci grunt pod nogami; że wyniki nauczania w tym punkcie programu są przeważnie niewystarczające. Dlaczego?

W szeregu dyskusyj doszliśmy do sformułowania pewnych wniosków: Przedewszystkiem dziecko przywykło rozumieć pod wyrazem „mnożenie" takie działanie, które może być zastąpione przez dodawanie, np.: $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$ lub $3 + 3 + 3 + 3$.

Cóż zatem znaczy mnożenie przez $\frac{1}{2}$, które oczywiście nie da się transponować na dodawanie?

Powtóre, mnożyć np. przez 3 znaczy w umyśle dziecka „powiększyć 3 razy", względnie „wziąć 3 razy", „powtórzyć 3 razy". Tymczasem mnożyć przez $\frac{1}{2}$ to wcale nie znaczy ani „powiększyć", bo iloczyn jest w tym wypadku właśnie mniejszy od mnożnej, ani też „powtórzyć $\frac{1}{2}$ raza", bowiem wyrażenie „$\frac{1}{2}$ raza" nie ma sensu.

Wreszcie, w zastosowaniu do życia praktycznego, jeśli już mnożenie przez liczbę całkowitą było w oczach dziecka tylko dogodnym skrótem, bez którego od biedy możnaby się obejść, to mnożenie przez liczbę ułamkową robi często na niem wrażenie również tylko skrótu, i to skrótu niewygodnego. Poco mnożyć przez ułamek $\frac{3}{4}$, jeśli daleko łatwiej osobno podzielić przez 4, a osobno pomnożyć przez 3? Występuje tu w całej pełni owa „niepotrzebność“ ułamków zwykłych, o której już mówiliśmy parokrotnie.

Ostatecznie stwierdziliśmy: mnożenie przez ułamek jest to w oczach dziecka działanie całkiem nowe, niemające nic wspólnego z dotychczasowem mnożeniem; jedną z trudności jest właśnie doczepienie dawnego terminu „mnożenie“, mającego swoistą treść pojęciową, do pojęcia zupełnie innego, a nawet częstokroć sprzecznego z dotychczasowem.

Tak uzbrojeni postanowiliśmy po pierwsze, wyszukać takie zagadnienia z życia praktycznego, któreby doprowadzały do mnożenia ułamków; powtóre, nie narzucać dziecku terminu „mnożenie“, dopóki termin ów nie pojawi się samorzutnie w toku pracy.

Nauczyciel, który po bardzo gruntownem i starannem przygotowaniu podjął się przeprowadzenia eksperymentu, zaczął od żywej pogadanki na temat mnożenia, polecając układać zadania „na mnożenie“ i analizując je wraz z dziećmi. Parokrotnie dzieci użyły wyrażenia „2 razy, 3 razy“.

Wówczas nauczyciel postawił zagadnienie: co znaczy „pomnożyć przez $\frac{1}{2}$? Odpowiedź brzmiała, jakeśmy się tego spodziewali, że „to znaczy wziąć $\frac{1}{2}$ raza“. Rozwinęła się na ten temat „dyskusja“ z dziećmi. Nauczyciel polecał im podskoczyć 2, 3, 4 razy, klasnąć w dłonie 2, 3, 4 razy. To było łatwe.

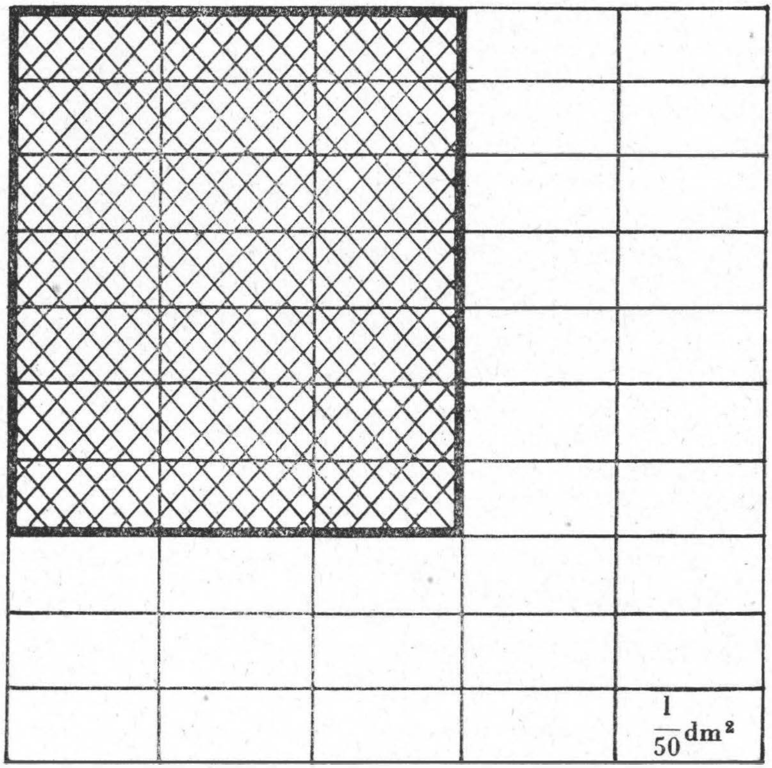
Ale polecenie „podskocz $\frac{1}{2}$ raza“ wywołało kłopot. Niektórzy malcy uważali, że skoczyć $\frac{1}{2}$ raza to będzie „na jednej nodze“, albo „niziutko nad samą podłogą“. Inni jednak, bardziej logiczni, protestowali: „Czy skoczysz na jednej nodze, czy na dwóch, czy wysoko, czy nisko, to zawsze skoczysz tylko raz, albo 2 razy, ale nie pół raza“. To samo było z klaskaniem w ręce. Stąd same dzieci orzekły, że niemożna „nic robić pół raza“.

A więc mnożenie przez pół znaczy coś innego. Co mianowicie? Nauczyciel narazie pozostawił tę kwestję otwartą: „Dowiecie się później“.

Na następnej lekcji jednak zajął dzieci czem innem: obliczaniem pól prostokątów.

Przypomniawszy pokrótce obliczanie pól prostokątów o wymiarach całkowitych, zaczął następnie obliczać z dziećmi pola prostokątów o wymiarach ułamkowych w sposób następujący:

Na kratkowanym papierze dzieci kreśliły decymetr kwadratowy, następnie zaś wydzielały z niego prostokąt o wymiarach np. $\frac{7}{10}$ dm na $\frac{3}{5}$ dm. Dzieląc następnie cały kwadrat wzdłuż i wszerz na prostokąciki (rys. 7) odpowiadające podziałowi boków, obliczały



Rys. 7

najpierw jaką częścią dm² jest jeden taki prostokącik, zapisując to wewnątrz narożnego prostokącika, a następnie na zasadzie liczby tych części, jakiej wielkości jest pole całego wydzielonego prostokąta.

Tu np. obliczały: Jeden prostokącik stanowi $\frac{1}{50}$ całego dm², a prostokąt, o który nam idzie, ma 21 takich kawałeczków, więc stanowi $\frac{21}{50}$ dm².

Wynik zapisały w sposób następujący:

Długość	Szerokość	Pole
$\frac{7}{10}$ dm	$\frac{3}{5}$ dm	$\frac{21}{50}$ dm²

Wykonawszy kilka takich doświadczeń otrzymały tabelkę następującą:

Dł. (w dm)	Szer. (w dm)	Pole (w dm²)
$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{21}{50}$
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{40}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{32}$ itd.

Wówczas otrzymały polecenie uważnego przyjrzenia się tej tabelce. Nie upłynęła minuta, gdy spostrzegły łatwy związek między liczbami i orzekły, że już bez rysunku podejmują się znaleźć pole każdego prostokąta: „Trzeba tylko pomnożyć licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik".

Teraz nastąpiła dyskusja, jak zapisać działanie, które należy w tym celu wykonać? Jaki znak postawić między liczbami, wyrażającemi długość i szerokość prostokąta? Niektóre dzieci proponowały nazwać tę robotę mnożeniem, „bo przecie gdy szukamy pole prostokąta, to mnożymy długość przez szerokość". Ale były też protesty; dzieciom nie wydawało się to całkiem podobne do mnożenia. Za poradą nauczyciela nazwały nieznane działanie „niby-mnożeniem" i umyśliły oznaczać je krzyżykiem z kropką nad nim.

Druga serja zadań opierała się na znajdowaniu części danej całości, a więc na zagadnieniu dość powszechnie branem za punkt wyjścia w mnożeniu ułamków. A więc np.: Kupiono $\frac{3}{4}$ kg soli po $\frac{9}{25}$ zł za 1 kg. Ile się za to należy? Dzieci obliczały bez wielkiego trudu, ile się należy za $\frac{1}{4}$ kg, następnie ile się należy za $\frac{3}{4}$ kg. Ostatecznie po szeregu podobnych zagadnień otrzymały znowu tabelkę:

Cena 1 kg	Ilość tow.	Należność
$\frac{9}{25}$ zł	$\frac{3}{4}$ kg	$\frac{27}{100}$ zł
$\frac{7}{10}$ zł	$\frac{2}{5}$ kg	$\frac{14}{50}$ zł itd.

Tu już orzekły bez pytania, że to jest również „niby-mnożenie“, a stąd miały łatwą drogę do dalszych zastosowań.

Cały ten cykl lekcyj prowadzony był przez jednego nauczyciela. Jak się w następstwie okazało, próba naogół była bardzo udana; zauważyliśmy w niej jednak pewne niedociągnięcia, których można było uniknąć.

Całkowicie niepotrzebnem okazało się między innemi wprowadzenie terminu: „niby-mnożenie“, oraz znaku: krzyżyka z kropką, które to inowacje później raczej zawadzały, niż wyjaśniały sprawę, a ostatecznie musiały być wycofane. Okazuje się, że o wiele prostszą rzeczą było uchwycić moment intuicji dziecięcej, która nasunęła im właściwy termin, a równocześnie podkreślić mocno i zaświeża różnicę między mnożeniem ułamków, a mnożeniem liczb całkowitych. W szczególności wielokrotnie na łatwych przykładach wskazywać zasadniczy stosunek pomiędzy mnożną a iloczynem: Iloczyn stanowi połowę, trzecią część mnożnej; dlaczego? Bośmy ją pomnożyli przez pół, przez $\frac{1}{3}$ itd. A stąd odwrotnie: jeśli chcemy otrzymać połowę całości, mnożymy ją przez $\frac{1}{2}$ itd.

Pewnem wykroczeniem przeciwko zasadzie stopniowania trudności był porządek pracy: nauczyciel wprowadził najpierw mnożenie dwóch liczb ułamkowych, a potem dopiero powrócił do mnożenia liczby całkowitej przez ułamek. Uczynił to jednak celowo, aby uwydatnić lepiej technikę mnożenia ułamków (licznik przez licznik, mianownik przez mianownik). Również z myślą o tym celu nauczyciel w początkowych cyklach zagadnień dobierał czynniki, których iloczyn był ułamkiem nieskracalnym. To przestawienie porządku pracy zemściło się o tyle, że chcąc przy mnożeniu liczby całkowitej przez ułamek nawiązać do pracy poprzedniej, nauczyciel uciekał się do przedstawiania liczby całkowitej w postaci ułamka o mianowniku „jeden“, co jest niewątpliwie rzeczą sztuczną i ogólnie zbędną.

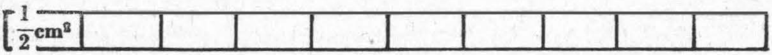
Wykorzystując nabyte doświadczenie, po paru latach powtórzyliśmy ten sam eksperyment z drobnemi uzupełnieniami. A więc przy obliczaniu pól prostokątów ustaliliśmy porządek następujący:

a) pole prostokąta o obu wymiarach wyrażonych w liczbach całkowitych;

b) pole prostokąta o jednym wymiarze ułamkowym, drugim całkowitym;

c) pole prostokąta o obu wymiarach ułamkowych.

Punkt a) był tylko powtórzeniem odcinka pracy z kursu kl. V i nie nasunął trudności. W punkcie b) wysunęły się ciekawe spostrzeżenia. Oto dzieci, niezależnie od faktu, w jakim porządku podyktowano im czynniki, dla obliczania pola bez żadnego wahania posługiwały się mnożeniem, ale zawsze traktowały liczbę całkowitą jako mnożnik, sprowadzając całą robotę do uwielokrotniania ułamka. Tak np., gdy miały obliczyć pole prostokąta o wymiarach 10 cm na $\frac{1}{2}$ cm, obliczały 10 razy po $\frac{1}{2}$ cm^2, pisząc prawidłowo $10 \times \frac{1}{2} = 5$ cm^2, a pomagając sobie rysunkiem (rys. 8).



Rys. 8

Podobnie postępowały, gdy jeden z wymiarów był liczbą mieszaną, np. 6 cm na $2\frac{1}{4}$ cm. Pisały wówczas: $6 \times 2\frac{1}{4}$, a obliczały na zasadzie prawa rozdzielności: „6 razy po 2 cm^2, i 6 razy po $\frac{1}{4}$ cm^2 — razem..." Czasem (za poradą nauczyciela) włączały liczbę $2\frac{1}{4}$ w ułamek niewłaściwy i obliczały 6 razy po $\frac{9}{4}$. W każdym razie jednak jako mnożnik występowała liczba 6.

Stąd nasuwa się wniosek, że obliczanie pola prostokąta o jednym z wymiarów ułamkowym, a drugim całkowitym, nie wdraża jeszcze dzieci w mnożenie przez ułamek, ani nawet nie nasuwa im (a przynajmniej bardzo rzadko) tej czynności, jako nowego zagadnienia.

Dopiero zatem punkt c), tj. obliczanie pola prostokąta w wypadku obu wymiarów ułamkowych, jest postawieniem zagadnienia: jak mnożyć przez ułamek.

Przebiegu tego trzeciego punktu nie opisuję, zaznaczając jedynie, czem się różnił od pierwszej próby z przed paru lat. A więc: nie przeszkadzaliśmy dzieciom odrazu wprowadzić zapisu i znaku mnożenia, eliminując tylko w czytaniu błędny, a nawet szkodliwy w tym wypadku wyraz „razy“. A więc zapis $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ dzieci czytały: mnożę $\frac{3}{4}$ przez $\frac{2}{5}$ (lub odwrotnie $\frac{2}{5}$ przez $\frac{3}{4}$).

Drugi etap pracy nad mnożeniem ułamków, oparty na pojęciu znajdowania części na zasadzie całości, stanowił początkowo również powtórzenie materjału z lat poprzednich.

Zaczęliśmy bowiem z dziećmi od stereotypowego zapisu:

1 kg cukru kosztuje 125 groszy (według ceny ówczesnej)

to $\frac{1}{5}$ kg	$125 : 5 = 25$ gr
a $\frac{2}{5}$ kg	$25 \,.\, 2 = 50$ gr.

Następnie wprowadziliśmy zapis krótszy: $\frac{2}{5}$ kg cukru po 125 gr kosztują $\frac{2}{5}$ z e 125 gr.

Ów przyimek „z“ zbędny i błędny językowo, wprowadzony został przez nauczyciela „dla jasności zapisu“ (aby uniknąć pisania $\frac{2}{5}$ 125), potem zaś za jego poradą zastąpiony przez znak mnożenia: kropkę. Znak ten zatem został poniekąd dzieciom narzucony, przyczem dotyczy to t y l k o z n a k u, a nie działania; bowiem dzieci po dawnemu czytały: $\frac{2}{5}$ (czego?) 125 groszy, dokonywując obliczenia w pamięci.

Nastąpił szereg zadań takich, w których trzeba było obliczać ułamek ułamka, np. $\frac{2}{5}$ „z“ $\frac{3}{4}$ zł, przy zapisie $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$ zł.

Po zestawieniu tabelki (jak w pierwszej próbie) np.:

cena 1 kg	ilość	wartość
$\frac{3}{4}$ zł	$\frac{2}{5}$ kg	$\frac{6}{20}$ zł itd.

dzieci spostrzegły łatwo zgodność wyników z otrzymanemi poprzednio podczas obliczania pól, a wówczas ów narzucony znak mnożenia otrzymał uzasadnienie. Być może zresztą, iż pod względem psychologicznym lepiej było nie narzucać zawcześnie znaku działania, lecz doczekać chwili, gdy dzieci z zestawionych tabelek same znak wyprowadzą, jak to uczyniły w wypadku obliczania pól prostokątów.

Ostatecznie z całego przebiegu naszych prób, oraz z towarzyszących im dyskusyj wyłoniły się następujące, bynajmniej zresztą nie „murowane“ wnioski:

1) Obliczanie pól prostokątów jest jednym z lepszych punktów wyjścia w nauce mnożenia przez ułamek, bowiem najbardziej bezpośrednio nasuwa dzieciom zarówno nazwę i znak działania, jak i spostrzeżenia dotyczące jego techniki.

2) Jako etap drugi, zasadniczy, wystąpić powinno znajdowanie części na zasadzie danej całości, przyczem, pisząc mnożnik na pierwszem miejscu, dzieci mają ułatwioną drogę do prawidłowego czytania zapisu; np. $\frac{3}{4} \cdot 60$ czytają: „trzy czwarte sześćdziesięciu“.

3) Dopiero po opanowaniu zarówno pojęciowem, jak technicznem mnożenia ułamków możemy wprowadzić na porządek dzienny sprawę tak zw. „praw formalnych“ tego działania, oczywiście bardzo ostrożnie i jedynie w poszczególnych wypadkach. Np. dajemy uczniowi do rozwiązania dwa odrębne zadania:

a) Obliczyć koszt $\frac{3}{4}$ m kortu po 16 zł za metr, przyczem rozwiązanie wystąpi w postaci zapisu:

$$\frac{3}{4} \cdot 16 = 12 \text{ zł.}$$

b) Obliczyć koszt 16 kg kaszy po $\frac{3}{4}$ zł za kilo; zapis:

$$16 \cdot \frac{3}{4} = 12 \text{ zł.}$$

Stąd wniosek: $\frac{3}{4}$ liczby 16 jest tyle co i 16 razy po $\frac{3}{4}$, oraz (po paru takich próbach) ostrożne uogólnienie: widocznie w mnożeniu ułamków *możemy także przestawiać czynniki.*

Podobnie, na przykładach i zadaniach, czysto praktycznie, wprowadzamy prawo rozdzielności mnożenia ułamków względem dodawania lub odejmowania.

Uproszczenia techniczne w rodzaju skracania ułamków w trakcie mnożenia wprowadzamy później, dopiero wtedy, gdy możemy być pewni, że treść pojęciowa została należycie zrozumiana i przyswojona.

8. Dzielenie przez ułamek zwyczajny.

Jeśli mnożenie przez ułamek jest jednym z trudniejszych odcinków pracy zarówno dla nauczyciela jak i dla ucznia, to śmiało rzec można, że dzielenie przez ułamek jest nie „jednym z najtrudniejszych", lecz wyraźnie najtrudniejszym do zrealizowania punktem programu klasy VI.

Spróbujmy trudności te należycie sobie uświadomić.

Przedewszystkiem dotychczas pojęcie dzielenia związane było u dziecka z pojęciem części, a więc czegoś mniejszego od całości. Z chwilą wprowadzenia dzielenia przez ułamek właściwy pojęcie to ulega nagłemu zaprzeczeniu, co w umyśle dziecka wywołuje zrozumiały całkiem chaos i dezorjentację. Zachodzi tu proces analogiczny do tego, jaki zaobserwowaliśmy poprzednio przy nauce mnożenia przez ułamek, gdzie dziecko również zmuszone było zerwać dość nagle z urobionem dotychczas pojęciem mnożenia jako zwiększania.

Powtóre, technika dzielenia przez ułamek, łącząca w jedną całość dwa działania: dzielenie przez licznik i mnożenie przez mianownik łatwo bardzo myli się w pamięci dziecka z techniką mnożenia przez ułamek, w rezultacie czego powstaje zgadywanie, przez którą z dwu danych liczb należy dzielną pomnożyć, a przez którą podzielić.

Gdy jeszcze na dodatek stwierdzimy, że treść zagadnień rzadko kiedy narzuca myśli dziecka konieczność dzielenia przez ułamek, będziemy musieli przyznać, że sprawne i pewne posługiwanie się dzieleniem ułamków wymaga zrozumienia zależności matematycznych w wyższym stopniu, niż tego od przeciętnego ucznia kl. VI spodziewać się możemy.

Niemniej w programie punkt ten znajdować się musi, a więc i my uporać się z nim musimy.

W dyskusjach na P. W. K. N. w ciągu paru lat z rzędu wysunął się cały szereg pomysłów, które częściowo próbowaliśmy zrealizować w naszej szkole ćwiczeń. Opisuję cztery z pośród dokonanych prób, nie uważając jednak żadnej za definitywnie przesądzoną w sensie dodatnim, a notując jedynie wyniki, jakie zdołaliśmy osiągnąć, oraz ciekawsze momenty dyskusyj.

W pierwszym wypadku nauczyciel oparł się na czysto formalnym związku między dzielnikiem a ilorazem przy stałej dzielnej: ile razy dzielnik maleje, tyle razy iloraz wzrasta.

Sprawdziwszy słuszność tego prawa na kilku przykładach dzielenia liczb całkowitych, nauczyciel zabrał się następnie do wykonywania wraz z dziećmi szeregu przykładów, w których stałą dzielną (o ile pamiętam, była nią liczba 4) polecał kolejno dzielić przez 8, przez 4, przez 2, przez jeden, a dalej przez $\frac{1}{2}$, przez $\frac{1}{4}$, przez $\frac{1}{8}$. Dzieci pisały ilorazy nie na zasadzie dokonanych obliczeń, lecz na zasadzie stosunku nowego dzielnika do poprzedniego, mówiąc np.: Gdyśmy 4 podzielili przez 1, otrzymaliśmy iloraz 4, więc jeśli podzielimy przez $\frac{1}{2}$, musimy otrzymać 2 razy tyle, czyli 8. Następowało sprawdzenie słuszności ilorazu zapomocą mnożenia.

Po przerobieniu kilku takich szeregów, w których dzielna była liczbą stałą, a dzielnik stopniowo 2, 3, 4 razy zmniejszany, dzieci spostrzegły po pierwsze, że dzielenie przez $\frac{1}{2}$, przez $\frac{1}{3}$, przez $\frac{1}{4}$ da się zastąpić mnożeniem przez 2, przez 3, przez 4, wogóle przez mianownik danego (jednostkowego) ułamka; po drugie, że dzieląc przez liczbę mniejszą od jedności, otrzymują iloraz większy od dzielnej.

Tym sposobem uczyniony został pierwszy wyłom w poglądach dziecka na dzielenie jako na działanie, z którego jakoby wynika „mniej, niż było na początku“.

Należało teraz od ułamka jednostkowego przejść do ułamka o liczniku dowolnym.

Tu zaczęły piętrzyć się trudności. Dzieci z trudem chwytały tę napozór oczywistą prawdę, że np. $\frac{3}{4}$ jest 4 razy mniej niż 3, i każdorazowo nauczyciel musiał im to w świadomości wywoływać i utrwalać. Co za tem idzie, nie umiały odrazu odpowiedzieć na pytania: Ile razy dzielnik zmalał? Ile razy iloraz wzrośnie? A stąd dość daleko było jeszcze do pożądanego wniosku, że np. podzielić dzielną przez $\frac{3}{4}$ znaczy to samo, co podzielić ją przez 3, a otrzymany iloraz powiększyć 4 razy.

W dyskusji nad tą lekcją wysunęły się na plan pierwszy trudności, związane z dalszym ciągiem pracy. Stwierdziliśmy, że nauczenie dzieci techniki obliczania ilorazu przy podziale przez ułamek nie jest jeszcze jednoznaczne ze zrozumieniem działania. Powyżej przedstawiony tok pracy, nieoparty na osobistem doświadczeniu dziecka, lecz jedynie na związkach natury formalnej, nie nasuwał zastosowań w praktyce. Koniecznem było więc opracowanie z kolei drugiej strony zagadnienia: do czego owo dzielenie miało służyć, na co mogło się przydać? Ta zaś sprawa wymagała zupełnie innego podejścia, od strony życiowej, praktycznej.

Tę próbę zatem, choć opracowaną bardzo starannie, osądzić musieliśmy jako nieudaną, a w każdym razie połowiczną. Należy jeszcze przytem podkreślić wątpliwość natury naukowej: czy nauczyciel miał prawo związki, dotyczące działań na liczbach całkowitych, rozciągać na całkiem nowe i nieznane jeszcze działanie w innym zakresie liczbowym? Wszak liczby ułamkowe mogą mieć inne własności niż liczby naturalne i bezkrytyczne stosowanie do nich tych samych praw formalnych może doprowadzić do poważnych błędów, które zlekceważone w nauce początkowej mszczą się w nauce dalszej bardzo dotkliwie.

Druga próba, którą również uznaliśmy za chybioną, była oparta na podstawach całkiem słusznych pod względem naukowym, lecz zbyt mało uwzględniających psychikę i sprawność logiczną dziecka.

Nauczyciel wyszedł mianowicie z definicji dzielenia, jako działania odwrotnego do mnożenia i oparł cały tok pracy na pytaniu: przez jaką liczbę należy pomnożyć dzielnik, aby otrzymać dzielną.

Początkowy etap pracy, ilustrowany łatwemi zagadnieniami praktycznemi, poszedł jak po maśle. Na pytanie, przez jaką liczbę należy pomnożyć $\frac{1}{10}$, aby otrzymać 1, dzieci bez wahania odpowiadały: przez 10; zwłaszcza gdy pytanie to wynikało z zagadnienia: przez ile minut należy przebywać po $\frac{1}{10}$ km na minutę, aby przejść cały kilometr.

Trudniej już nieco poszło z odpowiedzią, gdy dzielną była nie liczba 1, lecz dowolna liczba całkowita, dzielnikiem zaś w dalszym ciągu ułamek jednostkowy; np. przez co należy pomnożyć $\frac{1}{5}$, aby otrzymać 3. Ale i to poszło względnie gładko; dzieci liczyły w sposób następujący: 3 całości $= \frac{15}{5}$, więc aby otrzymać 3 całości, trzeba $\frac{1}{5}$ powtórzyć 15 razy.

Trzeci etap pracy, gdy dzielną była dowolna liczba całkowita, a dzielnikiem ułamek o dowolnym liczniku, nasuwał już dużo trudności. Na pytanie, przez co należy pomnożyć $\frac{2}{5}$, aby otrzymać liczbę 3, dzieci radziły sobie szeregiem prób, dodając np. $\frac{2}{5}$ kilkakrotnie, i sprawdzając, ile jeszcze brakuje do 3, albo — co nie było pozbawione słuszności — rozmieniając liczbę 3 na części piąte i licząc, ile razy należy powtórzyć liczbę 2, aby otrzymać 15. Dzieliły zatem poprostu licznik dzielnej przez licznik dzielnika. Odpowiedź była nieraz trafna, lecz odnaleziona drogą całkiem inną, niż pragnął nauczyciel.

Całkiem tragicznie poszło ze znajdowaniem ilorazu, gdy i dzielna i dzielnik były liczbami ułamkowemi. Istotnie, odpowiedź na pytanie, przez co należy pomnożyć liczbę $\frac{2}{3}$, aby otrzymać $\frac{4}{5}$, nie jest wcale oczywista, nie narzuca się wyobraźni, i nawet nikt z nas nie da na to pytanie odpowiedzi, o ile uprzednio nie wykona dzielenia $\frac{4}{5}$ przez $\frac{2}{3}$. Jakże zatem mogły dać sobie z tem radę dzieci, nie znające jeszcze techniki dzielenia? Tu zatem próba zawiodła; nauczyciel zmuszony był jąć się innej drogi: n a r z u c i ć dzieciom technikę dzielenia, a potem dopiero otrzymany tą drogą iloraz sprawdzać przez mnożenie. Było to żmudne, powikłane i dla dzieci nieprzekonywujące, bowiem choćby nawet nauczyły się stąd, j a k się dzieli $\frac{4}{5}$ przez $\frac{2}{3}$, nie rozumiały jednak w dalszym ciągu, k i e d y to dzielenie trzeba zastosować.

Stwierdziwszy, dzięki dwom powyżej zreferowanym próbom, że, jak to zresztą było do przewidzenia, pojęcie dzielenia przez ułamek nie daje się wytworzyć w umyśle dziecka na drodze formalnych związków mnożenia z dzieleniem, postanowiliśmy w następnych latach oprzeć ten punkt programu jedynie na praktycznem zastosowaniu.

Z dyskusji nad zagadnieniami, które w życiu mogą doprowadzić do dzielenia przez ułamek, wysunęły się dwie grupy zadań, odpowiadające dwojakiemu pojęciu dzielenia: 1) znajdowanie całości na zasadzie części, oraz 2) wymierzanie danej liczby przez ułamek. Mając możność któregoś z lat ubiegłych równoczesnego przeprowadzenia prób na dwóch grupach dzieci, postanowiliśmy zacząć od znajdowania całości na zasadzie części.

Nauczyciel, prowadzący lekcję, wziął się do niej w sposób bardzo dowcipny. Przyniósł mianowicie rachunek sklepikarza dla kogoś, kto brał ze sklepu towary na kredyt. Rachunek był napisany w sposób prymitywny, praktykowany zazwyczaj w małych sklepikach:

3 jajka	30 gr
4 bułki	20 gr
2 litry mleka	70 gr
$\frac{1}{2}$ kg chleba	16 gr
$\frac{1}{4}$ kg cukru	35 gr itd.

(Ceny z r. 1930—32).

Pod rachunkiem widniała suma należności z całego tygodnia. Szło o to, aby rachunek ten sprawdzić i napisać w formie poprawnej.

Dzieci odrazu zauważyły, że w rachunku tym brak pewnych rubryk: liczb porządkowych pozycyj, dat, a co najważniejsze cen poszczególnych towarów. Zaczęły więc od porubrykowania kartki w zeszytach i wpisania liczb podanych w odpowiednie rubryki. Nauczyciel wykonał to samo na tablicy.

L. p.	Dn.	Ilość towaru	Cena	Należność
1	1	3 jaja		30 gr.
2	„	4 bułki		20 „
— —	— —	— — — —	— — —	— — — —

Rubrykę p. n. „Cena“ należało dopiero wypełnić. Stąd wynikła konieczność obliczania cen.

Dzieci każdorazowo obliczały cenę najpierw w pamięci, następnie zapisywały działanie i wynik. Odrazu z paru pierwszych pozycyj rachunku wywnioskowały, że chcąc obliczyć cenę jednostki (litra, kilograma), muszą p o d z i e l i ć należność za towar przez ilość towaru. Zawahały się jednak, czy wniosek ten jest słuszny i wówczas, gdy ilość towaru wyraża się ułamkiem, jak to zachodzi np. w czwartej pozycji: $\frac{1}{2}$ kg chleba za 16 gr. Na propozycję nauczyciela „zgodziły się" i w tym wypadku zachować przyjęty sposób zapisywania, notując przytem jednak, co to znaczy, a więc

$$16 : \frac{1}{2} = 16 . 2 = 32 \text{ gr.}$$

Tu nauczyciel może niepotrzebnie, a w każdym razie cokolwiek zbyt pospiesznie, poradził, aby wprowadziły jeszcze jedną poprawkę, zapisując, zamiast 16 . 2 w ten sposób: $16 . \frac{2}{1}$, „bo przecie wyniku to nie zmieni". To narzucenie zapisu miało jednak niespodziewanie doniosły skutek; dzieci bowiem odrazu orzekły, że tym sposobem cały ułamek „odwrócił się do góry nogami". Stąd już zarysowało się w umysłach dzieci prawidło dzielenia przez ułamek, które po szeregu obliczeń związanych z dalszemi pozycjami rachunku zostało bez nadmiernego „ciągnienia za język" ujęte w dość poprawną formę.

Podobną metodę wprowadził inny kolega na którejś z lekcyj następnych, przerabiając z dziećmi tabelkę następującą:

	Droga w km.	Czas w godz.	Średnia szybkość w km/godz.
Samolot	720	4	720 : 4 =
pociąg os.	14	$\frac{2}{5}$	$14 : \frac{2}{5} =$ itd.
„ posp.	8	$\frac{2}{15}$	
Rower	2	$\frac{1}{6}$	
Statek	9	$\frac{3}{5}$	
Koń	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	
Człowiek	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	
Gołąb	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{60}$	

Dzieci, obliczając średnią szybkość, notowały z boku działanie i dokonywały obliczeń, przyczem odrazu oparły się na pierwszym od góry wypadku, jako na wzorze, który zastosowały i w dalszych wypadkach. Dzielenie przez ułamek zostało zatem tutaj (jak zresztą i w poprzedniej serji zadań) wprowadzone przez analogję.

Z techniką dzielenia poszło stosunkowo łatwo, gdyż dzieciom spodobało się i dobrze w pamięci utkwiło owo odwrócenie dzielnika „do góry nogami". Oczywiście, otrzymane w ten sposób wyniki podlegały każdorazowemu sprawdzeniu w drodze rachunku pamięciowego. A więc np. obliczając średnią prędkość pociągu pospiesznego, dzieci pisały:

$$8 : \frac{2}{15} = 8 \,.\, \frac{15}{2} = \frac{8.15}{2} = 60 \text{ km}$$

a następnie sprawdzały ustnie: W ciągu $\frac{2}{15}$ godziny pociąg przebywa 8 km, to w ciągu $\frac{1}{15}$ godz. dwa razy mniej, czyli 4 km, a w całą godzinę 15 razy tyle, czyli 60 km. „Zgadza się!" dodawały dzieci.

Druga próba, przeprowadzona na innej grupie dzieci i oparta na pojęciu t. zw. „mieszczenia", ściślej mówiąc, wymierzania liczby ułamkiem, miała przebieg następujący:

Nauczycielka przygotowała sobie jeden dłuższy sześciodecymetrowy pasek papieru i kilka krótszych, długości 3 dm, 2 dm, 1 dm, $\frac{1}{2}$ dm i $\frac{1}{4}$ dm. Dzieci wymierzały przypięty na tablicy dłuższy pasek coraz mniejszemi, zapisując kolejno:

$$6 : 3 = 2$$
$$6 : 2 = 3 \text{ itd.}$$

aż do $6 : \frac{1}{4} = 24$.

Następnie badały dzielnik i iloraz i zauważyły, że gdy dzielnik jest większy od jedności, iloraz jest mniejszy od dzielnej; gdy dzielnik równa się jedności, iloraz równa się dzielnej, ale gdy dzielnik jest ułamkiem (oczywiście właściwym), iloraz jest większy od dzielnej.

To spostrzeżenie nasunęło im zaraz pomysł, że zamiast dzielić przez $\frac{1}{2}$, można mnożyć przez 2, zamiast dzielić przez $\frac{1}{4}$ — mnożyć przez 4.

Z kolei, już bez pomocy papierowych pasków obliczały i zapisywały, ile razy w pewnej całkowitej liczbie metrów pomieści się $\frac{1}{5}$ m, $\frac{1}{10}$ m itd. Nauczyły się zatem bez trudu dzielić liczbę całkowitą przez ułamek jednostkowy.

Nauczycielka przeszła następnie do wymierzania liczby całkowitej przez ułamek dowolny. Za punkt wyjścia posłużyło zadanie: ile paczek po $\frac{3}{4}$ kg „wyjdzie" z 30 kg cukru. Zadanie było wprawdzie dość sztuczne, bo nikt nie odważa cukru w paczki po $\frac{3}{4}$ kg, i sztuczność tę wytknięto w dyskusji; niemniej pod względem matematyczno-metodycznym cel został osiągnięty. Nauczycielka zapytała wpierw, jak obliczyć liczbę paczek, gdyby ważyły po $\frac{1}{4}$ kg. Dzieci wykonały to bez trudu, pisząc: $30 : \frac{1}{4} = 30 . 4 = 120$. Ale jeśli paczki będą 3 razy większe, to „wyjdzie ich" 3 razy mniej. Stąd wynikł zapis zadania:

$$30 : \frac{3}{4} = (30 . 4) : 3$$

oraz wnioski słowne, dotyczące dzielenia przez $\frac{3}{4}$, a następnie dzielenia przez ułamek wogóle.

Niezależne od naszej woli okoliczności sprawiły, że nie mogliśmy ciągnąć dalej tego doświadczenia; nie wypróbowaliśmy więc tej drogi w wypadku dzielenia ułamka przez ułamek. Niemniej przeprowadziliśmy na kursie dyskusję i nad tą lekcją, aby zdać sobie sprawę z dalszego przypuszczalnego przebiegu pracy, oraz porównać wartość obu punktów wyjścia: znajdowania całości na zasadzie części, oraz wymierzania, czyli t. zw. popularnie „mieszczenia".

Nie ulegało wątpliwości, że ten ostatni punkt wyjścia daleko szybciej i łatwiej niż pierwszy kojarzył się w umyśle dzieci z pojęciem i znakiem dzielenia. Pytanie, „ile razy liczba a mieści się w liczbie b", odrazu i bez wahania nasuwało dzieciom pomysł, że, aby znaleźć odpowiedź, należy liczbę a p o d z i e l i ć (wymierzyć) przez liczbę b. Natomiast technika działania z wyjątkiem bardzo łatwych wypadków (jak dzielenie liczby całkowitej przez ułamek jednostkowy) pozostawała dzieciom obcą i bez wydatnej pomocy nauczyciela obyć się tu nie mogło.

Przeciwnie natomiast znajdowanie całości na zasadzie części nie przedstawia żadnych trudności technicznych; wszak już w czwartej i piątej klasie, dzieci umieją obliczyć cenę 1 m płótna, którego $\frac{3}{4}$ m ma wartość 1 zł 60 gr, znajdując kolejno koszt $\frac{1}{4}$, potem koszt $\frac{4}{4}$ metra. Ale „domyślić się“, że zespół tych dwóch działań, dzielenia przez licznik i mnożenia przez mianownik danego ułamka, to właśnie jest dzielenie przez dany ułamek, na to dziecko samo zdobyć się nie może i to już musi mu poddać nauczyciel.

W drugiem stadjum pracy, gdy przystępujemy do dzielenia ułamka przez ułamek, pytanie „ile razy się mieści“ staje się przyczyną wielu nieporozumień, a czasem wręcz nie ma sensu. Co znaczy np. pytanie: „ile razy mieści się $\frac{3}{4}$ w $\frac{1}{2}$?“ Jedyna rozsądna odpowiedź byłaby „ani razu“. Dzielenie $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$ może znaczyć tylko albo: obliczyć całość, wiedząc, że $\frac{3}{4}$ całości równa się połowie; albo obliczyć, przez jaką liczbę musimy pomnożyć $\frac{3}{4}$, aby otrzymać $\frac{1}{2}$ (rozkład iloczynu na czynniki), albo wreszcie znaleźć stosunek $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$, czyli obliczyć, jaką część $\frac{3}{4}$ stanowi połowa. Tego zaś dziecko narazie obliczyć nie zdoła, bo o stosunkach nic jeszcze nie wie. A więc dzielenie ułamka przez ułamek zrozumie dziecko jedynie jako obliczanie całości na zasadzie danej części, lub też, w niektórych prostych zadaniach, jako rozkład iloczynu na czynniki. Jeśli np., mając dane pole prostokąta $\frac{1}{2}$ m² i jeden z wymiarów $\frac{4}{5}$ m, ma odszukać drugi wymiar, wówczas przypuszczalnie trafi odrazu na właściwe działanie, o ile pamięta, że pole jest iloczynem 2 liczb wymiarowych, długości i szerokości. Stąd wniosek: dzielenie ułamka przez ułamek oprzeć możemy na zagadnieniach dwojakiego rodzaju: znajdowania całości na zasadzie danej części, oraz znajdowania niewiadomego czynnika na zasadzie iloczynu i drugiego z czynników, przyczem w tym drugim wypadku najłatwiej chyba zaczerpnąć treść zagadnień z geometrji (obliczanie jednego z wymiarów prostokąta, prostopadłościanu, obliczanie promienia danego okręgu itd.).

Tyle o dzieleniu ułamków. Jak widać, włożyliśmy w ten odcinek programu sporo trudu; pozwoliło nam to wniknąć głębiej w istotę zagadnień z nim związanych i lepiej ocenić trudności, które musimy pokonać. Nie uważamy jednak kwestji tej za wyczerpaną, a wniosków z dyskusyj za jedynie słuszne. Niektóre sprawy, jak posługiwanie się analogją, jak dobór najodpowiedniejszych zadań, pozostały spornemi i nadają się w dalszym ciągu do opracowania drogą prób i dyskusyj.

9. Zastosowanie mnożenia i dzielenia ułamków w zadaniach.

Nauczyciel, który zdołał już opracować zarówno mnożenie jak dzielenie przez ułamek, wie jednak, że nie koniec tu jeszcze jego kłopotom.

Zdarza się, że dzieci po szeregu ćwiczeń i zadań opanowały już technikę obu działań i, o ile przez dłuższy czas miały do czynienia z zadaniami na jedno tylko z tych 2 działań, potrafią dość dobrze zadania te rozwiązywać. Natomiast gdy zadanie wymaga zastosowania obu działań, lub też daje się rozwiązać zarówno przy pomocy mnożenia jak i dzielenia przez ułamek, dzieci się gubią.

Weźmy np. takie bardzo napozór elementarne zadanie: „przeliczyć“ 0,8 ha na morgi. Uczeń szuka potrzebnych mu danych w tzw. tabelce miar i znajduje: 1 ha = 1,8 morgi, lub też 1 morga = 0,56 hektara. W zależności od faktu, którą z tych wiadomości zechce zastosować, może rozwiązać zadanie albo mnożąc 1,8 przez 0,8, albo dzieląc 0,8 przez 0,56. Wybór działania jest całkiem dowolny. Gdyby zamiast ułamków dziesiętnych miał podane ułamki zwyczajne, spostrzegłby może, że mnożenie przez $1\frac{4}{5}$ odpowiada dzieleniu przez $\frac{5}{9}$ i że obie czynności sprowadzają się właściwie do jednej; niezawsze jednak to spostrzeżenie nastąpi. Ostatecznie, zanim dziecko nauczy się szybko i sprawnie operować ułamkiem, przechodzi przez okres zgadywania, tem dłuższy i tembardziej uciążliwy, im bardziej nauczyciel kładzie nacisk na „niezawodność“ odpowiedzi: „Zdecyduj się ostatecznie: dzielić czy mnożyć“! A właśnie owa decyzja jest dla dziecka najtrudniejsza, zwłaszcza, że najchętniej poradziłoby sobie jeszcze inaczej, o wiele prościej.

Przez dłuższy czas obserwowałam dziecko, które nie troszcząc się o to, co robi klasa, zabierało się do rozwiązywania zadań na własną rękę i przeważnie dobrze, omijając starannie mnożenie i dzielenie przez ułamek. A więc np. mając obliczyć $\frac{3}{4}$ liczby $2\frac{2}{5}$, obliczało najpierw $\frac{1}{4}$, dzieląc przez 4, potem $\frac{3}{4}$, mnożąc otrzymany wynik przez 3; podobnie postępowało w zadaniach, w których występowało dzielenie przez ułamek.

Czy miałam je za to winić? Sztuka upraszczania sobie pracy jest zaletą, a na poziomie elementarnym niewątpliwie wydawało się dziecku prostszą rzeczą wykonać kolejno dwa działania z liczbami całkowitemi, niż łączyć je w jedno działanie z liczbą ułamkową. Cóż więc pozostawało? Doprowadzić dziecko szeregiem ćwiczeń do wniosku, że właśnie, rozbijając mnożenie lub dzielenie przez ułamek na dwa działania, przedłuża sobie często robotę, zamiast ją uprościć. Ale to wymaga czasu, a my, niestety, przeważnie musimy prowadzić pracę zbyt pospiesznie, bez dostatecznego zrozumienia psychiki dziecka.

10. Liczby przybliżone.

Działaniom na liczbach dziesiętnych poświęciliśmy na P. W. K. N. niewiele czasu, uważając, że naogół nie przedstawiają one trudności metodycznych; technika ich mało odbiega od techniki działań na liczbach całkowitych, jest zatem dla dzieci odrazu dostępną; samo zaś pojęcie odnośnego działania (o ile ułamek dziesiętny został opracowany jako szczególny wypadek ułamka zwyczajnego), wynika z pojęć o ułamkach wogóle i nic nowego nie przedstawia. Tak np., jeśli uczeń już wie i rozumie, że mnożąc przez $^1/_2$, otrzyma połowę mnożnej, wówczas nie zdziwi się, że mnożąc przez 0,5, również otrzyma połowę.

Szczegółowiej natomiast opracowaliśmy na kursie sprawę przybliżeń dziesiętnych.

A. *Pojęcie liczby przybliżonej.*

Dzieci, z któremi mieliśmy do czynienia w danym wypadku, miały już niejakie pojęcie o t. zw. zaokrąglaniu liczb, używały ze zrozumieniem wyrazów: blisko, przeszło, około, prawie itd., a nawet w działaniach chętnie gwoli swej własnej wygody posługiwały się owem zaokrąglaniem, nie pytając, czy i w jakim stopniu mają potemu prawo. Zawsze jednak uważały, że liczba dana w zadaniu lub otrzymana z działań, jest liczbą dokładną, absolutnie pewną, a zaokrąglenie jej jest czynnością dozwoloną tylko w tym celu, aby oszczędzić sobie zbyt długiego i żmudnego liczenia. A więc możemy, zamiast dokładnie 0,728 m, wziąć 0,73 m, czyli trochę, o 2 mm, zadużo, bo w zadaniu naszem tysiączne części metra są zbyteczne: „ktoby tam się troszczył o 2 mm!“ Nie miały jednak pojęcia o tem, że zarówno 0,728 m, jak i 0,73 m są to liczby niedokładne, różniące się jedynie stopniem przybliżenia. Wprowadzenie właśnie tego pojęcia było tematem opisanej poniżej lekcji w kl. VI.

Nauczycielka, przyniósłszy na lekcję listewkę drewnianą, poleciła kilku uczniom zmierzyć jej długość i zapisać sobie wynik pomiaru, nie ujawniając go reszcie klasy. Ta tajemniczość obudziła zainteresowanie i skupiła uwagę dzieci na chwili „ujawnienia" pomiarów. Gdy po ukończonem kilkakrotnem mierzeniu dzieci na polecenie nauczycielki wynotowały wyniki na tablicy, okazało się, że otrzymały liczby: 3,3 dm; 3,5 dm; 3,2 dm; 3,5 dm; 3,4 dm.

Zaczęła się pogawędka o przyczynie tak różnych wyników. Dzieci zgłaszały różne przypuszczenia. A więc: niedokładność przyrządów; „miarki są złe, podziałki nierówne, niewyraźne; gdyby wszyscy mierzyli tą samą miarką, toby wyniki były takie same". Przypuszczenie to upadło wobec faktu, że paru chłopców, mających różne wyniki, posługiwało się właśnie tą samą miarką.

A więc to nie miarka winna. Dzieci wysunęły wobec tego inną ewentualność: „myśmy źle mierzyli, omyliliśmy się". Wynikła stąd sprzeczka, kto lepiej umie mierzyć. Zgodzili się ostatecznie na to, że wyniki z tego mierzenia są wszystkie niedokładne.

Tutaj nauczycielka zwróciła uwagę na ciąg liczb otrzymanych z pomiarów. Co w nich zauważają? Dzieci po krótkiej obserwacji stwierdziły, że wszyscy otrzymali przy mierzeniu 3 całe decymetry, natomiast części dziesiąte decymetra prawie u każdego z mierzących wypadły inaczej.

Stąd wniosek: listewka ma napewno trochę więcej niż 3 dm długości, ale mniej, niż 4 dm. Możemy zatem być pewni tylko tej pierwszej cyfry 3.

Dyskutując z dziećmi dalej w podobny sposób, ale już bez dalszych pomiarów, nauczycielka doszła z dziećmi do dwóch ważnych wniosków: po pierwsze, żadna z liczb otrzymanych z pomiarów nie jest całkowicie dokładna; wszystkie są tylko przybliżone; powtóre, stopień dokładności zależy od tego, jakiem narzędziem mierzymy; powinniśmy przytem zgóry określić z jaką dokładnością chcemy mierzyć lub ważyć.

Zaczęła się o tem pogawędka. Dzieci były trochę niemile zaskoczone faktem, że nie może być pomiarów całkiem dokładnych. Niektóre mówiły ze zniechęceniem: „Jeśli żadna liczba nie jest pewna, choćbyśmy nawet mierzyli jak najstaranniej, to niewarto się trudzić". Zrodziło się przytem inne pytanie: jeśli wszystkie otrzymane pomiary są niedokładne, to którą z liczb wybrać, gdy trzeba np. w zadaniu podać długość mierzonej listewki? Niektóre z dzieci radziły, nie bez słuszności, obliczyć przeciętną wszystkich dokonanych pomiarów i tę przeciętną wziąć za długość listewki.

Stąd znów wynikła pogawędka o mierzeniu i ważeniu. Nauczycielka zwróciła dzieciom uwagę na to, że różne przedmioty mierzymy z różną dokładnością. Dzieci same podawały mnóstwo przykładów: szosę mierzymy w kilometrach, jeśli jeszcze zostanie „kawałek" ostatniego kilometra, to mierzymy go w metrach, ale nie troszczymy się o centymetry; pokój mierzymy z dokładnością większą, w metrach i centymetrach, ale małą kartkę papieru nieraz mierzymy „nawet" w milimetrach. Węgiel ważymy na tonny, na kilogramy, ale nie na gramy, ani nawet na dkg, („niktby kilku deka węgla nie sprzedał".) Ale można kupić parę dkg np. drożdży; a lekarstwa, np. aspirynę w aptece kupuje się na gramy.

Jako wniosek z tych rozważań wysunęła się sprawa względności błędu. Jeśli ważymy cały wagon węgla, czyli około 10 tonn, czy dużo znaczy parę kg błędu? A cóż mówić o dekagramach! Ale kupując 1 kg cukru, będziemy poważnie stratni, jeśli kupiec niedoważy paru dkg. Więc chociaż nie możemy mierzyć i ważyć całkiem dokładnie, to jednak możemy dbać o to, aby w porównaniu z mierzonym przedmiotem błąd nie był zbyt duży. Np. 1 cm błędu przy mierzeniu podłogi długości mniej więcej 5 m znaczy niewiele, bo wynosi tylko $^1/_{500}$ mierzonego odcinka, ale taki sam błąd przy mierzeniu pudełka zapałek, które ma około 5 cm długości, byłby już bardzo znaczny, bo wynosiłby aż $^1/_5$ mierzonego odcinka.

W końcu nauczycielka rozważyła z dziećmi t. zw. granice błędu. Dzieci zrozumiały dość łatwo, że wyrażenie: długość odcinka wynosi 6,4 dm w przybliżeniu (albo: z dokładnością) do 0,1 dm oznacza, iż błąd w podanej liczbie jest niewiększy od 0,1 dm; czyli że mierzony odcinek może być „naprawdę" conajwyżej o 0,1 dm większy niż 6,4 dm, albo o 0,1 dm mniejszy od tej liczby. Prawdę tę nauczycielka ujęła we wzór:

$$6{,}3 \leqslant 6{,}4 \leqslant 6{,}5$$

Na tem zakończono próbę. W dyskusji podnoszono jako zarzut zbyt trudne dla dzieci ujęcie sprawy. Czy potrzebnem było wprowadzanie dzieci „w rozterkę duchową" wiadomością, że żadna liczba otrzymana z pomiaru nie jest liczbą pewną? Czy nie wpłynie to ujemnie na dbałość o staranne wykonywanie pomiarów? Dalej, czy pojęcie granicy błędu nie jest dla dzieci zbyt mgliste i czy nie możnaby go do czasu pominąć?

Nauczycielka, prowadząca lekcję, broniła swego eksperymentu, powołując się na zupełnie dobre wyniki końcowe, natomiast przyznała, że plan, wykonany przez nią (na 2 godzinach lekcji) wykracza cokolwiek po za ramy programu, a więc może ulec pewnej redukcji bez szkody dla dalszego ciągu pracy.

Ostatecznie zgodziliśmy się na to, że cały materjał opracowany jako eksperyment w ciągu 2 godzin, nie byłby ani zatrudny, ani zbyteczny, gdyby nauczyciel wprowadzał go stopniowo, w miarę potrzeby. Niektóre zwłaszcza punkty, np. konieczność określania zgóry stopnia dokładności pomiaru, oraz względność błędu, nasuwają się przy rozwiązywaniu każdego niemal zadania, opartego nie na liczbach fikcyjnych, lecz na danych rzeczywistych, otrzymanych drogą pomiarów; umiejętne wykorzystanie tych nadarzających się sposobności da wystarczającą podbudowę dla nauki o liczbach przybliżonych.

B. *Działania na liczbach przybliżonych.*

Działania z liczbami przybliżonemi, stanowiące również jeden z trudniejszych odcinków programu, nie zostały na P. W. K. N. wypróbowane w całej rozciągłości. Jedynie któregoś roku szczegółowiej opracowaliśmy dodawanie.

Jako zastosowanie dodawania liczb pomiarowych nadające się do wysnucia pewnych wniosków natury ogólniejszej, obraliśmy obliczanie obwodów wielokątów. Podane zostały mianowicie długości boków trójkąta: 2,7 dcm, 3,72 dcm, oraz 2,36 dcm, przyczem dzieci same orzekły, że pierwszy z boków zmierzono mniej dokładnie, niż drugi i trzeci. W związku z tem nauczyciel dodał, że istotnie pierwsza liczba jest podana z dokładnością do 0,1 dcm, druga i trzecia zaś z dokładnością do 0,01 dcm. Przy sposobności przypomniano dzieciom, co znaczą wyrażenia: z dokładnością do 0,1, do 0,01 itd. Aby obliczyć długość obwodu, dzieci zwykłym trybem podpisały trzy podane liczby w kolumnie i dodały je:

$$\begin{array}{r} 2,7 \\ 3,72 \\ 2,36 \\ \hline 8,78 \text{ dcm.} \end{array}$$

Nauczyciel, nawiązując do poprzednich rozważań o stopniu dokładności, zaczął wraz z dziećmi dyskutować nad otrzymanym wynikiem.

A więc, jeśli pierwszy bok zmierzony był z dokładnością do 0,1 dcm, to liczba 2,7 może się różnić od rzeczywistej o 0,1 dcm „w górę lub wdół", czyli może być od rzeczywistej większa albo mniejsza o 0,1 dcm. Stąd wniosek, że w liczbie 2,7 tylko pierwsza cyfra, tj. cyfra całości jest całkiem pewna, cyfra zaś części dziesiątych jest niepewna. Podobne rozważania na temat długości dwóch innych boków trójkąta doprowadziły do wniosku, że w liczbach 3,72 dcm, oraz 2,36 dcm cyfry stojące na miejscach jedności i części dziesiątych są pewne, ale cyfra stojąca na miejscu części setnych wątpliwa.

Stąd już dzieci same orzekły, że w wyniku, wynoszącym 8,78 dcm, cyfra części setnych jest niepewna, bo oznacza sumę liczb, o których nie wiemy, czy są dokładne. Tak samo wątpliwą jest i cyfra, stojąca na miejscu części dziesiątych, bo jeśli przy dodawaniu 3 liczb nie jesteśmy pewni dokładności choć jednego ze składników, to i cała suma nie jest pewna. A więc napewno możemy tylko twierdzić, że obwód trójkąta wynosi więcej niż 8 dcm. Weźmiemy więc wynik dwucyfrowy, czyli z jednym znakiem dziesiętnym, przyczem ta druga cyfra będzie wątpliwa.

Pozostawała sprawa, czy za wynik wziąć liczbę 8,7, czy też 8,8 dcm. Tutaj nauczyciel sam wyjaśnił, że słuszniej „dołożyć 2 setne", aby uzupełnić jedną dziesiątą, niż odrzucić aż 8 setnych. Wynik zapisano w sposób następujący: Obwód trójkąta wynosi 8,8 dcm (w przybliżeniu do 0,1 dcm z nadmiarem).

Po kilku podobnych zadaniach, w których dane były bądź podawane przez nauczyciela, bądź zdobywane drogą pomiarów przez dzieci same, wyłonił się wniosek, który ze względu na swoją ważność warto przytoczyć: Jeśli dodajemy kilka składników w różnym stopniu dokładności, to suma ma conajwyżej ten stopień dokładności, co najbardziej niedokładny ze składników.

Z tego wynikł zaraz inny wniosek, natury praktycznej, podkreślony przez nauczyciela: jeśli pomiary wykonasz niedbale i niedokładnie, to sumując otrzymane z pomiarów liczby, możesz otrzymać sumę jeszcze mniej dokładną, ale nigdy nie zdołasz przez wykonywanie działań p o p r a w i ć stopnia ich dokładności. Oczywiście, wniosek ten dotyczy nietylko dodawania; w zastosowaniu jednak do innych działań powinien być wyprowadzony osobno.

W dyskusji nad lekcją wyłoniła się sprawa i innych działań z liczbami przybliżonemi. Wszyscy słuchacze P. W. K. N. podkreślali trudności tkwiące w tym odcinku pracy, tembardziej, że w żadnym podręczniku nie mogli znaleźć odpowiednich wskazówek. (Było to przed r. 1934; obecnie podręcznik „Matematyki" dla kl. VI Rusieckiego i Zarzeckiego traktuje tę sprawę aż nadto obszernie).

Z dyskusji wysunęły się wskazania następujące, bynajmniej zresztą nie apodyktyczne:

Do pojęcia liczby przybliżonej należy przyzwyczajać dzieci stopniowo w klasach V i VI, najpierw polecając im „zaokrąglać" wyniki wyrażone liczbami całkowitemi, o ile owo „zaokrąglenie" tłumaczy się względami praktycznemi, następnie czyniąc to samo w wypadku wyniku ułamkowego otrzymanego z dzielenia. Tak np. obliczając koszt „ósemki" czyli $\frac{1}{8}$ kg masła po 3 zł za kg, dziecko z łatwością zrozumie, że nie może wypłacić $37\frac{1}{2}$ grosza; wynik musi być zaokrąglony z nadmiarem.

Od wyniku przybliżonego przechodzimy do działań na liczbach przybliżonych. Muszą one być poprzedzone szeregiem ćwiczeń na mierzenie i ważenie z różną odpowiadającą celowi obliczeń dokładnością. Trzeba bowiem, aby dziecko zrozumiało, że mając niedokładne dane, musi zawarty w nich błąd brać pod uwagę przy ocenie wyniku.

W szczególności w m n o ż e n i u jaskrawo przejawia się zależność dokładności wyniku od stopnia dokładności czynników. Warto tutaj zacytować przykład podany w „Uwagach do programu": „Jeżeli przy ocenie na oko stwierdzimy, że pokój ma od 5 do 6 m długości, od 4 do 5 m szerokości i od 3 do 4 m wysokości, to o objętości pokoju t y l e t y l k o można powiedzieć, że zawiera się między 60 i 120 m^3".

To wskazuje, jak bardzo wzrastają w mnożeniu granice błędu. Zazwyczaj przy opracowywaniu mnożenia dzieci podnoszą protest przeciwko skreślaniu kilku znaków po przecinku w wyniku, który ma pozory wielkiej dokładności. Mnożąc np. liczby 3,78 . 2,16 i otrzymując wynik aż z 4 znakami po przecinku, nie mogą się pogodzić z tem, że wystarczy pozostawić w wyniku jeden znak dziesiętny. Aby je o tem przekonać, należałoby choć jeden przykład przerobić szczegółowiej, zwracając uwagę na górne i dolne kresy liczb 3,78 oraz 2,16 i porównywując trzy iloczyny:

$$3{,}79 \cdot 2{,}17 = 8{,}2243$$
$$\mathbf{3{,}78 \cdot 2{,}16 = 8{,}1648}$$
$$3.77 \cdot 2{,}15 = 8{,}1055.$$

Widać z nich, że w iloczynie liczb 3,78 . 2,16 nawet pierwsza cyfra po przecinku jest wątpliwa; jeśli zatem jako ostateczny wynik weźmiemy 8,1 (z niedomiarem) lub 8,2 (z nadmiarem) to będziemy całkiem w porządku.

Wreszcie jako ostatni punkt dyskusji wysunął się znak, jaki należy przyjąć dla odróżnienia wyniku przybliżonego od wyniku dokładnego. Szło o to, że używanie znaku równania nie powinno mieć miejsca tam, gdzie w ścisłem znaczeniu tego słowa równość nie zachodzi. A więc np. w przykładzie powyższym nie mamy prawa pisać 3,78 . 2,16 = 8,2.

Ostatecznie zgodziliśmy się na znak $\doteq$ (znak równania z kropką) spotykany najczęściej w podręcznikach.

11. Pojęcie stosunku.

Z działu tego przeprowadziliśmy kilka lekcyj na P. W. K. N., jednak ani jedna z nich nie spotkała się w ciągu dyskusji z całkowitą aprobatą ogółu słuchaczy. Oto krótki zarys przebiegu tych lekcyj.

1) Nauczycielka zaczęła od podyktowania dzieciom w dużem zaokrągleniu liczby mieszkańców kilku miast polskich.

Warszawa	—	1200000
Łódź	—	600000
Lwów	—	300000
Lublin	—	120000 itd.

Z pogadanki o zanotowanych liczbach wynikło porównanie: najwięcej ludności ma Warszawa, potem Łódź itd. Wówczas nauczycielka postawiła najpierw pytanie, o ile ludność Warszawy jest większa od ludności Łodzi, Lwowa itd., następnie zaś: ile razy ludność Warszawy jest większa od ludności tych miast. Okazało się stąd, że można porównywać liczby dwoma sposobami: przez odejmowanie i przez dzielenie.

Zatrzymawszy się na tym drugim sposobie, nauczycielka poleciła dzieciom zapisać i obliczyć kolejne ilorazy:

$$1200000 : 600000 = 2$$
$$1200000 : 300000 = 4 \text{ itd.}$$

Następnie zaś zwróciła uwagę na ów zapis, zapytując, w jakim celu wykonaliśmy szereg owych dzieleń. Pytanie było niebezpieczne, właściwie bowiem trudno w owych obliczeniach doszukać się celu; szczęściem jednak dzieci, pomne zaświeża, o co szło w zadaniu, odpowiedziały właśnie tak, jak pragnęła nauczycielka: że dzielą te liczby, aby się dowiedzieć, ile razy ludność Warszawy jest liczniejsza od ludności Łodzi, Lwowa itd.

Teraz nauczycielka wprowadziła wyraz: stosunek. „Znaleźliśmy, w jakim stosunku znajduje się liczba mieszkańców Warszawy do liczby mieszkańców Łodzi, Lwowa itd. Czytamy to: stosunek liczby ludności Warszawy do ludności Łodzi równa się 2". (Wysłowienie niedokładne).

Tutaj odezwanie się jednego z uczniów dało sposobność do dalszego rozwinięcia tematu. Wyraził się on mianowicie, że ludność Łodzi stanowi połowę ludności Warszawy. Wynikło stąd zagadnienie, jak to zapisać, a więc którą z dwóch liczb trzeba przez którą podzielić, aby wynik stosunku równał się $\frac{1}{2}$. Zapisawszy (z pomocą nauczycielki):

$$600000 : 1200000 = \frac{1}{2}$$

dzieci otrzymały odwrócenie stosunku poprzedniego.

Na następnej godzinie nauczycielka poleciła dzieciom podawać samodzielnie przykłady stosunku dwóch liczb, przyczem zbyt uparcie wymagała posługiwania się wyrazem „stosunek". Np. gdy dzieci mówiły w prosty sposób, że 120 zł jest dwa razy więcej niż 60 zł, ona poprawiała: Stosunek 120 do 60 równa się 2. Tę sztuczność ujęcia wytknięto jej ostro podczas dyskusji.

W dalszym ciągu, pragnąc wprowadzić pojęcie tzw. niezmiennika stosunku, nauczycielka zaczerpnęła przykład ze związków geometrycznych. Poleciła mianowicie na małym modelu flagi polskiej porównać długość i szerokość. Dzieci stwierdziły, że stosunek długości flagi do jej szerokości wynosi 8 : 5, lub $\frac{8}{5}$. Wywiązała się pogadanka o flagach: mogą być różnej wielkości, ale stosunek ich wymiarów jest stały(?). Stąd łatwo już było przejść do prawa, że zwiększanie i zmniejszanie tę samą liczbę razy obu wyrazów stosunku nie zmienia jego wartości.

Dwie inne lekcje, przeprowadzone kolejno przez dwóch nauczycieli z drugą grupą dzieci, nie wiele różniły się od powyższej. Na jednej z nich zarysowała się konieczność jaśniejszego słownego rozróżnienia stosunków odwrotnych. Z pomocą nauczyciela dzieci doszły do wypowiedzi następujących:

Stosunek 375 km : 75 km = 5 pokazuje, że długość 375 km jest 5 razy większa od 75 km.

Natomiast stosunek 75 km : 375 km = $\frac{1}{5}$ pokazuje, że 75 km stanowi $\frac{1}{5}$ część 375 km.

W dyskusji zwrócono uwagę na niewłaściwość wyrazu „pokazuje“ zamiast „znaczy, oznacza“ itd.

Trzecia ze wzmiankowanych lekcyj była poświęcona zagadnieniu odwrotnemu: „znaleźć 2 liczby będące w danym do siebie stosunku“, oraz ćwiczeniom na upraszczanie stosunków.

Tak więc w ciągu tych paru lekcyj program dotyczący pojęcia stosunku został prawie wyczerpany bez wielkich trudów. Niemniej w dyskusji, którą prowadziliśmy odrazu nad wszystkiemi powyższemi lekcjami, posypały się liczne zarzuty. Podkreślano brak planowości pracy, skoki od jednego pojęcia do drugiego, nieścisłości językowe itd.

Najważniejszym jednak i, mojem zdaniem, słusznym był zarzut, że cała robota nie wiąże się w najmniejszym stopniu z tem, co dzieci już umieją, ani też nie wynika z jakiegokolwiek praktycznego faktu. Dzieci nauczyły się wprawdzie pisać i obliczać stosunki liczb, lecz absolutnie nie wiedzą, na co to się może przydać.

Stąd logicznie nasunął się wniosek, że należy dla pojęcia stosunku szukać punktu zaczepienia w materjale wcześniejszym. Takim bardzo łatwym punktem zaczepienia wydaje się pojęcie skali. Istotnie, dzieci począwszy od kl. IV posługują się już wyrazem skala, oraz zapisem 1 : 10, 1 : 100, lub odwrotnie 10 : 1, 100 : 1 itd. Wiedzą również co znaczy: rysunek powiększony w skali 2 : 1, rysunek zmniejszony w skali 1 : 5 itd. Wystarczyłoby zatem wyraz „skala“ zastąpić od czasu do czasu (nie rugując go całkiem) wyrazem „stosunek“, aby mieć już pierwsze podejście do tematu. Możemy przecie z równą słusznością wyrażać się: rysunek zmniejszony w stosunku 1 : 10, jak i w skali 1 : 10.

Stąd już tylko jeden krok do rozszerzenia pojęcia stosunku z zagadnień geometrycznych na wszelkie inne; należałoby tylko wyszukać i wybrać takie fakty matematyczne, w których istotnie wyraz „stosunek“ ma zastosowanie w praktyce życiowej. A więc skład wielu mieszanin i związków, jak powietrza, mleka, itd. Stosunek tlenu do azotu w powietrzu (= 21 : 79), próby metali, spadek lub wzrost cen różnych produktów nasuwają materjał do łatwych i pozbawionych sztuczności obliczeń. Stąd proste przejście do t. zw. podziału liczby w danym stosunku, oraz do znajdowania jednej z dwóch liczb na zasadzie jej stosunku do drugiej. Tu również nadawałoby się zastosowanie pewnych wykresów, co zresztą omawiam szczegółowo w osobnym rozdziale.

Ogólnie jednak, pomimo zacytowanych powyżej przykładów zastosowania pojęcia stosunku, w dyskusji przeważało przekonanie, że poza geometrją (skala) trudno jest w tym zakresie dobrać tematy zadań, któreby nie trąciły sztucznością; tembardziej, że niewiele później wprowadzenie pojęcia procentu da możność zastąpienia stosunku dowolnego stosunkiem procentowym o wiele praktyczniejszym i częściej używanym.

12. Pojęcie procentu.

Lekcyj i dyskusyj na temat wprowadzenia pojęcia procentu było na P. W. K. N. bardzo wiele, przyczem pewne pomysły i wątpliwości co roku niemal się powtarzały. Głównie jednak zarysowały się dwie koncepcje, powszechnie zresztą znane, które jednego z lat ubiegłych zostały kolejno wypróbowane na dwóch grupach tej samej VI klasy.

Na jednej z grup nauczyciel związał pojęcie procentu z pojęciem stosunku.

Zaczął od łatwych ćwiczeń, znanych już dzieciom z lekcyj poprzednich: obliczyć stosunek 1 cm do 1 m, 1 dkg do 1 kg, itd., a następnie obliczyć stosunek 3 cm do 1 m, 7 cm do 1 m itd. Dzieci wykonywały te ćwiczenia bez wahania, obliczając ustnie, a potem zapisując:

$$1 \text{ cm} : 1 \text{ m} = 1 : 100 = \frac{1}{100}$$

$$3 \text{ cm} : 1 \text{ m} = 3 : 100 = \frac{3}{100} \text{ itd.}$$

Po szeregu takich ćwiczeń, oraz po kilku ćwiczeniach odwrotnych, np.: ile cm : 1 m $= \frac{1}{100}$, dzieci na polecenie nauczyciela odczytywały wynotowane stosunki: jeden do stu..., trzy do stu... itd., przyczem nauczyciel każdorazowo kładł nacisk na owe wyrazy „do stu". Wówczas nauczyciel wprowadził „nowy sposób pisania".

„Będziemy pisali tylko licznik stosunku, np. 1, a zamiast mianownika 100 napiszemy znaczek, złożony tak samo jak liczba 100, z 2 kółeczek i kreseczki; oto tak: 1%. Tu ze strony dzieci dał się słyszeć ucieszony głos: to procent! Całkiem tak, jakby spotkały dobrego znajomego.

Nastąpiło pisanie i czytanie poprzednich stosunków w postaci procentów 1 : 100 = 1%, 3 : 100 = 3% itd., przyczem nauczyciel wyjaśnił znaczenie wyrazu „procent" (pro — cent = od stu).

Dotychczas dzieci nie napotykały na żadne trudności; teraz jednak należało przejść do obliczenia procentu nie od jednej setki, ale od większej liczby setek. I tutaj nauczyciel posługiwał się w dalszym ciągu pojęciem stosunku. Biorąc za podstawę stosunek 1 : 100 = 1%, zapytał, ile cm należy wziąć na 2 m, aby również otrzymać stosunek 1 : 100 czyli 1%; taksamo ile cm przypada na 1% od 3 m, od 5 m itd.

Tu pożądane było oprzeć się na jakiemś prostem zadaniu np.: zrobiono roztwór soli, biorąc na 1 kg wody 1 dkg soli, czyli biorąc ilość soli do ilości wody w stosunku 1 : 100; ile soli należałoby wziąć na 2, 3, 4 kg takiego samego roztworu?

Z kolei nauczyciel przeszedł do obliczania (wciąż na zasadzie stosunku) 2%, 3% itd. pewnej wielkości. A więc stosunek 4 cm do 1 m. stanowi 4 : 100 = 4%. Jeśli zaś weźmiemy 4% nie od 1 m lecz od 2 m (3 m, 4 m) to ile cm stanowi 4% „względem" 2 m? Inaczej, ile cm jest do 2 m w stosunku 4 : 100? Znów tutaj sprawa stałaby się o wiele jaśniejszą, gdyby nauczyciel zastosował zadanie, np.: W mleku jest 3% tłuszczu; co to znaczy? (3 dkg na 1 kg; 3 : 100). Ile tłuszczu będzie zatem w 2, 3, 4 kg mleka?

To pomijanie konkretnych zastosowań stało się przyczyną pewnych zawahań w odpowiedziach dzieci. Zadania nastąpiły dopiero na drugiej godzinie lekcji. Rozwiązywano je metodą następującą:

W szkole jest 700 uczniów; pewnego dnia było nieobecnych 8% uczniów. Ilu uczniów brakowało? Dzieci objaśniały: 8% to znaczy 8 na 100 (8 do 100, 8 od 100); przyczem pisały te słowa w postaci stosunku 8 : 100. Jeśli na 1 setkę uczniów brakowało 8, to na 7 setek — 7 razy tyle. Jak widać, dzieci rozpoczynały pracę od obliczenia liczby setek w ogólnej liczbie uczniów, co zresztą w tym wypadku, wobec łatwości danych i działań, dokonane zostało w pamięci i uwidoczniło się dopiero w zapisie zadania:

$$\frac{8.700}{100} \text{ lub } \frac{700.8}{100}$$

Gdy jednak nastąpiły zadania z liczbami trudniejszemi, np. obliczyć liczbę Polaków (69%) w ogólnej liczbie mieszkańców Warszawy (1200000), dzieci zaczęły robotę od piśmiennego obliczenia liczby setek w liczbie ludności Warszawy. Jeszcze wyraźniej uwydatniło się to przy obliczaniu rabatu w tabelce zakupów do sklepiku szkolnego (zadanie wykonane w klasie; sprawdzenie miało być dokonane w domu).

Ilość towaru	Cena	Wartość	Rabat w %	Rabat w zł	Do zapł.
8 książek	3.25		5%		
15 tuz. zesz.	1.20		12%		
1 pud. ołów.	4.00		15%		
— — — —	— — —	— — —	— — —	— — —	— — —

Z trzech podanych kolumn dzieci musiały uzupełnić pozostałe. W rubryce wartości otrzymały wprawdzie całkowite liczby złotych, ale nie całkowite setki; poradziły sobie jednak, zamieniając złote na setki groszy. Pozatem przerobienie całej tabelki, łącznie z obliczeniem ogólnej wartości towaru i ogólnej kwoty należnej za towar, nie nasunęło trudności.

Ale oto nauczyciel zapytał, jak sprawdzić wyniki całej roboty. Szło mu o porównanie ogólnej wartości towaru z dwoma jej składnikami: rabatem obliczonym w złotych i kwotą pozostającą do zapłacenia. Dzieci jednak zrozumiały to inaczej; zaproponowały, aby d o d a ć p r o c e n t y (5% + 12% + 15%!) i obliczyć od całej wartości towaru ów zsumowany procent (32%). Błąd został wprawdzie łatwo wyjaśniony; wskazuje on jednak, że pojęcie procentu jako stosunku dwóch liczb wyrażonego w zależności od liczby 100 nie jest dla dzieci łatwo dostępne.

Inaczej i prościej poradziła sobie z pojęciem procentu nauczycielka w drugiej grupie dzieci. Kazała kolejno obliczać w pamięci, ile cm stanowi $\frac{1}{100}$ metra, $\frac{50}{100}$ m, $\frac{100}{100}$ m, a potem $\frac{1}{100}$ trzech m, $\frac{3}{100}$ trzech m; ile arów stanowi $\frac{25}{100}$ ha, ile litrów stanowi $\frac{6}{100}$ czterystu l, ile zł stanowi $\frac{13}{100}$ dwustu zł itd. Zapisawszy to co obliczyły, dzieci otrzymały szereg równości:

$$\frac{1}{100}\text{ m} = 1\text{ cm}$$

$$\frac{50}{100}\text{ m} = 50\text{ cm}$$

$$\frac{1}{100}\text{ trzech m} = 3\text{ cm itd.}$$

Wówczas nauczycielka u m ó w i ł a s i ę z dziećmi, że $\frac{1}{100}$ część całości, nazywać będą 1 procentem i wprowadziła zapis: $\frac{1}{100} = 1\%$, $\frac{2}{100} = 2\%$ itd. Tym sposobem znajdowanie procentu danej całości sprowadzone zostało do znajdowania ułamka danej całości wyrażonego w częściach setnych, przyczem dzieci niejednokrotnie samorzutnie zastępowały ów ułamek o mianowniku 100 innym ułamkiem prostszym, pisząc np. $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ i obliczając połowę danej całości.

Zadania na obliczanie procentu poszły już dalej całkiem gładko; obliczając 1%, 2%, 25% danej liczby, dzieci mnożyły ją przez ułamek $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{25}{100}$ lub $\frac{1}{4}$ itd., a więc włączyły ten nowy odcinek pracy do znanej dawniej czynności znajdowania części na zasadzie całości. O to właśnie nauczycielce chodziło.

Następną lekcję prowadziłam sama z obu grupami razem i miałam sposobność stwierdzić, jak szybko druga grupa, dla której pojęcie procentu było jednoznaczne z pojęciem ułamka o mianowniku 100, narzuciła swój sposób rozumienia rzeczy grupie pierwszej, dla której procent był szczególnym wypadkiem stosunku dwóch liczb. Z całej grupy nie znalazł się nikt, ktoby próbował rozwiązywać zadania metodą, wskazaną w pierwszej lekcji; nawet wówczas, gdy dobór liczb w zadaniu nadawał się raczej do zastosowania pojęcia stosunku („do stu“, „od stu“, „na sto“), np. gdy całość składała się z okrągłej liczby setek, dzieci wolały posługiwać się mnożeniem przez odpowiedni ułamek.

To dowodzi, jak dalece prostszem i bliższem umysłowi dzieci jest pojęcie procentu jako ułamka z mianownikiem 100.

Dalszy ciąg pracy poszedł z obiema grupami nadspodziewanie łatwo. Dzieci doszły same do rozwiązywania zadań na znajdowanie tzw. „kapitału“. Miały np. rozwiązać zadanie, dotyczące budżetu miesięcznego: „Z zarobku miesięcznego przypada 26% na komorne, 55% na żywność, 8% na opał, światło, ubranie i inne wydatki, 25 złotych na naukę dzieci, 1% odłożono do P. K. O. Obliczyć zarobek miesięczny“.

Nie zawahały się ani na chwilę przed rozwiązaniem, jakkolwiek liczbę 25 zł, stanowiącą klucz do rozwiązania, umieściliśmy celowo nie przy końcu tekstu, lecz pośród innych danych. Co więcej, gdy początkowo podyktowano im przez omyłkę błędne dane (75% na żywność), spostrzegły błąd natychmiast: 100% to cały zarobek, więc wydatki nie mogą przewyższać 100%.

Taksamo łatwo dzieci same wpadały na myśl zamiany stosunku wyrażonego w ułamku zwyczajnym na stosunek procentowy, rozumując w sposób następujący: $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$, czyli 20%. I tutaj więc oparły się na pojęciu procentu jako ułamka.

W dyskusji na P. W. K. N. doszliśmy do wniosku, że pojęcie procentu jako ułamka o mianowniku 100, jest nietylko dla dzieci najłatwiejsze, ale i najbardziej praktyczne. Gdy bowiem stosunek procentowy („do stu“, „od stu“ itd.) wymaga szukania w tzw. kapitale liczby setek, co może być często niewygodne, mnożenie przez ułamek o mianowniku 100 kłopotu nie nasuwa. W szczególności praktyczność tego ujęcia występuje przy obliczaniu odsetek od liczb mniejszych niż 100.

Przytem procent pojęty jako pewien ułamek (właściwy, lub niewłaściwy: 120%) danej całości, staje się dla dzieci pojęciem o wiele ogólniejszem; nie narzuca bowiem wyłącznie skojarzeń z operacjami pieniężnemi, jak to się często dzieje, gdy procent związany jest z wyrażeniem „od stu“ (np. zysk od stu itd.).

To nie przeszkadza zresztą w dalszych etapach nauki o procentach wdrażać dzieci praktycznie w różne sposoby techniczne rozwiązywania zadań na procenty, nie wyłączając i ujęcia procentu, jako stosunku.

Tak np., niech uczeń ma do rozwiązania zagadnienie na temat obliczania stopy procentowej: „Na 388600 km^2 obszaru Polski jest 255900 km^2 ziemi użytkowanej rolniczo. Jaki to % całego obszaru?“

Narzucają się wówczas między innemi dwie metody:

a) Biorąc cały obszar Polski za 100%, obliczyć 1% obszaru, a potem stosunek obszaru zużytkowanego rolniczo do 1%.

b) Obszar ziemi zużytkowanej rolniczo wyrazić jako ułamek (zwyczajny, lub dziesiętny) obszaru całego państwa i ułamek ten wyrazić jako %. Wybór metody pozostawiamy uczniowi.

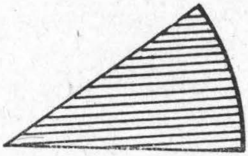
LEKCJE I DYSKUSJE NA TEMATY GEOMETRYCZNE

1. Kąty.

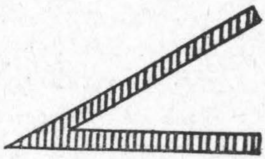
Wprowadzenie pojęcia o kątach według obecnego programu uskutecznia się na dwóch poziomach: w kl. IV, gdzie zaznajamiamy dzieci wyłącznie z kątem prostym, oraz w kl. V, gdzie pojęcie kąta zostaje rozszerzone na wszelkie kąty w zakresie 360°.

Z klasą IV prawie nie mieliśmy do czynienia na P. W. K. N., wobec czego nie mam z tego zakresu żadnego bezpośredniego materjału doświadczalnego. Mogę jednak z obserwacyj różnych lekcyj poza kursem, oraz z dyskusyj w których brałam udział, sformułować parę wskazówek, mających raczej charakter negatywny, czyli omawiających te sposoby wprowadzenia pojęcia kąta, które ze względów matematycznych lub metodycznych są zasadniczo błędne.

Do takich w pierwszym rzędzie należy „wycinanie“ kąta z papieru bądź w formie wycinka kołowego, bądź w formie 2 wąskich listewek (rys. 9 a i b).



Rys. 9a



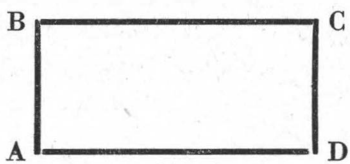
Rys. 9b

Mogłam niejednokrotnie sprawdzić, że to się praktykuje, a bodaj nawet w niektórych podręcznikach spotykałam odnośne rysunki. Widziałam również piękne zeszyty dziecięce z ponaklejanemi „kątami“ w różnych barwach.

Wprowadzając takie wycinanki, popełniamy podwójny błąd. Popierwsze: matematyczny. Kąt bowiem, jako figura niezamknięta, nie może być uzmysławiany przez jakiegokolwiek kształtu wycinek papierowy, który przez sam fakt „wycięcia“ go z papieru jest ze wszystkich stron ograniczony. Nie możemy zatem kąta wyciąć; możemy jedynie wyciąć figurę zamkniętą, np, wielokąt, do której wchodzą kąty, jako jej elementy składowe.

Powtóre: popełniamy błąd metodyczny, dając dziecku fałszywe pojęcie kąta. Cały szereg zasadniczych własności kąta, jak np. niezależność wielkości kąta od długości jego ramion, pojęcie kątów przyległych, kątów wierzchołkowych, wreszcie pojęcie kątów równych, sumy i różnicy kątów, skutkiem źle wybranego modelu nie dochodzi wcale do świadomości dziecka, powodując w następstwie całkiem dowolne i dziwaczne skojarzenia.

Jako przykład opacznie zrozumianego pojęcia kąta przytaczam fakt z własnego doświadczenia, z czasów, gdy pojęcie kąta prostego wprowadzano o dwie klasy niżej niż obecnie, bo już w kl. II. Dziecko w kl. V (a więc po trzech latach operowania wyrazem „kąt"), zapytane przeze mnie o kąty prostokąta, odpowiedziało poprawnie, że prostokąt A B C D ma 4 kąty proste, przyczem wskazało palcem wierzchołki kątów, wymieniając stojące przy nich litery A, B, C i D.



Rys. 10

Na żądanie jednak, aby wskazało ramiona kątów, wskazało odcinki A B i A D jako ramiona kąta A (rys. 10) oraz odcinki C B i C D jako ramiona kąta C. Natomiast o kątach B i D orzekło, że nie mają ramion, bo wszystkie boki prostokąta „już poszły" na tamte dwa kąty. Czy może być bardziej fałszywe pojęcie kąta po trzech latach nauki?

Inny sposób wprowadzenia pojęcia kąta polega na związaniu tego pojęcia odrazu od początku z łukiem okręgu, na którym dany kąt środkowy się opiera, z kątomierzem i miarą kąta. I to podejście również budzi zastrzeżenia: kąt nie może mierzyć się „łukiem" jak to pospolicie (i błędnie) się mówi, lecz tylko innym kątem, obranym za jednostkę miary. Dopiero po ugruntowaniu pojęcia kąta, jako całkiem odrębnego gatunku wielkości geometrycznych, może przyjść zestawienie go z łukiem, oraz zwrócenie uwagi na odpowiedniość stopni łukowych i stopni kątowych.

I tu nasuwa się pytanie, w jaki sposób uzmysłowić, objaśnić i utrwalić pojęcie kąta w pierwszem stadjum nauki?

Prof. Rusiecki i Zarzecki w swym podręczniku „Matematyki" dla kl. IV, zgodnie z programem M. W. R. i O. P., proponują poprostu kartkę papieru złożoną we czworo. Niewątpliwie jako model kąta prostego kartka taka wystarcza: rozłożona, ilustruje wybornie dwie proste prostopadłe i cztery kąty proste przez nie utworzone; złożona służy za pierwowzór ekierki. Natomiast o ile chcielibyśmy rozszerzyć pojęcie kąta poza ten jeden szczególny wypadek, musielibyśmy uciec się do takiego modelu, któryby dzięki ruchomości ramion kąta, oraz możliwości ich skracania i przedłużania pozwalał wyodrębnić kąt z pośród innych figur, oraz dawał jasny obraz kątów równych, nierównych, kąta małego o długich ramionach lub odwrotnie itd.

Zdaje mi się, że za model kąta mogą całkiem dobrze służyć bądź dwa możliwie cienkie patyczki, dające się nachylać i rozchylać, bądź dwie kreski narysowane na tablicy. Wszelkie inne modele budzą wątpliwości. Praca związana z powyższym modelem jest już jednak etapem drugim, odpowiadającym według programu klasie V.

Ten drugi etap pracy przerabialiśmy dwukrotnie (w ciągu dwóch lat kolejnych) na P. W. K. N.

W pierwszym roku nauczycielka przystąpiła do pracy bez żadnych z góry przygotowanych modeli. Poprostu nakreśliła na tablicy półprostą i przyłożyła cienką pałeczkę tak, aby półprosta i pałeczka utworzyły kąt. Nachylając pałeczkę ku prostej wprowadziła pojęcie zmniejszania kąta, oraz doprowadziła dzieci do pojęcia kąta „zerowego" podając im zarazem (czy nie zawcześnie?) ten termin. Z kolei, odchylając pałeczkę od prostej, doszła do pojęcia kąta prostego, półpełnego i pełnego. W końcu, posługując się wciąż temi samemi pomocami, wprowadziła pojęcie kąta ostrego, czyli mniejszego od prostego, oraz rozwartego jako większego od prostego. Jako zastosowanie, posłużyły ćwiczenia gimnastyczne: zwrot o pół obrotu, o ćwierć obrotu, a więc o kąt półpełny, prosty itd. Dla wprawy dzieci same kreśliły i rozpoznawały niektóre z pośród powyższych kątów.

Jak widać stąd, lekcja miała charakter czysto teoretyczny, bez jakiegokolwiek (sztucznego często) „nawiązywania do życia".

W następnym roku wypadło opracować ten sam temat z inną grupą słuchaczy. Opracowanie to o tyle różniło się od poprzedniego, że nauczyciel zaopatrzył się w koło tekturowe z dwiema wskazówkami z drewna. Jedna ze wskazówek pozostawała stale w położeniu poziomem, podczas gdy druga obracała się dookoła środka okręgu.

Lekcja zaczęła się od dokonanego wespół z dziećmi opisu kąta, a więc od wyodrębnienia wierzchołka, ramion, obszaru kąta; potem zaś wprowadzono pojęcie różnej wielkości kątów w porządku następującym: kąt zerowy, pełny, półpełny, prosty, ostry, rozwarty. W dyskusji nauczyciel zaznaczył, że celowo od kąta zerowego przeszedł odrazu do kąta pełnego, aby przez całkowity obrót wskazówki dać dzieciom możność odróżnienia kąta zerowego od pełnego, chociaż w obu wypadkach położenie ramion kąta jest identyczne. Taksamo celowo związał bezpośrednio obraz kąta półpełnego z obrazem kąta pełnego.

Zgadzając się zasadniczo z planem i treścią lekcji, zakwestjonowano jednak owo tekturowe koło, na tle którego wskazówka się obracała. „Poco to koło? Czy nie słuszniej byłoby wyodrębnić sam kąt i jego ramiona bez wprowadzania momentów zbędnych?

Istotnie, może krytycy mieli słuszność; natomiast na obronę pomysłu możnaby rzec, że tak przygotowany przyrząd niewątpliwie w umyśle dzieci skojarzył się z dobrze im znanym przedmiotem, zegarem, a tem samem ułatwił orjentowanie się w nowych pojęciach i dał sposobność do szeregu ćwiczeń związanych z kątami, które tworzą wskazówki zegara o różnych godzinach. Zarazem koło owo mogło stanowić moment przejściowy do innego przyrządu, do kątomierza, z którym dzieci miały się już na następnej lekcji zaznajomić.

Streszczając rozważania powyższe, doszliśmy w dyskusji do wniosku, że na poziomie kl. V pojęcie kąta oparte na pojęciu obrotu nie jest dla dzieci zbyt trudne. Natomiast pozostała nierozstrzygniętą doświadczalnie wątpliwość, czy jest możliwem obejść się bez uprzedniego opracowania pojęcia kąta w zakresie kąta mniejszego od półpełnego. Czy nie byłoby słusznem poprzedzić demonstrację całkowitego obrotu, demonstracją zwiększania i zmniejszania kąta przez nachylanie, względnie rozchylanie ramion (dwóch ołówków, dwóch patyczków), a także kreśleniem kątów równej wielkości, lecz różniących się długością ramion? Wypróbować tego nie mogliśmy, gdyż obie lekcje opisane powyżej odbywały się w klasach, w których z powodu stosowania dawniejszych programów dzieci już w kl. IV miały sporo do czynienia z kątami, a nawet z kątomierzem, co zresztą nie przeszkadzało im kwalifikować jako większy ten kąt, który miał dłuższe ramiona.

Gdyby przyjąć użyteczność tych ćwiczeń pośrednich, wówczas cała nauka o kątach podzieliłaby się na cztery etapy:

a) W klasie IV zaznajomienie z kątem prostym i z użyciem ekierki.

W klasie V: b) pojęcie kąta większego i mniejszego od kąta prostego; zmniejszanie i powiększanie kątów w zakresie kąta półpełnego; przedłużanie i skracanie ramion kąta.

c) Kąt jako miara obrotu; kąty w zakresie kąta pełnego.

d) Mierzenie kątów; jednostka miary; przyrząd: kątomierz; odpowiedniość kątów i łuków.

Te cztery etapy przerabiaćby należało w oparciu o inne figury geometryczne, które w danym okresie dziecko poznaje. A więc etap pierwszy wiąże się ściśle z pojęciem i kreśleniem prostokąta; drugi z równoległobokiem i trójkątem (tj. z opisem i kreśleniem tych figur); trzeci i czwarty z okręgiem, promieniami i łukami koła.

Tak opracowana nauka o kątach uchroniłaby przypuszczalnie dziecko od błędów, o których była mowa powyżej, a zarazem w zupełności uczyniłaby zadość dwom ważnym zasadom metodycznym: zasadzie ciągłości, oraz zasadzie stopniowania trudności.

2. Okrąg koła.

Mierzenie okręgu przeprowadzone zostało w kl. VI naszej szkoły ćwiczeń drogą następującą: Dzieci podzielone na trzy grupy otrzymały od nauczyciela tekturowe krążki o różnych promieniach: 2 cm, 3 cm i 4 cm. Przypomniawszy, jak obliczały obwody prostokątów, trójkątów i innych wielokątów, nauczyciel postawił dzieci odrazu wobec zagadnienia: jak obliczyć obwód koła?

Odpowiedzi wszystkich dzieci były zgodne: należy obwieść koło sznureczkiem i zmierzyć sznurek. Technicznie jednak okazało się to dość trudnem, zwłaszcza gdy dotyczyło koła, które uprzednio nauczyciel nakreślił na tablicy. Dzieci próbowały przypinać sznurek do okręgu szpileczkami; taki sposób jednak dawał bardzo niedokładne wyniki, jak to można było na oko odrazu zauważyć.

Przerwawszy narazie próby z kołem, nakreślonem na tablicy, nauczyciel poradził dzieciom powrócić do krążków wyciętych z grubej tektury, które od niego otrzymały na początku lekcji. Tu praca okazała się łatwiejszą; przyczem dzieci z własnej inicjatywy obmyśliły dwa sposoby mierzenia: jedne owijały krążek dostarczonemi przez nauczyciela paskami papieru milimetrowego, inne zaś toczyły krążek po nakreślonej w zeszycie linji prostej, a następnie mierzyły otrzymany odcinek.

Wyniki w każdej z 3 grup były mniej więcej zbliżone.

Wówczas nauczyciel dla każdej z trzech grup z osobna wynotował tabelkę złożoną z trzech rubryk: 1) Obwód koła, 2) średnica, 3) stosunek obwodu do średnicy.

Pierwsze dwie kolumny w tabelce dzieci wypełniały według dokonanych pomiarów; liczby w trzeciej kolumnie musiały być dopiero obliczone, przyczem nauczyciel polecił dzieciom dokonać tych obliczeń z dokładnością do drugiego znaku dziesiętnego. Prawie wszystkie otrzymały 3 całości z ułamkiem, niektóre nawet 3,14. W kilku wypadkach, gdzie wynik nazbyt odbiegał od tej ostatniej liczby, szczególniej zaś gdy błąd występował już na miejscu całości, nauczyciel polecał powtórnie dokonać pomiarów i obliczeń.

Z szeregu liczb, otrzymanych w trzeciej kolumnie, dzieci zdołały wywnioskować, że stosunek okręgu do średnicy wynosi stale przeszło 3. Wtedy nauczyciel powiedział dzieciom, że, tak jak się tego domyślały, obwód koła jest z a w s z e przeszło 3 razy większy od średnicy, mianowicie 3,14 razy większy.

Dzieci przyjęły to do wiadomości, poczem nastąpiło „sprawdzanie" na różnych kołach, i pogawędka o tem, dlaczego to niewszystkie dzieci otrzymały ten sam wynik, oraz o tem, czy liczba 3,14 całkiem dokładnie wyznacza stosunek długości okręgu do średnicy. Dalsze lekcje poświęcono zadaniom na obliczanie długości okręgu według podanej średnicy lub promienia i odwrotnie, oraz wprowadzeniom symbolu π i wzoru $2 \pi r$.

Nad powyższym odcinkiem pracy wywiązała się ożywiona dyskusja, która doprowadziła do wniosków następujących:

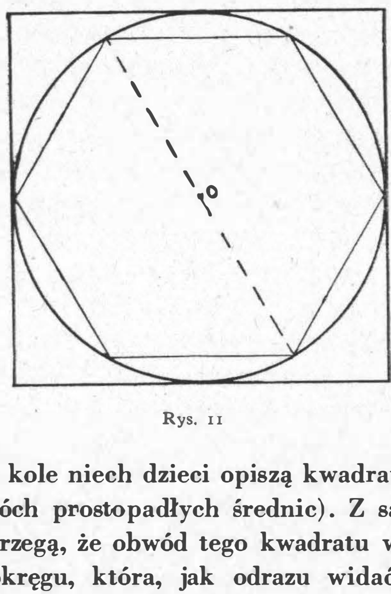
Mierzenie długości okręgu, oraz porównywanie jej z długością średnicy nie wyczerpuje jeszcze zagadnienia. Nie sam fakt mierzenia jest najważniejszy, a nawet i nie doświadczalny proces zdobywania liczby π, lecz f a k t s t a ł e g o s t o s u n k u zachodzącego w każdem kole między okręgiem i średnicą. Że linja okręgu jest dłuższa od średnicy, widać to odrazu; czy jednak w każdem kole stosunek okręgu do średnicy jest ten sam, tego z pomiarów bezpośrednio wywnioskować nie można. Zapytajmy pierwszego dziecka, które zmierzywszy w cm swój okrąg i średnicę, otrzymało np. liczby 30 cm i 10 cm, ile razy średnica jego koła mieści się w długości okręgu; dziecko odpowie: 3 razy. Lecz sąsiad jego, który z pomiarów analogicznych otrzymał np. liczby 20 cm i 6 cm, odpowie: U mnie jest inaczej; średnica m o j e g o koła mieści się w okręgu $3\frac{1}{3}$ razy. Obaj nie będą bynajmniej przeświadczeni, że odpowiedź w obu wypadkach powinna być ta sama.

Jeśli nie chcemy tego przeświadczenia narzucać (jak to właśnie uczynił nauczyciel na swej lekcji pokazowej), musimy czynność mierzenia poprzedzić pewną liczbą ćwiczeń przygotowawczych.

A więc 1) Wielokąty foremne, jak trójkąt równoboczny, kwadrat, nasuną podczas mierzenia obwodów natychmiastowe spostrzeżenia, że stosunek obwodu wielokąta do jego boku jest stały dla każdego z wielokątów; np. dla trójkąta wyraża się liczbą 3, dla kwadratu liczbą 4 itd., niezależnie od długości danego boku. Stąd wyniknie pytanie, czy obwód koła czyli okrąg też pozostaje w stałym stosunku do swego promienia lub do swej średnicy?

2) Dzieci zauważą łatwo, że koła o dłuższej średnicy mają dłuższy okrąg. Drogą doświadczalną możemy doprowadzić do sprecyzowania powyższego spostrzeżenia: koło o średnicy 2, 3, 4 razy dłuższej ma też i okrąg 2, 3, 4 razy dłuższy. To będzie już drugi krok ku pojęciu o stałym związku między okręgiem i średnicą.

3) Polecamy dzieciom wpisać w koło sześciokąt foremny (rys. 11); technika tej konstrukcji jest łatwa i pozwala odrazu na znalezienie związku między obwodem sześciokąta a promieniem koła: obwód sześciokąta = 6 promieni, czyli 3 średnice.



Rys. 11

Na tem samem kole niech dzieci opiszą kwadrat (kreśląc styczne równoległe do dwóch prostopadłych średnic). Z samej techniki rysunku dzieci spostrzegą, że obwód tego kwadratu wynosi 4 średnice. A więc długość okręgu, która, jak odrazu widać z rysunku, jest większa od obwodu sześciokąta, a mniejsza od obwodu kwadratu, musi wynosić więcej niż 3 średnice, a mniej niż 4 średnice, czyli 3 „z ułamkiem".

Teraz dopiero po powyższem przygotowaniu dzieci zabierają się do mierzenia okręgów i średnic, a następnie do obliczania ich stosunku. Jeśli wśród liczb, obliczonych z dwoma znakami dziesiętnemi, powtarza się liczba 3,14 — tem lepiej; nauczyciel podchwyci ją i ustali, jako tę liczbę, według której obliczać będziemy długość okręgu. Że liczba ta jest tylko liczbą przybliżoną, to rozumie się samo przez się; wszak długość okręgu i długość średnicy otrzymaliśmy z pomiarów, a dzieci wiedzą już, że nigdy nie możemy całkiem dokładnie pomiarów dokonać. Gdyby jednak nawet żadne z dzieci, czego nie przypuszczamy, nie natrafiło na liczbę 3,14, przebieg pracy nic się przez to nie zmieni, bowiem ostatnim etapem pracy będzie pogadanka historyczna o tem, jak to ludzie szukali liczby „π“; a wówczas nauczyciel będzie miał sposobność podać wartość liczby π w różnem przybliżeniu i dojść z dziećmi do umowy, że przybliżenie z dwoma znakami dziesiętnemi wystarczy na codzienny użytek.

3. Pole koła.

Próby, które postaram się opisać, zrodziły się w wyniku długiej dyskusji, mającej na celu zbadanie, czy sposób obliczania pola koła może być podany dzieciom drogą doświadczalną, czy też raczej doświadczenie winno być jedynie sprawdzianem wzoru, narzuconego dzieciom z góry.

Większość dyskutujących stała na stanowisku, że zasadniczo narzucanie dziecku gotowych wzorów jest rzeczą niewskazaną i stosowane być może jedynie w wypadkach wyjątkowych, jako zło konieczne. Stąd wynikło dążenie do szukania różnych dróg eksperymentalnych.

Pomysłów mniej więcej znanych zgłoszono sporo, jak np. „przekształcanie" (pozorne oczywiście) koła na trójkąt lub na równoległobok, pokrywanie powierzchni krążka sznurkiem nawijanym płasko dookoła osi krążka, wreszcie obliczanie pola koła przez ważenie odpowiednich figur tekturowych. Z tych różnych dróg wybraliśmy po dyskusji pomysł ostatni, jako najmniej banalny i w dodatku najmniej pod względem naukowym „naciągany". Nęciła nas przytem możliwość ładnej korelacji matematyki z zajęciami praktycznemi i z fizyką.

Przebieg doświadczenia był następujący:

1. Dzieci podzielone na dwie grupy wykreśliły i wycięły z tektury krążki o promieniu równym 5 cm.

2. Jedna z grup oprócz krążków wykreśliła i wycięła trójkąty prostokątne o przyprostokątniach równych odpowiednio 10 cm i 15,7 cm. Drugiej zaś grupie polecono wykreślić prostokąty o wymiarach 5 cm i 16 cm, lub nieco więcej niż 16 cm.

3. Każde z dzieci pierwszej grupy otrzymało polecenie porównania na ważkach ciężaru swego krążka z ciężarem trójkąta. Przewidziane było, jak łatwo poznać po podanych liczbach wymiarowych, że ciężary obu tekturek będą równe.

Każde z dzieci drugiej grupy miało porównać ciężary swego krążka i prostokąta. Jeśli prostokąty, jak było do przewidzenia, okażą się cięższe, polecano dzieciom skrawać je od strony krótszego z boków póty, póki ciężar krążka nie zrównoważy ciężaru prostokąta, co powinno było nastąpić przy długości prostokąta = 15,7 cm.

Jak widzimy, przebieg pracy w dwóch grupach był różny. Uczyniliśmy to celowo, aby dać możność dwom nauczycielom wypróbowania własnych pomysłów; dyskusja po lekcjach miała doprowadzić do oceny, który z dwóch pomysłów dał w praktyce lepsze wyniki.

Na tem skończyła się doświadczalna część pracy. Nastąpiły teraz obliczenia. Każdemu z dzieci polecono obliczyć długość okręgu krążka; ponieważ promień = 5 cm, otrzymały zatem, że długość okręgu = 31,4 cm.

Obliczyły następnie pole trójkąta: $(10 . 15,7) : 2 = 78,5$ cm^2, oraz pole prostokąta: $5 . 15,7 = 78,5$ cm^2; a więc wyniki w obu wypadkach były zgodne.

Czynnik 15,7 cm przy obliczaniu pól trójkątów był dzieciom z góry dany, jako długość jednej z przyprostokątni; w prostokątach dzieci powinny go były otrzymać przez skracanie prostokątów cokolwiek zadługich, bo 16-centymetrowych.

Ponieważ ciężary trójkątów, prostokątów i krążków były jednakowe, a tektura użyta we wszystkich trzech rodzajach figur była tej samej grubości, stąd nasunął się wniosek, że i pola figur były równe. A więc pole koła (krążka) = $5 . 15,7 = 78,5$ cm.

Ostatnim etapem pracy było rozważanie liczb wchodzących w skład iloczynu. Pierwszy czynnik, 5, nie nasunął wątpliwości: była to długość promienia krążka; drugi, 15,7 porównano ze znalezioną poprzednio długością okręgu: była to połowa długości okręgu. Wniosek ostateczny: pole koła obliczymy, mnożąc połowę długości okręgu przez długość promienia.

Tak w czystej formie przedstawiać się miał przebieg eksperymentu. W praktyce jednak natrafiliśmy na duże trudności. Okazało się, że precyzja pomiarów jest dla dzieci nieosiągalna w stopniu takim, którýby gwarantował wystarczająco ścisłe wyniki liczbowe.

W pierwszej grupie, w której pomiary zarówno krążka, jak i trójkąta były dzieciom z góry podane, wycięte figury nie równoważyły się jednak; trzeba je było w trakcie ważenia przycinać i poprawiać, co z kolei wpłynęło na zmianę początkowo obranych liczb wymiarowych. Gorzej jeszcze było z grupą drugą. Ścinanie prostokątów często doprowadzało do nadmiernego skracania, co znów z kolei pociągało brak równowagi między krążkiem i prostokątem, a w drodze dalszych ścinań i poprawek do niszczenia figur bez żadnych pozytywnych wyników. W dodatku pomimo najstaranniejszego dobierania arkuszy tektury, nie była oną wszędzie dokładnie jednej grubości, co również wpłynęło ujemnie na wyniki.

Wobec wyników dalekich od prawdy nauczyciele musieli „dopomóc“ dzieciom, bądź zastępując niezgrabne twory rąk dziecięcych figurami wykonanemi własnoręcznie, bądź też długo a nieprzekonywująco objaśniając popełnione usterki, oraz wyprowadzając wzór na obliczenie koła na drodze teoretycznej.

Tak więc próba przygotowana bardzo starannie i z dużym nakładem trudu nie powiodła się. To jednak nie przesądza, czy w warunkach lepszych, przy większej sprawności dzieci w wycinaniu i ważeniu figur, przy staranniejszym jeszcze doborze tektury (np. gładkiego brystolu) doświadczenie to nie mogłoby dać lepszych wyników. Rzecz jest do wypróbowania. Przemawia za tym tokiem pracy wzgląd na wspomnianą powyżej korelację, oraz wyeliminowanie pierwiastków błędnych pod względem matematycznym i metodycznym, zawartych we wszelkiem „przekształcaniu“ kół na wielokąty równoważne.

Nie przeszkodziło to nam po paru latach wypróbować i innego podejścia, właśnie opartego na owem przekształcaniu. W tym celu przeprowadziliśmy dwie lekcje, każdą rozplanowaną inaczej przez dwie słuchaczki W. K. N.

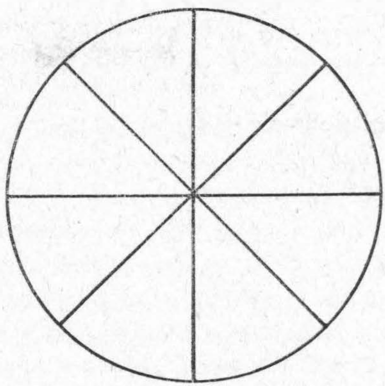
W pierwszej lekcji nauczycielka, nasunąwszy dzieciom w pogawędce zagadnienie: jak obliczyć pole koła, rozdała im krążki papierowe i poleciła zgłaszać pomysły. O d r a z u dzieci orzekły, że należy koło zamienić na taką figurę, której pole umieją już obliczać. Taki bieg myśli był naturalnym wynikiem ćwiczeń poprzednich, gdy obliczając np. pole trójkąta, przekształcały trójkąt na prostokąt, lub obliczając pole trapezu, przekształcały trapez na trójkąt.

Z kolei zadano im pytanie, na jaką figurę zamierzają koło przekształcić. Pomysłów było sporo i bardzo różnych.

Jedno z dzieci zaproponowało, aby obwód koła otoczyć sznurkiem i z tego „zrobić kwadrat“. Oczywiście pomysł ten był z gruntu błędny: figury o równych obwodach nie muszą być figurami o równych polach. Właściwie należało błąd ten mocno podkreślić i dokładnie wyjaśnić. Tego jednak nauczycielka nie uczyniła, dyskwalifikując ten pomysł jedynie ze względu na trudności techniczne; zależało jej bowiem na tem, aby, jak twierdziła, nie rozpraszać uwagi dzieci.

Amatorów „kwadratury koła" było zresztą dużo; wielu z pośród nich chciało poprostu przykroić koło tak, aby z niego pozostał kwadrat, a skrawki pominąć. Na to jednak gwoli dokładności pomiarów nie zgodziły się inne dzieci.

Wreszcie nauczycielka naprowadziła dzieci na pomysł pokrajania kół „szprychami". (rys. 12 a). Zagadnienie odtąd stało się łatwe.

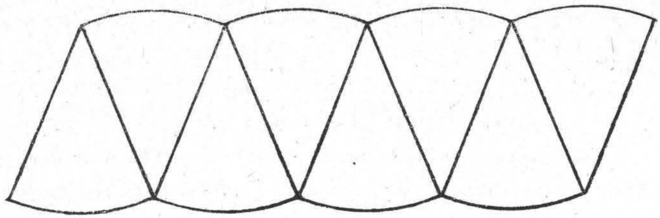


Rys. 12 a

Dzieci krajały koło na wycinki, przyczem otrzymały wskazówkę: wycinków może być, ile kto chce, byle były równe. Jako wzór posłużyło przygotowane przez nauczycielkę duże koło, pocięte promieniami na 16 równych wycinków, zabarwionych naprzemian biało i niebiesko.

Z wycinków układały dzieci następnie dowolnie obrane figury, względnie obliczały pola poszczególnych wycinków, biorąc je bez ceremonji za trójkąty. Mówiły o nich: to są „prawie trójkąty", to są trójkąty „o podstawie trochę wygiętej". Większość ułożyła z wycinków „niby-równoległobok" (rys. 12 b), przyczem odrazu dostrzegły, że długość podstawy tego równoległoboku jest równa długości połowy okręgu, a wysokość równa promieniowi.

Nauczycielka miała również w odwodzie taki niby-równoległo-



Rys. 12 b

bok ułożony z 16 białych i niebieskich wycinków; pokazała go jednak całkiem słusznie dopiero wtedy, gdy dzieci już swoje równoległoboki poukładały. Uczyniła to w celu osiągnięcia lepszego i jaśniejszego porozumienia z klasą; duży równoległobok, wiszący na tablicy przed oczyma klasy, porównywany przez dzieci z ich własnemi figurami, pomagał wyciągać wnioski, dotyczące podstawy, wysokości itd.

Lekcja, przeprowadzona z drugą grupą dzieci oparta była również na podziale koła na wycinki, lecz bez układania z tych wycinków jakichkolwiek wielokątów.

Nauczycielka posiłkowała się jedynie rysunkiem; dzieci w swych zeszytach (a jedno z nich na tablicy) kreśliły koło i promienie w kole, następnie rozważały różnice i podobieństwa między trójkątem, a wycinkiem kołowym. Doszły do wniosku, że wycinek, to „taki trójkąt", który ma dwa boki proste, a trzeci wygięty w łuk. Przeprowadziwszy cięciwę tego łuku, doszły z pomocą nauczycielki do wniosku, że pole wycinka jest nieco większe od pola trójkąta, że jednak jeśli będziemy wykreślali w kole bardzo małe wycinki, różnica między wycinkiem a trójkątem będzie coraz mniejsza.

Następnie nauczycielka pokazała im koło porozcinane na wycinki tak, że wszystko razem trzymało się na wąziutkim pasku i rozciągnąwszy to koło „w grzebień", doszła z dziećmi do wniosku, że podstawy wszystkich „trójkątów" tworzą obwód koła. Stąd już łatwa była droga do wniosku, jakie działania wykonać należy, aby obliczyć pole koła.

Jak widzimy, obie próby powyższe opierały się na tem samem podejściu metodycznem: na podobieństwie między wycinkiem koła a trójkątem. Kryły się w tym punkcie wyjścia różne niebezpieczne momenty. O ile nauczycielka nie próbowała rozważać różnicy między wycinkiem a trójkątem, wówczas ze strony dzieci albo dawały się słyszeć protesty, dotyczące w szczególności owych falistych „boków równoległoboku“, albo, co może było drogą najprostszą, dzieci całkiem nie troszczyły się o różnice między odnośnemi figurami i obliczały pola wycinków, a więc i całych kół, przez analogję do trójkąta, lub równoległoboku.

O ile zaś nauczycielka, jak w próbie drugiej, starała się wykazać stopniowe zmniejszanie się różnicy między polem wycinka a polem trójkąta w miarę zmniejszania się łuku, względnie jego cięciwy, wówczas rozważania zahaczały o pojęcie całkowicie dziecku niedostępne, o pojęcie granicy. Wówczas właśnie inteligentniejsze z pośród dzieci protestowały, twierdząc zupełnie słusznie, że choćby wycinki były „nie wiem jakie małe“, nigdy ich łuk nie będzie linją prostą.

Z prób powyższych wynikła ożywiona dyskusja, która doprowadziła do wniosków następujących:

Jeśli chcemy doprowadzić dzieci drogą przekształceń do obliczenia pola koła bez popełnienia poważnych błędów naukowych, natrafiamy na trudność nie dającą się uniknąć, a tkwiącą w samej niemożności przekształcenia koła w wielokąt. Żadne pokazy ani wycinanki nie wmówią inteligentnemu dziecku, że może z koła zrobić równoległobok, czy inną figurę prostolinijną. Pozostaje konieczność poddania dziecku pomysłu, opierającego się na analogji między danemi figurami. Starajmy się uczynić to możliwie zgodnie z psychiką dziecka, a zarazem nie popełniając krzyczących błędów naukowych.

Z prób dokonanych widzimy, że dzieci same wpadają na myśl obliczenia pola wycinka kołowego na wzór pola trójkąta. Rozumują więc przez analogję: wycinek wygląda podobnie do trójkąta, więc pewno i pole jego podobnie się oblicza. Ani chwili jednak nie tracą pewności, że wycinek jest co innego niż trójkąt, i my nie próbujmy im tego wmawiać, tłumacząc, że podstawa rzekomego równoległoboku jest „prawie prosta“, że różnica jest „nieznaczna“ itd. Tembardziej nie wdrażajmy dzieciom (w dodatku bardzo nieściśle) pojęcia granicy.

Wystarczy, gdy potwierdzimy domysł dziecka i pozwolimy mu obliczyć pole koła jako sumę pól wycinków. Czy wycinki te ułożone zostaną w kształt „równoległoboku“, czy w kształt grzebienia, dojście do wzoru ostatecznego drogą zużytkowania prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania będzie oczywiste.

4. R z u t y.

O ile w programach lat poprzednich zakres t. zw. geometrji wykreślnej miał rozmiary bardzo pokaźne, o tyle w programie obecnym niemal cały materjał tego działu został zredukowany. Pozostały pojęcia całkiem elementarne: rzuty prostopadłe punktów na osi, jako zastosowanie, zdjęcie planu metodą rzutowania punktów na oś. (Natomiast jako punkt nowy wprowadzony został rzut ukośny równoległy, który omawiam osobno).

Jak zawsze w wypadkach redukcji programu, nauczycielowi trudno odrazu ustalić, co z dawniejszego programu stało się zbędne; wobec czego często, siłą przyzwyczajenia, w program wymagany przez władze wplata on epizody z progamu, który przez szereg lat przerabiał.

To właśnie zdarzało mi się niejednokrotnie zauważyć w dziedzinie nauki o rzutach: nauczyciel całkiem zbytecznie kładł wiele trudu i czasu w opracowywanie np. rzutów odcinków, a nawet wielokątów i okręgów na płaszczyznę, choć cały dalszy ciąg pracy wcale tego nie wymagał.

Na P. W. K. N. nieraz toczyliśmy na ten temat dyskusję; wreszcie postanowiliśmy ustalić możliwie szczegółowo plan pracy w ramach nowego programu. Referatu odnośnego podjął się jeden ze słuchaczy, przyczem on i jeszcze jeden z kolegów zademonstrowali wobec dwóch grup kl. V pierwszą lekcję o rzutach.

Referent słusznie zaczął od ustalenia pojęć, które dziecko musi opanować, zanim przystąpimy do nauki rzutów. A więc musi umieć kreślić prostopadłe i, co najważniejsze, nie plątać pojęcia linij prostopadłych z pojęciem poziomych i pionowych, musi zdawać sobie sprawę z tego, że odcinek prostopadły jest najkrótszą drogą od punktu do prostej, a przeto służy do mierzenia odległości punktów od prostej, wreszcie rozumieć pewne wyrażenia techniczne:

punkt na prostej, punkt poza prostą, spuścić lub wystawić prostopadłą itd.

Z takiem przygotowaniem łatwo opanuje materjał, który składać się będzie z etapów następujących:

1) Rzut punktu na oś; różne położenia osi i punktów, znakowanie rzutów i punktów. Terminy: oś rzutów, promień rzutujący, rzut punktu, wreszcie nazwa czynności „rzutować" (a nie „rzucać").

2) Odnajdywanie punktu, którego rzut jest dany; cecha rzutu, jej znak.

3) Przerysowywanie wielokątów i planów metodą rzutowania wierzchołków na oś. Wybór osi rzutów, wybór początku osi, jednostki miary, skali.

Po dyskusji nad referatem, który zresztą skutkiem braku czasu został szczegółowiej opracowany tylko w punktach 1 i 2, ustaliliśmy wnioski następujące:

Należy podawać jak najmniej terminów; termin „promień rzutujący" pominąć; termin „cecha" zastąpić terminem znanym już dzieciom „odległość", przyczem wprowadzić umowę co do oznaczania, po której stronie osi punkt się znajduje. Osądziliśmy, że zamiast terminów „u góry, u dołu, na lewo, na prawo", lepiej wprowadzić znak + i —, co przecie jeszcze jest dalekiem od wprowadzenia liczb względnych.

Lekcje, przeprowadzone z dwiema grupami dzieci przez referenta i przez jednego z kolegów miały za temat tylko pierwszy etap pracy: rzut punktu na prostą. Różniły się one tylko ilością i jakością pokazów i doświadczeń, jak: rzut kawałka kredy na poziomą płaszczyznę, swobodne padanie kropli wody, rzut małej kulki papieru umoczonej w atramencie itd. Wszystkie te pokazy demonstrowały rzut punktu na płaszczyznę.

W dyskusji zaznaczono brak pokazów, ilustrujących rzuty punktu na prostą; wszelkie jednak pomysły, jak np. rzut kredy na listwę tablicy, kropla wody spływająca po tablicy (ustawionej pionowo) na przeciągnięty sznurek, wreszcie pion, ocenione zostały jako technicznie dość niezręczne, a o wiele mniej plastyczne od rysunku.

Z refleksyj, które osobiście mi się nasunęły po referacie i po obu lekcjach, notuję niektóre.

Czy nie przywiązujemy zbyt wielkiej wagi do tego, aby koniecznie nawiązać termin „rzut" do czynności rzucania jakiegoś przedmiotu? Sądzę, że wystarczyłby jeden jedyny pokaz, dajmy na to spadającego swobodnie przedmiotu, aby wyraz „rzut“ znalazł zaczepienie w umysłach dzieci. Reszta jest umową, bardzo zresztą łatwą i prostą.

Trud obmyślania szeregu doświadczeń nietylko tu się nie opłaca, lecz nawet niezawsze przynosi pożytek, bowiem zbyt mocne skojarzenie rzutowania z wyobrażeniem spadającego przedmiotu może dziecku niejednokrotnie przeszkadzać w zrozumieniu czynności, jakie ma wykonać. Spotykałam fakty, że dzieci, zasugestjonowane „spadaniem“ przedmiotu nie umiały odnaleźć rzutu punktu w wypadku, gdy oś rzutów nie zajmowała położenia poziomego, lub gdy punkt znajdował się poniżej osi; koniecznie bowiem twierdziły, że rzut punktu musi padać „zgóry na dół“.

Zamiast zatem dążyć uparcie do tzw. poglądowego objaśniania sprawy, która nic zawiłego nie przedstawia, czy nie słuszniej byłoby czas oszczędzony zużytkować na ćwiczenia w kreśleniu rzutów punktów dowolnie położonych na dowolną oś ze zwróceniem między innemi uwagi na pewne szczególne wypadki, jak rzut punktu, znajdującego się na samej osi, rzuty punktów leżących na jednej prostopadłej względem osi itd.

To ostatnie ćwiczenie ułatwi następnie ćwiczenie odwrotne: znajdowanie punktu na zasadzie rzutu danego na osi.

Z dalszych etapów pracy należałoby zwrócić uwagę na czytanie, a nietylko na kreślenie planów, oraz na wdrażanie do samodzielnego wyboru osi w położeniu najdogodniejszem do dalszych kreśleń.

Ważnem jest również przy kopjowaniu planów, aby uczeń przed rozpoczęciem pracy ustalał, jakie proste musi na planie przeprowadzić i jakie wykonać pomiary, aby móc wszystkie szczegóły planu dokładnie skopjować. Często bowiem już w trakcie rozpoczęcia roboty uczeń spostrzega brak potrzebnych danych, co gmatwa i hamuje dalszy przebieg pracy.

5. Rzut ukośny równoległy.

Wprowadzenie do nowego programu matematyki rzutu ukośnego równoległego wywołało chwilowy niepokój wśród nauczycielstwa. Dotychczas na terenie szkoły powszechnej operowano jedynie rzutem prostokątnym, zato w zakresie aż nazbyt rozległym. Wchodziły do programu: rzuty i kłady odcinków i figur płaskich na dwie płaszczyzny rzutów, rzuty brył na trzy płaszczyzny, a nawet przekroje brył.

Zredukowanie tego materjału do rzutu punktu na oś rzutów, a wprowadzenie na to miejsce materjału całkiem nowego, dotychczas nieuwzględnionego, musiało z konieczności wywołać zamęt w pojęciach.

Próba, jaką przeprowadziliśmy na P. W. K. N., daje dowód, że ten odcinek programu, racjonalnie przygotowany, nie przedstawia dla dzieci specjalnych trudności.

W każdej z dwóch grup kl. VI poświęciliśmy temu zagadnieniu dwie godziny. Nie wystarczyło to, oczywiście, na opanowanie materjału, lecz było w zupełności dostatecznem, aby wprowadzić pojęcie i przerobić trochę wstępnych ćwiczeń. Duże różnice w planie pracy na każdej z grup tembardziej wzbogaciły nasz materjał doświadczalny.

Jeden z nauczycieli prowadzących lekcję obrał za punkt wyjścia badanie cieni brył w słońcu. Przygotował sobie w tym celu z cienkich pałeczek drewnianych modele odcinków, kwadratów, oraz szkielety sześcianów.

Dzieci w ogródku szkolnym badały najpierw cień odcinka na ziemi, oraz na ścianie, w położeniu równoległem i nierównoległem do płaszczyzny rzutów; między innemi też badały cienie odcinków prostopadłych do płaszczyzny, na którą cień padał. Po szeregu obserwacyj i pomiarów doszły do wniosku, że długość cieni odcinków równoległych do płaszczyzny oświetlonej jest zawsze równa długości odcinków; natomiast we wszelkich innych położeniach, cienie bywają przeważnie skrócone lub wydłużone. Następnie zbadały w kilku położeniach cień kwadratu (właściwie cień konturu kwadratu zrobionego z drewnianych listewek). Zauważyły, że, po pierwsze, boki równoległe kwadratu pozostały równoległemi i na cieniu; po drugie, kąty proste czasem pozostają prostemi, czasem ulegają zmianie. Zawsze jednak pozostają one na cieniu prostemi, gdy kwadrat znajduje się w położeniu równoległem do płaszczyzny, na którą cień pada.

Wreszcie zbadały dzieci cień szkieletu sześcianu, obrysowując ów cień patykiem na piasku, kredą na szarej ścianie; przyczem dla ustalenia położenia bryły i ułatwienia rysunku ustawiono sześcian bezpośrednio na ziemi, jedna ze ścian zatem swój cień pokryła. Obserwacje dokonane poprzednio na odcinkach i kwadratach znalazły tutaj potwierdzenie. Dzieci same zauważyły wielkość i rodzaj zmiany kątów, oraz zmianę długości odcinków zależnie od kierunku promieni słonecznych.

Po tych wstępnych ćwiczeniach nastąpiło zestawienie spostrzeżeń, oraz zmiana terminologji „cień“ na „rzut ukośny równoległy“.

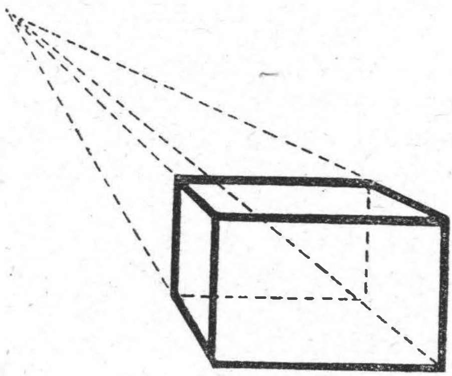
Pozostałą pracę nauczyciel wykonał w klasie, powołując się często na poczynione uprzednio obserwacje. Polecił dzieciom nakreślić w zeszytach, a jednemu z dzieci na tablicy, jeden z poprzednio obserwowanych szkieletów sześcianu w rzucie ukośnym równoległym. Sześcian był ustawiony na podstawie poziomej, przyczem jedna z jego ścian przylegała do białego ekranu, grającego rolę płaszczyzny rzutów.

Dzieci przed przystąpieniem do pracy omówiły poszczególne elementy rysunku, zmierzyły krawędź, obrały skalę, w której wykonają rysunek w rzutach. I oto wyłoniła się trudność: „Nie wiemy, jak się zmieniły kąty i boki tych ścian, które leżą prostopadle do płaszczyzny rzutów“. Nasunęła się więc konieczność u m o w y w sprawie a) kąta skręcenia, b) stosunku skrótów (terminy podane zostały dopiero w tym momencie). Dalej już wykonanie rysunku nie natrafiło na trudności.

Metoda, którą obrał nauczyciel, prowadzący lekcję z drugą grupą, różniła się biegunowo od poprzedniej.

Wyszedł on mianowicie od rysunku perspektywicznego, który dzieci znały trochę z lekcji rysunków odręcznych. Polecił dzieciom mianowicie narysować pewien prostopadłościan tak jak go widzą.

Przed rozpoczęciem pracy omówił ją z dziećmi: które ściany bryły widzą dzieci z różnych punktów klasy, które krawędzie wydają im się dłuższe, które — krótsze, które — równoległe, które się pozornie zbiegają, które kąty zmieniły kształt itd. Przy sposobności krótka pogawędka o tem, że przedmioty wydają się nam tem mniejsze, im bardziej są od nas odległe, skąd wynikło uzasadnienie pozornej nierówności krawędzi bryły.



Rys. 13 a

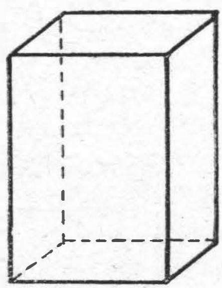
Wybrawszy następnie parę lepszych rysunków, nauczyciel przyczepił je na tablicy; obok nich przedstawił rysunek tego samego prostopadłościanu z krawędziami przedłużonemi, schodzącemi się w jednym punkcie, który nazwany został środkiem widzenia („Jak szyny", mówią dzieci. Rys. 13 a).

Po tym wstępie, nawiązując do czasu, jakiego rysunek powyższy wymagał, oraz do trudności, jakie się w wykonaniu nasunęły, nauczyciel doprowadził dzieci do wniosku, że chociaż rysunek wykonany w perspektywie t. zw. malarskiej jest całkiem prawidłowy, bo odtwarza przedmiot właśnie tak, jak go widzimy, lecz dla nauki geometrji jest niepraktyczny: jest zbyt trudny; wymaga długiej uprzedniej nauki; pochłania dużo czasu; na podstawie rysunku perspektywicznego nie możemy łatwo zorjentować się w wymiarach poszczególnych elementów bryły itd.

Stąd wniosek praktyczny: będziemy na lekcjach geometrji, w rysunkach technicznych itd. rysowali przedmioty nie tak, jak je naprawdę widzimy, lecz prościej, łatwiej, według pewnych umówionych sposobów.

Tutaj nauczyciel pokazał model prostopadłościanu wraz z jego rzutem na płaszczyznę, przyczem druciki, poprowadzone od wierzchołków bryły do płaszczyzny rzutów, wyobrażały promienie rzutujące.

Dzieci orzekły, że gdy promienie rzutujące są (jak na modelu) równoległe do siebie, to krawędzie równoległe bryły pozostają i na



Rys. 13 b

rysunku równoległemi, równe między sobą pozostają równemi. Ale jedne z nich zachowują w rzucie wielkość naturalną, inne ulegają skrótowi, rzuty kątów prostych czasem są kątami prostemi, czasem stają się kątami ostremi lub rozwartemi.

Badając na modelu położenie ścian prostopadłościanu względem płaszczyzny rzutów, dzieci z łatwością doszły do wniosku, że ściany równoległe do płaszczyzny rzutów nie zmieniają w rzucie ani kształtu, ani wielkości; rzuty innych ścian pozostają wprawdzie równoległobokami, lecz nie prostokątami. Wówczas nauczyciel podał im liczby, potrzebne do samodzielnego wykonania rysunku: wymiary prostopadłościanu, skalę, kąt skręcenia, stosunek skrótów. Rysunek nie nasunął trudności (Rys. 13 b).

Porównywując obie próby, doszliśmy po ożywionej dyskusji do wniosku, że po pierwsze, ważną jest rzeczą porównywanie rysunku w perspektywie malarskiej z rysunkiem w rzucie ukośnym równoległym i zwrócenie uwagi dzieci na zgodność pierwszego z nich z naszemi oczyma, podczas gdy drugi jest tylko wynikiem pewnej umowy. Dzieci zrozumieją, że krajobraz namalowany przez artystę, zdjęcie fotograficzne czynią wrażenie prawdy, bo odtwarzają przedmioty tak, jak się one przedstawiają naszym oczom. Ale w nauce, w technice używamy rysunku w rzucie ukośnym równoległym ze względu na jego prostotę i przejrzystość.

Powtóre, pewien drobny szczegół z drugiej lekcji doprowadził do wniosku, że badanie cienia bryły w słońcu w dużym stopniu ułatwia dzieciom zrozumienie techniki wykonania rzutu ukośnego równoległego. Mianowicie, obserwując na modelu druciki, przeciągnięte od wierzchołków bryły do odpowiednich punktów rysunku w rzucie, dzieci zauważyły samorzutnie, że „to wygląda jak promienie słońca". Słuszną więc jest rzeczą poprzedzić umowę co do rzutu ukośnego równoległego obserwacją cieni brył, a lepiej jeszcze cieni szkieletów brył w słońcu. Zarzuty stawiane przez niektórych nauczycieli, że promienie słoneczne nie są całkiem równoległe, nie wytrzymują krytyki, gdyż dzieci tych różnic zauważyć nie są w stanie.

W dalszym ciągu dyskusji należało rozstrzygnąć wątpliwość w jakim zakresie i w jakim porządku wprowadzać rysunek w rzucie ukośnym równoległym. Jakkolwiek bowiem program mówi jedynie o „umiejętności rozpoznawania figur płaskich, graniastosłupów prostych i walców obrotowych", oraz „o rozumieniu rysunku graniastosłupa prostego w rzucie równoległym ukośnym", stanęliśmy jednak na stanowisku, że jeśli uczeń ma naprawdę rozumieć i rozpoznawać, musi własnoręcznie wykonać pewną liczbę rysunków w danym rzucie. Stąd ustaliliśmy taki maksymalny wykaz pożądanych rysunków, oraz następujący ich porządek:

a) sześcian (w położeniu najłatwiejszem względem płaszczyzny rysunku); b) prostopadłościan dowolny; c) kwadrat i prostokąt (jako składowe elementy brył uprzednio wykreślonych w całości); d) trójkąt, przyczem dla wykonania tego rysunku opisujemy na trójkącie prostokąt; e) wielokąt dowolny lub koło (również przy pomocy opisanego prostokąta); f) walec, wreszcie parę brył dowolnych według wyboru nauczyciela.

Równolegle z kreśleniem iść musi czytanie rysunków w rzucie ukośnym równoległym, czyli opis kształtu i obliczenie wymiarów (pól, objętości) bryły czy figury płaskiej danej w rysunku.

DYSKUSJE
NA TEMATY OGÓLNIEJSZE

1. Zadania układane przez dzieci.

Zadania, układane przez dzieci, stanowią dla nauczyciela poważny sprawdzian umiejętności dziecka i zrozumienia przez nie danego działania. Dziecko, układając zadanie, ma już przeważnie w myśli plan jego rozwiązania, a więc rozumie swe zadanie; sformułowanie treści czasem jest naśladownictwem posłyszanego szablonu, czasem — wyrazem osobistych upodobań.

Zakres liczbowy „własnego" zadania jest w większości wypadków przykrojony do możliwości wykonawczych dziecka; zauważyć łatwo, że dzieci, nie mające wprawy w liczeniu, dobierają w swych zadaniach liczby łatwe, okrągłe, podczas gdy zdolni rachmistrze lubują się w wielkich liczbach i trudnych kombinacjach.

Błędy popełniane przez dziecko we własnych jego zadaniach mogą nauczycielowi wiele powiedzieć o poziomie umysłowości i o psychice ucznia. Często dziecko nie umie dostosować treści do działania, o które idzie; np. zamiast zadania na mnożenie ułamków, układa zadanie na dzielenie, i odwrotnie; widać stąd, że nie rozumie jeszcze dość jasno tych działań. Często w trakcie układania zadania gubi wątek i nie wie samo, o co mu szło początkowo, a więc brak mu planu pracy, którą ma wykonać. Często wreszcie, mając w głowie zupełnie rozsądną treść zadania, nie potrafi wyrazić jej słowami i błędnie formułuje swe myśli; szwankuje zatem raczej zdolność językowa niż myślowa.

Zadania, układane przez uczniów pozwalają nauczycielowi wejrzeć głębiej w zainteresowania dziecka. Będziemy mieli zadania o treści egzotycznej: podróże po dalekich krajach, słonie, wieloryby; o treści technicznej: pociągi, aeroplany, maszyny; o treści praktycznej: kupno, sprzedaż, warunki pracy; wreszcie zadania całkiem banalne, podyktowane przez ubogą wyobraźnię: mamusia kupiła..., ktoś wydał..., ile zostało... itd.

I tu nasuwa się pytanie, jak zużytkować tę różnorodną pomysłowość ku pożytkowi całej klasy? Czy owe zadania mają pozostać tylko sprawą prywatną między nauczycielem i uczniem, czy też mogą i powinny stać się wspólnym dorobkiem ogółu dzieci?

Chcąc tę sprawę rozstrzygnąć głębiej, wykonałam następujący eksperyment. Dzieci w danym okresie klasy VI przerabiały z arytmetyki mnożenie i dzielenie ułamków, z geometrji — obliczanie długości okręgu. Poleciłam każdemu z dzieci napisać na oddzielnych kartkach po dwa zadania: jedno na mnożenie przez ułamek, drugie na dzielenie. Tematy geometryczne były pozostawione woli dzieci.

Przejrzawszy kartki i poprawiwszy je pod względem językowym, lecz nie zmieniając ich treści matematycznej, zrobiłam „klasówkę", przyczem każde z dzieci dostało jedną kartkę kolegi. Zainteresowanie było bardzo duże. Autorzy byli zaciekawieni, komu się ich praca dostanie; wykonawcy uważnie notowali nazwiska autorów. Nie przeszkodziło to krytyce; dawały się słyszeć głosy, potępiające bądź zewnętrzną szatę zadania: napisane nieczytelnie, krzywo, brudno, bądź treści: niezrozumiałe, zbyt długie, nieprawdopodobne, niemądre, za łatwe, bądź wreszcie dobór liczb: ceny niezgodne z prawdą, ułamki niedające się skrócić, miary źle użyte. Te spostrzeżenia koleżeńskie były oczywiście o wiele dla dzieci cenniejsze, niż wszelkie uwagi nauczyciela.

Ponieważ klasówka nie wyczerpała wszystkich zadań ułożonych przez dzieci, część ich odrabiałam na lekcji z całą klasą. Tym razem szło mi o głośną krytykę i korektę ogółu.

Po przeczytaniu zadania i zanotowaniu danych na tablicy i w zeszytach, zapytywałam dzieci, co mają do powiedzenia o tem zadaniu, co jest w niem błędne, lub nieprawdopodobne. Uzgodniwszy zarzuty z całą klasą, poprawialiśmy dane, a następnie wykonywaliśmy zadanie. Czasem znów pozwalałam wykonać zadanie bez poprawek; krytyka następowała później w związku z otrzymanemi wynikami. Oto przykłady:

1) Za $^5/_7$ kg masła zapłacono 2,95 zł. Znaleźć cenę 1 kg.

Dzieci odrazu orzekły, że żaden kupiec nie sprzeda $^5/_7$ kg i poprawiły na $^5/_8$, bo „na ósemki masło sprzedają". Również i cenę 1 kg masła skrytykowały, jako w danej chwili zbyt wygórowaną.

2) Z parceli, wynoszącej 25 m^2, odcięto $^2/_5$ na ogród. Ile m^2 zajął ogród?

Dzieci nie zgłosiły protestu, wobec czego pozwoliłam im wykonać zadanie, skąd otrzymały pole ogrodu = 10 m². Następnie poprosiłam o określenie „na oko“ wymiarów klasy. Podały liczby: długość około 8 m, szerokość około 5 m. Gdy obliczyły pole podłogi, powstał śmiech: „Cóż to za parcela, która mogłaby się prawie dwa razy zmieścić w tym pokoju! A ogród jak czwarta część klasy! Pewno autor chciał podać liczbę 250 m², zamiast 25 m²!

3) Okręt na 15 dni drogi zabrał 2500 tonn węgla. Ile węgla potrzeba mu na $8^2/_8$ tygodnia?

Tutaj krytyka dotyczyła głównie owych $8^2/_8$ tygodnia. „Tydzień ma 7 dni. Nikt nie dzieli tygodnia na ósme części. W dodatku lepiej już powiedzieć $^1/_4$ zamiast $^2/_8$“. Na razie nikt nie zaatakował owych 2500 tonn. Ale na powtórne pytanie, czy nic nie mają więcej do powiedzenia, jeden z uczniów odezwał się nieśmiało: „Zdaje się, że 2500 tonn węgla na 15 dni to trochę za dużo“.

Zaczęliśmy o tem pogawędkę. Ile tonn zawiera jeden wagon węgla? 10 do 15-tu. A więc 2500 tonn to, licząc 1 wagon za 10 tonn — około 250 wagonów, czyli 10 pociągów po 25 wagonów. Chyba to nieprawdopodobne; nawet pewno na okręcie tyle się nie zmieści. A więc ile? Tu przyznałam się uczciwie do niewiedzy, dodając jednak, że gdybym układała takie zadanie, postarałabym się tego najpierw dowiedzieć. Był to zarazem pewien chwyt wychowawczy: sprawa sumiennego przygotowania się do pracy.

4) Pudełko ma 10 cm długości, a 4 cm szerokości. Objętość pudełka wynosi 1 m³. Obliczyć wysokość pudełka.

Z tego zadania autor był bardzo dumny: sam jeden w całej klasie ułożył zadanie „o objętości“! Pozwoliłam wykonać to zadanie bez komentarzy. Było trochę kłopotu z zamianą 1 m³ na cm³, w końcu jednak dzieci wyliczyły, że 1 m³ to ni mniej ni więcej tylko miljon cm³. Po dokonanej zamianie sam autor się zaniepokoił, czy to aby nie za dużo. A gdy po wykonaniu działań otrzymał jako wysokość pudełka 25000 cm, czyli 250 metrów, śmiał się razem z innymi z tej „wieży“, którą w zadaniu umieścił. Zadanie to rzuciło dużo światła na miary sześcienne i na ich związek z linjowemi.

W dyskusji nad powyższemi eksperymentami dały się słyszeć głosy, że próby podobne istotnie rzucają dużo światła na psychikę i zasób wiadomości dziecka, lecz w normalnym trybie pracy niema na nie czasu.

Myślę, że tkwi w tem pewne nieporozumienie. Istotnie, nauczyciel przy przerabianiu kursu nawet w ramach obecnego programu nie ma ani chwili do stracenia. Jednak dzieci niejednokrotnie są przez nauczyciela powoływane „na ochotnika“ do układania zadań, tylko czynią to przeważnie ustnie, a nie piśmiennie, krytykę zaś bierze na siebie całkowicie nauczyciel, a nie współtowarzysze pracy. Przy owem krytykowaniu pomysłów dziecięcych traci się nieraz sporo czasu i faktycznie się go t r a c i, bo reszta klasy w owej korekcie nie jest wcale zainteresowana, a sam delikwent wie tyle tylko, że się „pomylił“ i że należy ostrożniej zgłaszać się na ochotnika.

Natomiast krytyka lub aprobata kolegów, to całkiem co innego, to nietylko zły lub dobry stopień, lecz dowód uznania lub lekceważenia g r o m a d y! Przytem z kolegami można się sprzeczać, co czyni sprawę bardziej ważką. Z drugiej strony klasa, powołana do wypowiadania się, musi głębiej wniknąć w daną kwestję. Często pewne zagadnienia matematyczne dopiero w oświetleniu gromadnej dyskusji stają się dzieciom jasne. Warto zatem od czasu do czasu poświęcić godzinę na wspólną z całą klasą ocenę zadań układanych przez dzieci.

2. Wstępy do lekcyj.

Poruszaliśmy tę całkiem ogólną sprawę na naszych dyskusjach w przeświadczeniu, iż jest ona bolączką lekcyj rachunków bardziej, niż innych przedmiotów, a bolączką lekcyj t. zw. pokazowych bardziej, niż tych, które nauczyciel w normalnym trybie przerabia.

Istotnie, na lekcji przyrody okaz: roślina, rysunek itd. już same stanowią punkt wyjścia. Na lekcji języka może tę rolę odegrać czytanka. Natomiast temat rachunkowy, np. znajdowania ułamka danej całości, często wprowadza nauczyciela w kłopot: jak tu podejść do tematu w sposób „zajmujący"? Stąd owe „wstępy" niejednokrotnie całkiem zbytecznie obciążające lekcję.

Oto parę przykładów: Nauczycielka zaczyna od pytania: co się robi przed zimą? Odpowiedź dzieci: „Opatruje się okna watą, obija drzwi, kupuje ciepłą odzież, itd.". — „A czy robi się zapasy? Jakie zapasy?" Stąd długie opowiadania dzieci o... konserwach z pomidorów i jarzyn itd. Aż w końcu któreś rzuciło słowo „ziemniaki". Aha, więc kupujemy na zimę ziemniaki. Ile? Poczemu? Znowu długie dyskusje dzieci: korzec, pół korca, po 3 zł, po 5 zł itd. Aż w końcu (po upływie 20 minut) dochodzimy do sedna rzeczy: W pewnym domu kupiono $^1/_4$ korca ziemniaków po 3 zł itd.

Co dała dzieciom i nauczycielce cała ta pogawędka? Niewątpliwie nic po za stratą czasu. Jeśli bowiem szło o postawienie lekcji na gruncie życiowym, zadanie o „pewnym domu" niczem nie było związane z dziećmi, ani też nie mogło wywołać ich specjalnego zainteresowania.

Czy nie prościej było, skoro szło o taką a nie inną treść zadania, zacząć odrazu od pytania: poczemu kupujemy obecnie ziemniaki, — a stąd: ile zapłacimy za $^1/_2$ korca, za $^1/_4$ korca, za $^3/_4$ itd, po tej samej cenie. Zagadnienie nie straciłoby nic na aktualności, a zyskałoby na bezpośrednim kontakcie z życiem dzieci.

Inny przykład: nauczyciel wprowadza w VI klasie pojęcie równoległoboku. Ponieważ jest to w danym roku pierwsza lekcja geometrji, zaczyna więc od pytania, jakie figury geometryczne poznały zeszłego roku. Dzieci wymieniają bezładnie: prostokąt, kąt, linje proste, krzywe, sześcian itd. O każdym z tych utworów pogawędka: co to jest, jak wygląda, itd. Aż dopiero po takim wstępie następuje pokaz prostokąta i równoległoboku, oraz porównanie tych czworoboków.

Czy nie prościej byłoby zacząć prosto z mostu: pokazać dane figury i przeprowadzić porównanie? Gdyby się okazało, co trudno przypuścić, że dzieci tak doszczętnie zapomniały o prostokącie, iż nawet jego nazwa uciekła im z głowy, byłoby miejsce na doraźne powtórzenie tego odcinka pracy zeszłorocznej bez długich omówień.

Przykładów takich możnaby cytować bez liku. Zdaje mi się, że owe długie i niepotrzebne wstępy mają swe źródło w pewnem pomieszaniu pojęć: mamy złudzenie, że pogawędka z dziećmi już sama przez się wystarcza, aby obudzić zainteresowanie. Tymczasem dzieje się odwrotnie: zainteresowanie dzieci wyładowuje się w rozmowie; jeśli jednak po owej rozmowie następuje zadanie, czy obliczenie nie przedstawiające nic ciekawego, to i najdłuższa rozmowa nie zdoła ciekawości obudzić. Nawet czasem osiągamy efekt wprost przeciwny: wstępną rozmową stwarzamy pozór, że oto nastąpi coś bardzo zajmującego, aż tu wszystko kończy się na stereotypowem zadaniu: „jedna pani...“ albo: „w pewnym domu...“ itd. Wobec czego następuje tembardziej zniechęcenie i nuda.

Wniosek: jeśli temat sam przez się może dzieci zainteresować, jak to ma miejsce w wypadku, gdy z treścią lekcji związane są pokazy, kreślenie, wycinanie, itd., strzeżmy się „dolewania wody“, w której może się rozpłynąć cała ciekawość i zapał klasy, lecz odrazu przystępujmy do rzeczy; niech dzieci nie czekają zbyt długo na stwierdzenie, w jakim celu rozdano im np. nożyczki, lub co się będzie działo z figurą przypiętą przez nauczyciela na tablicy.

Jeśli zaś temat jest nieciekawy, (a przecie i to się może zdarzyć), nie próbujmy sztucznemi środkami ożywiać atmosfery, lecz starajmy się pracować w szybkiem tempie i z możliwie najmniejszą stratą czasu, nastawiając dzieci na odważne pokonanie nudnej ale koniecznej pracy w imię płynących z niej właśnie ciekawych korzyści.

3. Wykresy porównawcze.

Nowy program matematyki, wyrzucając ze szkoły powszechnej naukę równań i funkcyj, wyrzucił tem samem i wykresy funkcyj, pozostawiając jedynie wykresy empiryczne i dopiero w klasie VII. Zmianę tę powitali z radością wszyscy nauczyciele szkoły powszechnej.

Istotnie, pojęcie wykresu funkcji, a więc pojęcie zahaczające już o geometrję analityczną, jest trudne nawet dla ucznia wyższych klas szkoły średniej. Dla dziecka poniżej lat 14 jest całkowicie nie do zrozumienia; nie może ono wyjść poza mechaniczne wyuczenie się sposobu sporządzania wykresu, co przecie żadnej korzyści nie przedstawia.

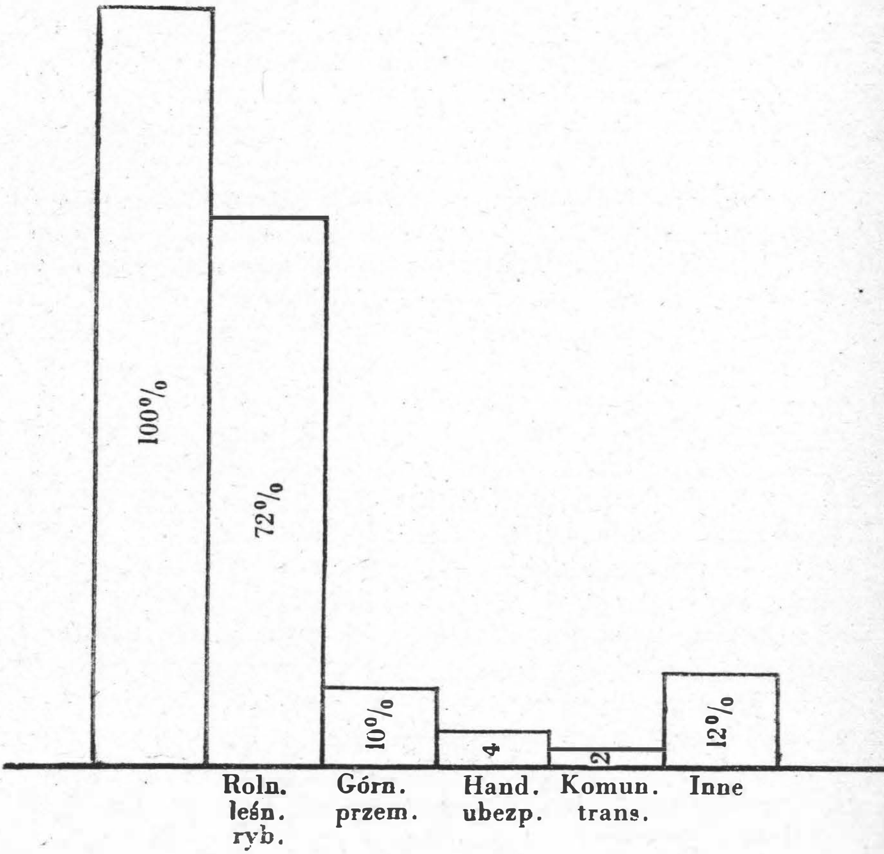
Natomiast zrozumienie wykresu porównawczego kilku liczb, zdobytych doświadczalnie, nie przekracza możliwości ucznia VII kl. szkoły powszechnej, o ile, oczywiście, sam nauczyciel nie pogmatwa sprawy. Niestety, oglądając nieraz wykonywane przez dzieci wykresy temperatury, frekwencji uczniów, zestawień statystycznych itd., miałam możność niejednokrotnie przekonać się, ile nieporozumień i nieścisłości spotyka się jeszcze na tym odcinku pracy.

Dlatego też dyskusji nad tym punktem programu poświęcaliśmy na P. W. K. N. co roku sporo czasu.

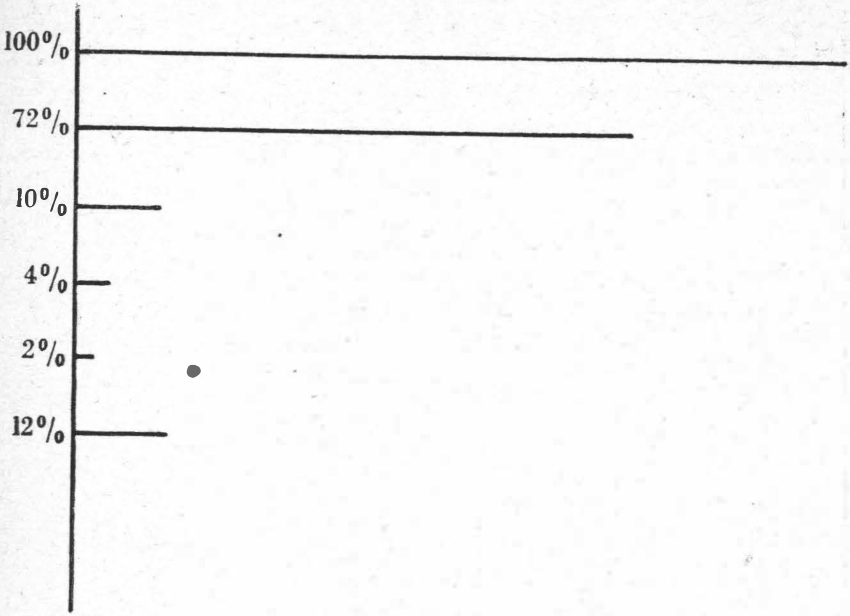
W ciągu dyskusyj wyłoniła się przedewszystkiem sprawa, czy w szkole powszechnej poprzestać na t. zw. wykresach słupkowych, czy też odważyć się na wprowadzenie osi spółrzędnych. Ze względu na częste praktyczne zastosowanie tych ostatnich, zdecydowaliśmy się w pewnych wypadkach powszechnie znanych używać wykresów na osiach spółrzędnych, tembardziej, że program nie wypowiada się w tej sprawie dość wyraźnie. Jednakże wszyscy zgodziliśmy się na to, że wprowadzenie takich wykresów musi być połączone z wielką ostrożnością.

Zacznijmy od wykresów t. zw. słupkowych. Oto mamy wyjęte z Małego Rocznika Statystycznego i zaokrąglone do całości liczby przedstawiające skład zawodowy ludności Polski w procentach: rolnictwo, leśnictwo i rybactwo 72%, górnictwo i przemysł 10%, handel i ubezpieczenia 4%, komunikacja i transport 2%, inne zawody 12%.

A oto dwa rodzaje wykresu porównawczego tych liczb (rys. 14 a i b):



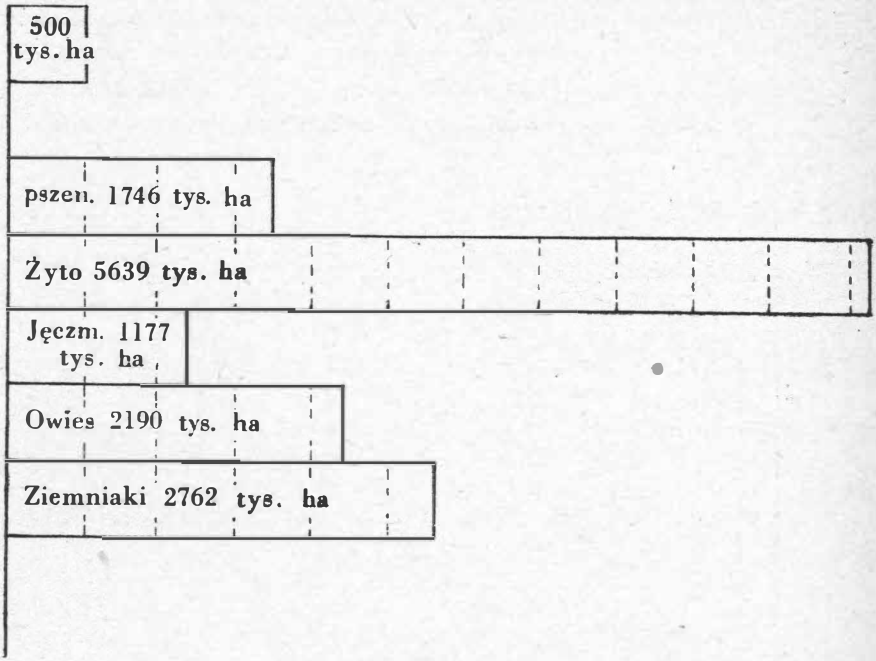
Rys. 14a



Rys. 14 b

Oba te wykresy z równą ścisłością przedstawiają wzajemny stosunek liczb; drugi jest łatwiejszy i prędszy do wykonania; natomiast pierwszy może jest plastyczniejszy, zwłaszcza gdy uczniowie zechcą każdy słupek zabarwić innym kolorem. Zaznaczyć należy, że na obu wykresach nieodzowną rzeczą jest graficzne przedstawienie liczby 100; bowiem liczby 72%, 10% itd. są to liczby, wyrażające stosunek ludności rolniczej, górniczej itd. do ogółu ludności wziętej za 100% i tylko w zestawieniu z obrazem graficznym liczby 100 obraz graficzny każdej innej liczby procentowej ma rację bytu.

Inaczej rzecz się ma z temi wykresami, które obrazują nie stosunki procentowe, lecz liczby istotne, np. liczbę ludności różnych wyznań, ilość ha zasianych różnym rodzajem zbóż itd. Na takich wykresach obok słupków, ilustrujących pewne liczby, umieszczamy na widocznem miejscu słupek, przedstawiający obraną jednostkę miary. Oto np. rysunek (rys. 15) przedstawiający ilość ziemi zasianej (względnie: zasadzonej) pięciu najpospolitszemi u nas rodzajami ziemiopłodów w 1934 r. Za jednostkę wzięto 500 tysięcy ha.



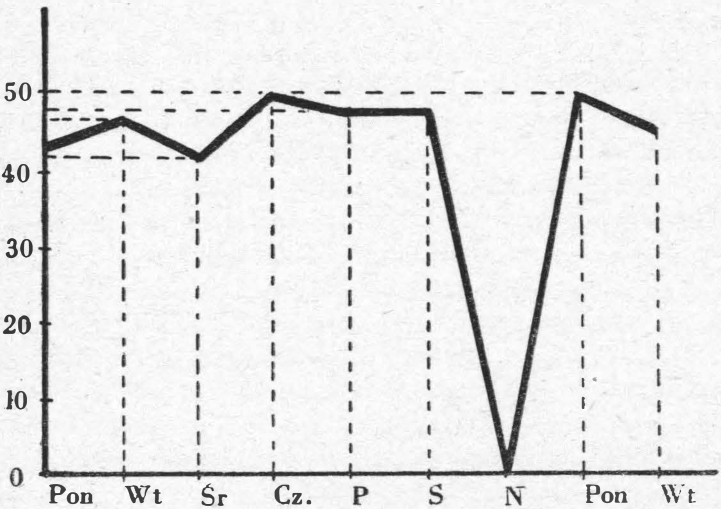
Rys. 15

Przejdźmy teraz do wykresów na osiach spółrzędnych (oczywiście, jedynie prostokątnych). Aby z należytem zrozumieniem i bez rażących błędów matematycznych stosować takie wykresy, nauczyciel musi sam bardzo dokładnie i jasno zdawać sobie sprawę z dwóch pojęć: po pierwsze, wykresy wyrażane linją ciągłą (krzywą czy prostą) są wykresami funkcyj ciągłych, tj. takich, gdzie każdej wartości zmiennej x odpowiada przynajmniej jedna wartość funkcji, oraz gdzie w danym przedziale zawsze można dobrać takie dwie wartości x_0 i x_1 zmiennej, aby różnica między odpowiedniemi wartościami y_0 i y_1 funkcji była dowolnie mała.

Np. zależność między polem prostokąta i jego wysokością przy stałej podstawie jest funkcją ciągłą i wyrazi się linją prostą; natomiast zależność między liczbą robotników i ilością czasu zużytego na pewną pracę nie jest funkcją ciągłą, bowiem liczba robotników musi być liczbą całkowitą, a wartościom całkowitym zmiennej odpowiadać będą tylko niektóre liczby z zakresu wartości czasu.

Otrzymamy więc na wykresie nie linję ciągłą, lecz szereg oddzielnych punktów.

Rzecz ta pozornie prosta nieraz jednak staje się źródłem błędów. Widziałam np. następujący wykres frekwencji uczniów (rys. 16):



Rys. 16

Przyjrzyjmy mu się. Na osi poziomej dzieci oznaczyły dni tygodnia, na osi pionowej liczbę uczniów obecnych w szkole każdego dnia. Punkty, otrzymane na wykresie drogą zestawienia dwóch liczb (liczby uczniów i liczby porządkowej dnia tygodnia) łączyły linjami prostemi. Wynikły stąd góry nonsensów. Przedewszystkiem łącząc linją ciągłą punkty ilustrujące ilość dzieci obecnych w klasie np. w poniedziałek oraz ilość dzieci obecnych we wtorek, zakładamy, że w ciągu 24 godzin dzieci wcale z klasy nie wychodziły, bowiem każdej liczbie na osi poziomej wyrażającej przebieg czasu odpowiada jakiś punkt wykresu, a więc i odpowiadająca mu liczba dzieci na osi pionowej. A dalej: przyjrzyjmy się niedzieli. W sobotę liczba dzieci w klasie wynosi 45, w niedzielę równa się zeru, w poniedziałek znów wynosi 50. Kreski, łączące te trzy punkty wykresu oznaczałyby, że liczba dzieci w klasie z soboty na niedzielę stopniowo topniała, jak lód na wiosnę, aż do zupełnego zaniku, aby znów z niedzieli na poniedziałek rosnąć stopniowo aż do liczby 50.

Takie to cuda czyni z frekwencją źle narysowany wykres. Gdyby nauczyciel pamiętał, że dzieci powinny nietylko kreślić wykresy, ale je czytać, niewątpliwie nie dopuściłby do podobnych błędów. O ileż prostszy i ścislejszy byłby w tym wypadku wykres słupkowy, dający tylko obraz porównawczy oddzielnie wziętych liczb.

Drugą sprawą, o której pamiętać musimy, jest fakt, że jeśli dwa punkty wykresu łączymy odcinkiem linji prostej, to zakładamy, że pomiędzy temi dwoma punktami przyrosty obu wielkości, których związek ilustrujemy wykresem, są proporcjonalne. Możemy zatem z czystem sumieniem łączyć dwa punkty wykresu linją prostą wtedy i tylko wtedy, gdy w danym przedziale zachodzi owa proporcjonalność przyrostów, lub gdy dla uproszczenia obliczeń ową proporcjonalność z góry zakładamy, jak to się dzieje np. w wypadku obliczeń poprawek logarytmicznych (interpolacja).

Weźmy przykład konkretny: wykres temperatury. Przypuśćmy, że obserwujemy temperaturę powietrza i notujemy liczby dwa razy w ciągu dnia: rano i wieczorem.

Jeśli na osi poziomej, czyli na t. zw. osi odciętych notować będziemy liczby dotyczące czasu obserwacyj, a na pionowej, czyli na osi rzędnych — liczby wyrażające temperaturę, wówczas na wykresie otrzymamy szereg punktów, odpowiadających każdej parze liczb. Czy mamy prawo łączyć te punkty linjami?

Niewątpliwie, każdej chwili czasu odpowiada jakaś wysokość temperatury; nie jest zatem błędem połączenie dwóch punktów wykresu linją ciągłą. Ale czy linja ta jest linją prostą, tj. czy temperatura od chwili jednej obserwacji do drugiej równomiernie podnosiła się lub równomiernie spadała, o tem nic nie wiemy. Między godziną 8 rano, gdyśmy odczytali na termometrze np. + 10° C, a godziną 8 wieczorem, gdy termometr wskazywał np. + 12° C, mogła temperatura podnieść się w południe np. do + 15° C, potem o zachodzie słońca spaść do 11°, aby w godzinę później znów podnieść się do 12°.

Linja prosta nie ilustruje tych wahań, a nie wiemy, jaką linją należy ją zastąpić, skoro nie obserwowaliśmy temperatury bez przerwy. Mamy do wyboru: albo wykres pozostawić w postaci punktów, ilustrujących poszczególne obserwacje, albo, łącząc je dla łatwiejszego odczytywania linją prostą, zwrócić jednak uwagę dzieci na popełnioną nieścisłość.

Do wykresów wykonywanych dość często, należą wykresy w postaci kół. Mają one tę niedogodność, że koło nieraz trudno podzielić na tyle części, ile nam ich potrzeba w każdym poszczególnym wypadku. Zato wykres kołowy daje jako całość bardzo plastyczny obraz wzajemnego stosunku liczb, zwłaszcza gdy wycinki są kolorowane.

Wspomnieć wreszcie należy o tzw. wykresach obrazkowych, jak np. przedstawianie spożycia cukru w postaci różnej wielkości głów cukru, naturalnego przyrostu ludności w postaci dziecka itd.

Wykresy takie, bardzo interesujące dla dzieci i stanowiące miłe urozmaicenie lekcyj np. podczas godzin „Nauki obywatelskiej", nie mogą jednak mieć żadnych pretensyj do ścisłości matematycznej. Głowa cukru jest bryłą trójwymiarową; porównanie jej z inną głową cukru nasuwa wątpliwość, czy w grę wchodzi jedynie wysokość bryły, czy też i pozostałe jej wymiary.

Ważne jedynie są liczby napisane na owych obrazkach, czy też pod niemi; możemy je z powodzeniem wykorzystać w zadaniach; natomiast sam obrazek gra rolę podrzędną, dając jedynie bardzo ogólne pojęcie o stosunkach liczbowych, które ma ilustrować.

4. Pomoce szkolne.

A. *Pomoce sporządzane przez nauczycieli.*

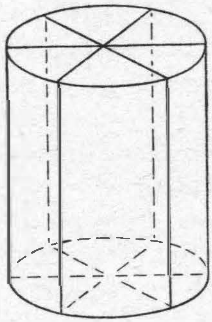
Obserwując cały szereg lekcyj t. zw. pokazowych, zastanawiałam się niejednokrotnie nad zagadnieniem, jakie pokazy i jakie pomoce należy uważać za pożądane, jakie są zbędne, a jakie stać się mogą całkiem szkodliwe. Zauważyłam np., że nauczyciel często zadaje sobie wiele trudu i poświęca wiele czasu na wykrawanie, malowanie, klejenie „pomocy", które w gruncie rzeczy do niczego nie dopomagają. Oto parę przykładów:

Nauczyciel przygotował na lekcję t. zw. powtórzeniową zadanie, którego celem było przypomnieć dzieciom obliczanie pól niektórych wielokątów. Treść zadania obracała się dookoła obliczenia powierzchni jakiegoś domku dla królików. Pomijając fakt, że powód obliczania owej powierzchni (malowanie domku) był dość sztuczny, chcę jedynie zwrócić uwagę na przygotowany w tym celu pokaz. Oto nauczyciel zrobił z tektury ów domek (siedział nad tem niewątpliwie całą noc!) i zademonstrował dzieciom: „Oto tak wyglądał domek dla królików Janka". Całą resztę lekcji domek ów stał sobie na stole, nietknięty ręką żadnego z dzieci; nauczyciel bowiem pomiary domku podał całkiem niezależnie od wyklejonego przez siebie modelu.

Pytanie, czy cały ów trud się opłacił? Co dzieci skorzystały na przyjrzeniu się zdaleka modelowi?

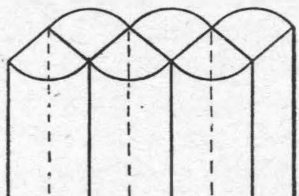
Oczywiście nic; raczej ładny model był przeszkodą w lekcji, bo rozpraszał uwagę dzieci i budził chęć do zabawy. Gdyby nawet nauczyciel zużytkował go lepiej, każąc np. jednemu lub kilku uczniom porobić odpowiednie pomiary i obliczyć je w umówionej skali, czy nawet wtedy warto było poświęcać kilka godzin na przygotowanie tej pomocy naukowej, bez której lekcja przy odpowiednich ilustracjach wykonanych ze współudziałem dzieci mogłaby mieć przebieg równie jasny i pożyteczny, a wobec większej aktywności dzieci może nawet bardziej zajmujący? Mamy tu przykład pomocy całkiem zbędnej.

A oto inny przykład. Nauczyciel miał z dziećmi opracować objętość walca. W tym celu wykonał (czy kazał wykonać) na tokarni sporą liczbę walców drewnianych, pociętych płaszczyznami przesuniętemi przez oś walca na bryły, zbliżone do graniastosłupów trójkątnych (rys. 17 a).



Rys. 17 a

Dzieci miały z tych brył ustawić zamiast walca inną bryłę, której objętość umiałyby obliczyć. W rezultacie ułożyły coś w rodzaju koślawego „równoległościanu", który w dodatku wciąż się rozsypywał (rys. 17 b). Analogja z rzeczywistym równoległościanem była



Rys. 17 b

bardzo daleka, bowiem ze względów technicznych niepodobna było ciąć walca na bardzo drobne wycinki.

I znów pytanie, czy trud, koszt i czas nauczyciela opłacił się należycie? Czy nie możnaby osiągnąć celu przy mniejszym nakładzie energji, nawet w założeniu, że metoda obrana jest słuszną, czyli że dla wdrożenia dzieciom pojęcia o objętości walca pożądane jest przekształcać walec w i n n ą b a r d z i e j j e s z c z e o b c ą dzieciom bryłę?

Te przykłady dowodzą, jak wiele nieraz daremnego trudu wkładamy w przygotowanie zbędnych pomocy.

„Ale — powie ktoś — pomocy takich nikt na codzień nie przygotowuje. Lekcje cytowane były to lekcje pokazowe, którym musi się w przygotowaniu poświęcić więcej trudu“. Na to odpowiedź nasuwa się sama: lekcja pokazowa ma wartość jedynie wtedy, gdy odbywa się w warunkach całkiem normalnych, codziennych, łatwo dających się odtworzyć w każdej klasie. Pomoce zatem muszą być przygotowane również do codziennego użytku, proste, niekosztowne i tylko takie, które istotnie dają rękojmię poważnych korzyści w osiągniętych wynikach.

B. *Pomoce sporządzane przez dzieci.*

Zapatrując się dość krytycznie na pomoce przygotowywane przez nauczycieli, poświęćmy natomiast nieco uwagi przygotowywaniu pomocy szkolnych przez same dzieci.

W dyskusjach prowadzonych wiele razy na P. W. K. N. dochodziliśmy zazwyczaj do wniosku, że prawie wszystkie przyrządy i modele, któremi dziecko posługuje się w szkole, mogą być wykonane przez same dzieci, bądź na godzinach zajęć praktycznych, bądź doraźnie podczas lekcyj matematyki. A więc kolejno dzieci mogą sobie tanim kosztem skonstruować linjał, ekierkę, cyrkiel, kątomierz, oraz komplet modeli brył, o których się uczą.

Wykonanie własnoręczne przyrządów potrzebnych na lekcji ma wartość podwójną: po pierwsze — wartość metodyczną; uczeń, wykonawszy dany przyrząd własnemi rękoma, o wiele lepiej go rozumie i pewniej się nim posługuje, a przytem lepiej zdaje sobie sprawę ze stopnia dokładności przyrządu. Powtóre — wartość wychowawczą; umiejętność wykonania przyrządu „na poczekaniu“ dodaje uczniowi pewności siebie i jest skutecznem lekarstwem na bezradność; uczy sumienności wykonania, bo źle i niestarannie wykonany przyrząd nie nada się do pracy; wreszcie przeciwdziała skutecznie częstym u dzieci wymówkom: nie mam cyrkla, zapomniałem ekierki itd. Przejrzyjmy kolejno niektóre z najczęściej używanych pomocy szkolnych:

1) Linjał. Zanim damy dzieciom do ręki linjał drewniany, dziecko może zrobić go sobie samo. Wystarczy w tym celu podwójnie lub poczwórnie złożona listewka papierowa, dość sztywna, aby się nie uginała, gdy uczeń przy niej kreślić będzie linje ołówkiem. Jeśli linjał ów ma służyć również do pomiarów, uczeń zrobi sobie na nim podziałkę według kratek zeszytu (2 kratki = 1 cm), znacząc kreski kolejno cyframi od zera do 20. Co 10 cm zrobi kreskę dłuższą, a jeśli sam się o to upomni, zrobić może podziałkę gęstszą, co 5 mm, już bez pisania cyfr, aby zbytnio nie zamazywać listewki. Taki linjał, oczywiście, nie będzie miał pretensji do dokładności i musi być na jakimkolwiek wyższym poziomie zastąpiony przez kupny, drewniany. Do czasu jednak wystarczy, a w ubogiej wiejskiej szkole oszczędzi nauczycielowi ciężkiego mozołu zbierania pieniędzy na kupno linjałów od rodziców dzieci.

2. Ekierka. Podobne usługi może oddać własnoręczna konstrukcja ekierki, jeszcze przytem łatwiejsza. Jeśli bowiem prof. Rusiecki i Zarzecki w swojej „Matematyce" dla kl. IV, każą pojęcie kąta prostego wyprowadzać zapomocą podwójnie złożonej kartki, to ta sama kartka (złożona) stanowić może pierwowzór ekierki. Dziecko może przykładać ją do kątów i sprawdzać, czy są proste, a nawet od biedy kreślić prostopadłe. Nie zawadzi, jeśli pozostałe brzegi kartki nie będą linjami prostemi, bowiem wówczas tem wyraźniej uwydatnią się te brzegi, które stanowią ramiona kąta prostego. W żadnym zaś wypadku nie należy ścinać ekierki w trójkąt taki, jak to widzimy na ekierkach drewnianych, aby momentów całkiem drugorzędnych nie wysuwać błędnie na plan pierwszy.

Oczywiście, tak samo jak linjał, w dalszem stadjum nauki ekierkę papierową zastąpi ekierka drewniana jako dokładniejsza, praktyczniejsza i trwalsza, niemniej nawet i wtedy w razie potrzeby (np. w razie zapomnienia) dziecko może zawsze skonstruować sobie na poczekaniu własny przyrząd z dowolnej kartki papieru. I tu przypomnieć warto jedną wskazówkę praktyczną: nauczyciel musi mieć zawsze w zapasie pewną ilość kartek papieru, choćby okładek ze starych zeszytów, aby w razie potrzeby móc ich dziecku użyczyć.

3. Cyrkiel. W klasie V dziecko kreśli koło, więc nauczyciel poleca kupić cyrkiel. Na następną lekcję pojawia się paru uczniów najzamożniejszych z porządnym cyrklem, kilku mniej zamożnych z lichym cyrkielkiem nasadzonym na ołówek, reszta bez żadnych cyrkli. Wobec tego lekcja idzie kulawo, w tempie powolnem, bowiem jedno dziecko pożycza swój cyrkiel pięciu innym, niektóre radzą sobie „obrysowywaniem" pokrywki od kałamarza, a nauczyciel ponawia nakaz, który znów nie zostaje spełniony.

A przecież listewka ze złożonego parokrotnie papieru ze szpilką wbitą u jednego końca i z ołówkiem u drugiego może całkiem nieźle służyć za cyrkiel. Trzeba tylko, aby nauczyciel miał też w swej szafce papierek szpilek. Cyrkiel tak skonstruowany ma nawet tę wyższość nad metalowym, nasadzanym na ołówek, że listewka papieru może posiadać podziałkę centymetrową, pozwalającą przy pomocy przesuwania szpilki (nie ołówka) określać bezpośrednio długość promienia koła bez użycia osobnej miarki. Nawet cyrkiel do tablicy może być nieźle zastąpiony kredą umocowaną na sznurku.

4. Kątomierz. Na konstrukcję kątomierza należy poświęcić osobną jednostkę metodyczną. Przekonaliśmy się o tem na P. W. K. N. Poprzedzać tę konstrukcję musi lekcja, dotycząca podziału kąta pełnego na 360 stopni. Pomocą ku temu będzie model kąta pełnego, pociętego promieniami na równe części (Patrz Rusiecki i Zarzecki „Matematyka" dla kl. V, str. 70). Pamiętać jednak należy, że nie idzie o podział okręgu koła na łuki po 1°, lecz o podział kąta pełnego na kąty po 1°. Dziecko bowiem mierzyć będzie kątomierzem nie łuki, lecz kąty. Dlatego też, jakkolwiek model przygotowany przez nauczyciela nie może mieć innego kształtu jak kształt koła, niemniej przy rozważaniu z dziećmi modelu, należy zwracać uwagę dziecka na kąty między promieniami a nie na podziałkę numerowaną na okręgu. Podziałka sama rzuci się dziecku w oczy, gdy będzie odczytywało, ile stopni ma kąt półpełny i prosty, oraz gdy z modelu zechce zrobić użytek do mierzenia kątów.

Lekcja o podziale kąta pełnego na 360°, ilustrowana modelem powyższym, oraz samorzutne próby oceny kątów zadanych przy pomocy modelu kąta prostego zajmą niewątpliwie całą godzinę. Dopiero więc na następnej lekcji zabiorą się dzieci do budowania kątomierza.

Jeśli pozostawimy im w tym względzie swobodę, a nie znają się jeszcze z kupnym kątomierzem, przypuszczać należy, iż zaczną od budowy kąta pełnego, a nie półpełnego. W zasadzie będą miały słuszność, lecz przy mierzeniu kątów okaże się to niewygodnem ze względu na trudności w przyłożeniu środka kątomierza do wierzchołka kąta zadanego. Wyciąć dziury w kątomierzu nie możemy, bo wówczas ów środek całkiem nam się zgubi. Stąd wyniknie wskazówka praktyczna: budujmy kątomierz tylko w zakresie kąta półpełnego.

Dzieci, z któremi mieliśmy do czynienia na Kursie, znały już kątomierz z wyglądu, więc zaczęły od nakreślenia półkola o średnicy 20 cm. Następnie podzieliły kąt półpełny na dwa kąty proste (z pomocą ekierki), a potem, za poradą nauczyciela, już na oko podzieliły kąt prosty na trzy równe kąty, a każdy z tych ostatnich znowu na trzy równe kąty, otrzymując w ten sposób podziałkę po 10°. Wiele z pośród dzieci popełniło przytem charakterystyczny błąd: chciały zamiast kąta prostego dzielić na trzy części cięciwę podpierającą ów kąt. Nauczyciel zwrócił uwagę na to, że kąty zbudowane na tych trzech równych odcinkach, będą nierówne: środkowy jest największy.

Pozostałe czynności: numeracja podziałki, wyznaczenie środka, wykrojenie tektury niepotrzebnej poszły gładko. Korzyść z tej roboty była podwójna: po pierwsze, każde z dzieci miało własny kątomierz (po za trojgiem, którym się robota nie powiodła), podczas gdy normalnie bywa nieraz pięć kątomierzy na całą klasę, co hamuje niepomiernie tempo pracy; powtóre, dzieci rozumiały skonstruowane przez siebie kątomierze daleko lepiej, niż to bywa zazwyczaj i daleko lepiej umiały się niemi posługiwać.

Praca zatem nad tym przyrządem całkowicie się opłaciła.

5. Z „mianem“ czy bez „miana?“

Nie było prawie roku na P. W. K. N., podczas którego nie dyskutowałoby się na temat t. zw. „mianowania“ liczb w zadaniach. Czy w działaniach na t. zw. liczbach mianowanych dopisywać miano? Czy zawsze to czynić, czy tylko w pewnych z góry określonych wypadkach? Jak sobie radzić z mianowaniem liczb w dwóch wypadkach dzielenia, w obliczaniu pól i objętości, w obliczaniu wymiarów brył i wielokątów? Jak od owego mianowania w zakresie elementarnym przechodzić na wyższych stopniach nauczania do zapisu jednostek złożonych, jak jednostka przyspieszenia, siły, pracy? Oto cały kompleks zagadnień i wątpliwości, które próbowaliśmy rozstrzygnąć i ustalić.

Nie łudząc się, żeśmy w dyskusjach naszych istotnie te trudne sprawy zdołali wyjaśnić, chcę jednak przytoczyć pewne głosy i wnioski, które rzucą może nieco światła na te zagadnienia. Zacznę od kolejnego przeglądu działań na różnych poziomach nauki.

Zazwyczaj już w klasie I, a najdalej w II, przyuczamy dziecko w dodawaniu i odejmowaniu do pisania miana przy wszystkich liczbach, wchodzących w skład tych działań. Obliczając np., ile ma ołówków w obu rączkach, dziecko pisze w myśl poleceń nauczyciela:

$$5 \text{ oł.} + 2 \text{ oł.} = 7 \text{ oł.}$$

Jeśli opuści „miano“ przy którejkolwiek z tych trzech liczb, niewątpliwie przypomnimy mu: „7 czego? Ołówków!“ Że zaś pisze niewprawnie, dużemi literami, nieraz litera „o“ wygląda jak „zero“, co staje się źródłem wielu błędów.

O „mianowaniu“ na poziomach najniższych, w klasie I i II, rozmawiałam nieraz z nieżyjącym już dziś prof. Lucjanem Zarzeckim; był on zdania, że pisanie mian na tym poziomie jest całkowicie zbędne, a nawet szkodliwe, bo utrudnia zapis i zwalnia tempo pracy. Na to ustępstwo dla pierwszych lat nauczania zgadza się zresztą wielu pedagogów. Ale poczynając od klasy III przestrzegamy „mian“ z gorliwością, godną lepszej sprawy.

Pół biedy jeszcze z dodawaniem i odejmowaniem; tu dziecko nie potrzebuje przynajmniej namyślać się, przy której z liczb postawić owo miano. Gdy jednak, począwszy od klasy II, zaczyna wchodzić w grę mnożenie i dwa wypadki dzielenia, wówczas wobec piętrzących się trudności mamy do wyboru: albo z nieubłaganą pedanterją pilnować „logicznego“ stawiania mian, przyczem, jak wnet zobaczymy, owa pedanterja na nas się zemści; albo pozwalać dziecku dowolnie stawiać lub nie stawiać mian; albo wreszcie przyjąć jakąś umowę, np.: w każdem działaniu stawiamy miano tylko przy wyniku, niezależnie od „logiki“.

Rozważmy pierwszą ewentualność, która zresztą zachodzi najczęściej. Pilnujemy więc, aby dziecko stawiało w mnożeniu miano przy mnożnej (broń Boże nie przy mnożniku, bo to „niema sensu!“), oraz przy iloczynie. Dziecko, wdrożone przez nas do odpowiedniej wypowiedzi słownej, mówi i pisze: 3 . 5 zł. = 15 zł. (trzy razy po 5 zł. jest 15 zł.).

Ale oto przychodzi w klasie IV obliczanie pola prostokąta. Dziecko zmierzyło i zapisało wymiary: długość 5 cm, szerokość 3 cm, a teraz chce obliczyć pole, wiedząc przytem, że ma w tym celu obliczyć iloczyn liczb wymiarowych.

Która z liczb wymiarowych jest mnożną, która mnożnikiem? Jak to się dzieje, że mając czynniki, wyrażone w miarach linjowych, otrzymujemy iloczyn w miarach kwadratowych? Jak wobec tego poradzić sobie z mianowaniem?

Jeśli chcemy trzymać się logiki, musimy wdrożyć dziecko do rozumowania następującego: mnożymy jednostkę kwadratową (w tym wypadku 1 cm^2) przez 5, czyli obliczamy liczbę jednostek w jednym rzędzie, a otrzymany iloczyn mnożymy przez 3, aby obliczyć liczbę jednostek w trzech rzędach.

Zapis: 3 . 5 . 1 cm^2 = 15 cm^2 (Trzy razy po pięć razy po 1 cm^2).

Taki przebieg rozumowania i zapis powyższy spotykałam dość często; przyczem w skróconej formie rozumowanie wygląda następująco: Mnożymy 5 cm^2, czyli liczbę jednostek w jednym rzędzie, przez 3, czyli przez liczbę rzędów.

Zapis: 3 . 5 cm^2 = 15 cm^2, lub, zależnie od tego, który wymiar posłużył za punkt wyjścia: 5 . 3 cm^2 = 15 cm^2. Tym sposobem obliczanie pola prostokąta włączone zostało, jako szczególny wypadek mnożenia, do ogólnego prawa: miano piszemy przy mnożnej i przy iloczynie; mnożnik jest „niemianowany“.

Ale idźmy dalej. Dziecko w niższych klasach zostało wdrożone do surowego rozróżniania obu wypadków dzielenia, i przestrzega odpowiedniego mianowania. Dzielenie na równe części nie jest trudne; dzieląc np. 20 zł. na 4 części, dziecko odrazu zda sobie sprawę, że dzielna i iloraz noszą to samo „miano“, bowiem część składać się musi z tych samych przedmiotów co i całość. Napisze więc:

20 zł : 4 = 5 zł., i odpowiednio zapis ów przeczyta.

Ale zapis dzielenia „po równej części“, czyli t. zw. mieszczenia budzi wątpliwości.

Weźmy np. zadanie: ilu uczniom można z 20 stalówek rozdać po 4 stalówki? Nie przedstawia ono trudności rachunkowych; dziecko rozumie, że stalówek wystarczy dla tylu uczniów, ile razy po 4 stalówki dadzą się „zabrać“ z 20 stalówek, a więc dla 5 uczniów. Ale zrozumieć zapis jest dziecku o wiele trudniej, jest to bowiem w zakresie czterech działań jedyny wypadek, gdzie wynik jest „liczbą oderwaną“. Dziecko pisze: 20 stal. : 4 stal. = 5, ale 5 „czego“?

Nauczyciel dopowiada „razy“. A gdzie się podziewają uczniowie, których liczbę dziecko ma obliczyć z zadania? I oto pojawia się kolizja zapisu z faktem życiowym, nie ulegającym dla dziecka wątpliwości.

Gorzej jeszcze przedstawia się sprawa, gdy zadanie jest treści geometrycznej, np.: podłoga izby szkolnej ma 48 m²; jeden z jej wymiarów wynosi 8 m. Obliczyć drugi wymiar.

Nauczyciel (a z nim i dziecko) ma do wyboru: albo uważać liczbę 8 za liczbę „rzędów“ i rozumować: ponieważ 48 m² ułożono w 8 rzędów, więc każdy rząd zawiera ó s m ą c z ę ś ć, czyli 6 m². Jeśli 6 m² mieści się w jednym rzędzie, to długość rzędu musi wynosić 6 m. Albo też wziąć liczbę 8 za liczbę m² w jednym rzędzie i objaśniać: Jeśli w jednym rzędzie jest 8 m², to ponieważ 8 mieści się w 48 sześć razy, więc 48 m² stanowi 6 rzędów. Jeśli rzędów jest 6, a każdy rząd ma 1 m szerokości, to izba ma 6 m szerokości. Stąd dwa zapisy:

$$48\,m^2 : 8 = 6\,m^2$$
$$\text{lub} \quad 48\,m^2 : 8\,m^2 = 6.$$

Ani jeden ani drugi zapis nie dają jednak dziecku odpowiedzi bezpośredniej na pytanie, które ma rozwiązać.

Cóż dziwnego, że w tym chaosie dziecko zaczyna się plątać. W miarę narastania materjału naukowego błędy w mianowaniu stają się coraz częstsze, a nauczyciel — coraz bezradniejszy. Gdy zaś jeszcze przybędą liczby t. zw. dwumianowane, miary sześcienne itd., wówczas zdarza się, że energja nauczyciela w egzekwowaniu poprawnych zapisów słabnie i stopniowo ustala się zwyczaj patrzenia przez palce na dziecięce nieścisłości. Następuje wówczas druga z przytoczonych na początku ewentualności: pozostawienia dziecku względnej swobody: „Nie chcesz, to nie pisz miana, bylebyś nie pisał go błędnie".

Ta droga jednak, jak wszelka droga najmniejszego oporu, nie może nas zadowolić; przemawiają przeciwko niej zarówno względy metodyczne jak i wychowawcze. Wobec tego musimy szukać jeszcze innego wyjścia.

I tu po wielu gorących dyskusjach, przeplatanych powoływaniem się i na powagi naukowe, i na obecny program dla szkół powszechnych, i na poszczególne głosy bądź nauczycieli, bądź inspektorów, odważyliśmy się na wniosek „wywrotowy"!

A więc stwierdzić musimy przedewszystkiem, że „logika" zapisu działania arytmetycznego niezawsze przemawia do praktycznej logiki życiowej dziecka; dalej, że to, co nie jest w pełni zrozumiane i, co ważniejsza, a p r o b o w a n e przez zmysł praktyczny dziecka, bywa przyswajane z trudem i jedynie drogą pamięciową; że wreszcie w miarę przejścia do coraz wyższych poziomów nauczania, musimy sami czynić niejednokrotnie ustępstwa od przyjętych z a s a d w imię u m ó w, podyktowanych względami praktycznemi lub naukowemi.

Z tych rozważań wynika, że w nauczaniu elementarnem nie popełnimy grzechu, jeśli zamiast męczyć dziecko i siebie wymaganiami bardzo poprawnych zapisów, u m ó w i m y s i ę o d r a z u, że zachowując całą, na jaką dziecko stać, zależnie od poziomu, jasność i poprawność wysłowienia, pisać mu każemy miano tylko przy wyniku końcowym, przyczem t a k i e m i a n o, jakie będzie odpowiedzią na zawarte w danem zagadnieniu pytanie.

Tak np. w dodawaniu (lub w odejmowaniu): Jeśli komorne kosztuje 75 zł, a żywność 168 zł miesięcznie, to razem:

$75 + 168 = 243$ zł (ogólny wydatek miesięczny).

Wyrazy ujęte w nawias są zarazem odpowiedzią, lub, jeśli zadanie ma parę działań, pomocą w dalszej pracy.

W mnożeniu: ile kosztuje 10 m płótna po $2\frac{1}{2}$ zł?

$10 . 2{,}5 = 25$ zł (koszt płótna).

Albo: jakie jest pole prostokąta o wymiarach 20 cm i 15 cm?

$20 . 15 = 300$ cm^2 (pole prostokąta).

W dzieleniu: Poczemu zapłaciliśmy za 1 litr mleka, jeśli za 3 litry policzono nam 1 zł 05 gr?

$105 : 3 = 35$ gr (cena 1 litra).

Albo: Obliczyć szerokość prostokąta, jeśli jego pole wynosi 0,5 m^2, a długość 125 cm.

Przedewszystkiem 0,5 m^2 = 5000 cm^2.

$5000 : 125 = 40$ cm (szerokość prostokąta).

Ten sposób pisania, który niewątpliwie zostanie zakwestjonowany przez wielu pedantów, spotkał się jednak z życzliwą aprobatą niektórych pedagogów uznanych za powagi. Nie jest on zresztą tak „rewolucyjny", aby jego stosowanie mogło zepsuć dalszy ciąg pracy.

Na wyższych poziomach, gdy uczeń zacznie operować złożonemi jednostkami fizycznemi (prędkości, przyspieszenia, siły, pracy itd.), wejdą w zastosowanie nowe umowy. Wówczas „miano" liczby, początkowo oznaczające pewne znane dziecku „przedmioty": metry, złote, itd., stanie się umownym symbolem, nie mającym odpowiednika w świecie konkretów. Cóż np. znaczy symbol przyspieszenia $\frac{cm}{sek^2}$?

Znaczy tylko tyle, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym przy prędkości początkowej = 0, długość drogi przebytej jest wprost proporcjonalna do kwadratu czasu.

A jednak na tych właśnie symbolach dokonywamy działań. Jeśli np. mamy obliczyć, jakiej siły potrzeba, aby masie 5 gramów nadać przyspieszenie $4 \frac{cm}{sek^2}$, piszemy wówczas:

$$5\ g . 4 \frac{cm}{sek^2} = 20 \frac{g . cm}{sek^2},$$ czyli 20 dyn.

Te nowe, umowne sposoby zapisywania, przyjęte w nauce, ostatecznie przekreślą w umyśle ucznia wszelkie nawyki, pozostałe z niższych poziomów szkoły. Pisać będzie wówczas bez lęku:

Powierzchnia kliszy fotograficznej:

$$9\ \text{cm} \,.\, 12\ \text{cm} = 108\ \text{cm}^2;$$

albo: Droga przebyta przez pociąg:

$$45\ \frac{\text{km}}{\text{godz.}} \,.\, 5\ \text{godz.} = 225\ \text{km itd.}$$

Lub też będzie wykonywał działania na liczbach „oderwanych“ notując tylko wyniki ostateczne.

Zarówno jednak „z mianem“ jak i „bez miana“ sprawą zasadniczą będzie nie zapis, lecz zrozumienie związku, zachodzącego między danemi działania.