

*Sergiusz SIENKOWSKI, Mariusz KRAJEWSKI*  
*Uniwersytet Zielonogórski*  
*Instytut Metrologii, Elektroniki i Informatyki*

## ALGORYTM KORELACYJNY DO ESTYMACJI CZĘSTOTLIWOŚCI SYGNAŁU SINUSOIDALNEGO

W pracy przedstawiono nowy, czasowo-dyskretny algorytm korelacyjny do estymacji częstotliwości sygnału sinusoidalnego. Taki algorytm nazwano uśrednioną modyfikowaną kowariancją dla autokorelacji (AMC-AC). Opracowany algorytm porównano z innymi algorytmami do estymacji częstotliwości. Do badań porównawczych zastosowano algorytm podstawowy oparty na modyfikowanej kowariancji dla autokorelacji (MC-AC), algorytm macierzowej dekompozycji harmonicznych dla autokorelacji (RPHD-AC, MPHD-AC) i algorytm oparty na wykrywaniu przejść sygnału przez zero (ZC). Zastosowano również jeden z najnowszych algorytmów widmowych wykorzystujący do estymacji częstotliwości interpolowane widmo DFT sygnału (IpDTFT-IR). Wyniki badań pokazały, że opracowany algorytm jest jednym z najdokładniejszych, przy czym jeżeli liczba okresów sygnału jest nie większa niż pięć, to AMC-AC umożliwia wyznaczenie częstotliwości sygnału z największą dokładnością.

## AN ALGORITHM FOR THE SINUSOIDAL SIGNAL FREQUENCY ESTIMATION BASED ON THE AUTOCORRELATION FUNCTION

In this paper a new, discrete-time algorithm for sinusoidal signal frequency estimation was presented. Such an algorithm was termed AMC-AC (averaged modified covariance for autocorrelation). The designed algorithm was compared with other algorithm such as the MC-AC (modified covariance for autocorrelation), RPHD-AC (reformed Pisarenko harmonic decomposition for autocorrelation), MPHD-AC (modified Pisarenko harmonic decomposition), ZC (zero crossing), and IpDTFT-IR (interference rejection for interpolated discrete-time Fourier transform). The research results have shown that the proposed algorithm is one of the most accurate, especially if the number of signal periods is less than six. Then the AMC-AC determines the signal frequency with the greatest accuracy.

### 1. WSTĘP

Algorytmy do estymacji częstotliwości sygnałów można podzielić na dwie grupy. Pierwszą grupę stanowią algorytmy czasowo-dyskretne. Do drugiej grupy zaliczamy algorytmy widmowe. Jednym z najbardziej znanych

algorytmów czasowo-dyskretnych jest algorytm modyfikowanej kowariancji MC (modified covariance) [1]. Umożliwia on wyznaczenie częstotliwości sygnału sinusoidalnego na podstawie próbek sygnału. Innymi ważnymi przedstawicielami pierwszej grupy algorytmów są algorytmy wykorzystujące macierzową dekompozycję harmonicznych sygnału. Wyróżnić tutaj można algorytmy RPHD (reformed Pisarenko harmonic decomposition) [2] i MPHD (modified Pisarenko harmonic decomposition) [3]. Podobnie jak algorytm MC, wymienione algorytmy umożliwiają wyznaczenie częstotliwości na podstawie próbek sygnału sinusoidalnego. Jeżeli próbki sygnału zastąpimy próbkami funkcji autokorelacji ACF (autocorrelation function) tego sygnału, to otrzymamy algorytmy korelacyjne MC-AC, RPHD-AC i MPHD-AC [4]. Zastosowanie ACF umożliwia zwiększenie dokładności estymacji częstotliwości. Zaletą wskazanych algorytmów jest niska złożoność obliczeniowa i duża dokładność estymacji częstotliwości. Poza wymienionymi algorytmami na uwagę zasługuje również popularny algorytm ZC (zero crossing) [5]. Umożliwia on wyznaczenie częstotliwości sygnału sinusoidalnego na podstawie wykrytych przejść sygnału przez zero. Zaletą ZC jest bardzo mała złożoność obliczeniowa. Wadą algorytmu jest wrażliwość na szum występujący w użytecznym sygnale. Dlatego ZC stosuje się zwykle po wykonaniu wstępnej filtracji sygnału. Do grupy algorytmów widmowych zaliczamy natomiast algorytmy wykorzystujące do estymacji częstotliwości harmoniczne widma DFT sygnału. Przykładem jest interpolacyjny algorytm IpDTFT-IR (interference rejection for interpolated discrete-time Fourier transform) opracowany przez Belegę, Petriego i Dalletta [6]. Zaletą IpDTFT-IR jest możliwość estymacji częstotliwości z dużą dokładnością, również w sytuacji, gdy liczba okresów sygnału jest mała. Wadą tego algorytmu jest duża złożoność obliczeniowa wynikająca z wielokrotnego obliczania funkcji trygonometrycznych.

W pracy przedstawiono nowy, czasowo-dyskretny algorytm korelacyjny do estymacji częstotliwości sygnału sinusoidalnego. Taki algorytm nazwano AMC-AC (averaged modified covariance for autocorrelation). Umożliwia on wyznaczenie częstotliwości na podstawie próbek ACF sygnału. Zaproponowany algorytm charakteryzuje się złożonością obliczeniową zbliżoną do złożoności obliczeniowych innych algorytmów korelacyjnych, rozważanych w niniejszej pracy. Algorytm AMC-AC porównano z algorytmami MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR. W celu porównania algorytmów przeprowadzono badania symulacyjne i eksperymentalne polegające na wyznaczeniu i porównaniu błędów średniokwadratowych MSE (mean squared error) estymatorów częstotliwości sygnału sinusoidalnego zakłóconego szumem

Gausa oraz rzeczywistego napięcia sinusoidalnego. Z przeprowadzonych badań wynika, że algorytm AMC-AC umożliwia wyznaczenie częstotliwości z największą dokładnością.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. W rozdziale drugim przedstawiono zastosowany w pracy model sygnału sinusoidalnego zakłóconego szumem Gaussa oraz jego funkcję autokorelacji. W rozdziale trzecim zaprezentowano opracowany algorytm. W rozdziale czwartym przedstawiono wyniki badań symulacyjnych i eksperymentalnych. Przeprowadzone badania polegały na estymacji częstotliwości oraz na wyznaczeniu i porównaniu błędów estymacji. Rozdział piąty stanowi podsumowanie pracy. Na końcu pracy przedstawiono spis literatury.

## 2. SYGNAŁ SINUSOIDALNY I JEGO FUNKCJA AUTOKORELACJI

W pracy przyjęto model sygnału sinusoidalnego zakłóconego szumem Gaussa. Taki model stosowany jest do opisu sygnałów pomiarowych wykorzystywanych m.in. w technice radarowej [7], sonarach [8], komunikacji bezprzewodowej [9] oraz analizie mowy [10].

Jeżeli  $x(t)$  będzie sygnałem sinusoidalnym:

$$x(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi), \quad (1)$$

to jego próbki  $x[n]$  można opisać wzorem:

$$x[n] = A \sin(\omega_0 n + \varphi), \quad n = 0, 1, \dots, 2M - 1, \quad (2)$$

gdzie  $A$  i  $\varphi \in [0, 2\pi)$  to odpowiednio amplituda i faza początkowa sygnału, natomiast:

$$\omega_0 = 2\pi \frac{f}{f_s}, \quad \omega_0 \in (0, \pi), \quad (3)$$

jest częstotliwością kątową sygnału obliczaną na podstawie częstotliwości sygnału  $f$  i częstotliwości próbkowania  $f_s$ . Ponieważ:

$$f_s = \frac{2M}{N} f, \quad (4)$$

to:

$$N = M \omega, \quad \omega = \frac{\omega_0}{\pi}, \quad (5)$$

gdzie  $N$  jest liczbą okresów sygnału, natomiast  $\omega$  jest względną częstotliwością kątową, nazywaną również częstotliwością znormalizowaną [4].

Na podstawie próbek  $x[n]$  sygnału  $x(t)$  i próbek  $x[n+k]$  jego przesuniętej o czas  $\tau$  kopii  $x(t+\tau)$  można wyznaczyć próbki:

$$\tilde{R}_x[k] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x[n]x[n+k] = \frac{A^2}{2} \cos(k\omega_0) + \rho(k), \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (6)$$

funkcji autokorelacji [11]:

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f\tau), \quad (7)$$

sygnału  $x(t)$ , gdzie:

$$\rho(k) = \frac{A^2}{4M} \frac{\sin((k-1)\omega_0 + 2\varphi) - \sin((2M+k-1)\omega_0 + 2\varphi)}{\sin(\omega_0)}. \quad (8)$$

Z (6) i (7) wynika, że  $\tilde{R}_x[k] \neq R_x(k/f_s)$ . Oznacza to, że estymator (6) jest obciążony ( $b[\tilde{R}_x[k]] = \rho(k)$ ). Ponieważ wariancja estymatora jest równa zero ( $\text{Var}[\tilde{R}_x[k]] = 0$ ), to:

$$\text{MSE}[\tilde{R}_x[k]] = \rho^2(k). \quad (9)$$

W warunkach próbkowania synchronicznego współczynnik (8) jest równy zero i  $\tilde{R}_x[k] = R_x(k/f_s)$ . Wtedy  $\text{MSE}[\tilde{R}_x[k]] = 0$ . Jeżeli  $M$  będzie dostatecznie duże, to  $\rho(k) \approx 0$  i  $\text{MSE}[\tilde{R}_x[k]] \approx 0$ .

Niech  $y(t)$  będzie sumą sygnału  $x(t)$  i addytywnego szumu Gaussa  $q(t)$  o odchyleniu standardowym  $\sigma_q$  i zerowej wartości oczekiwanej  $\mu_q$  ( $\mu_q=0$ ). Związek między parametrami sygnału  $x(t)$  i szumu  $q(t)$  można opisać za pomocą stosunku sygnału do szumu SNR (signal-to-noise ratio), przy czym  $\text{SNR} = 10 \cdot \log(A^2/(2\sigma_q^2))$ . Próbkki  $y[n]$  sygnału  $y(t)$  przyjmują następującą postać:

$$y[n] = x[n] + q[n], \quad n = 0, 1, \dots, 2M-1, \quad (10)$$

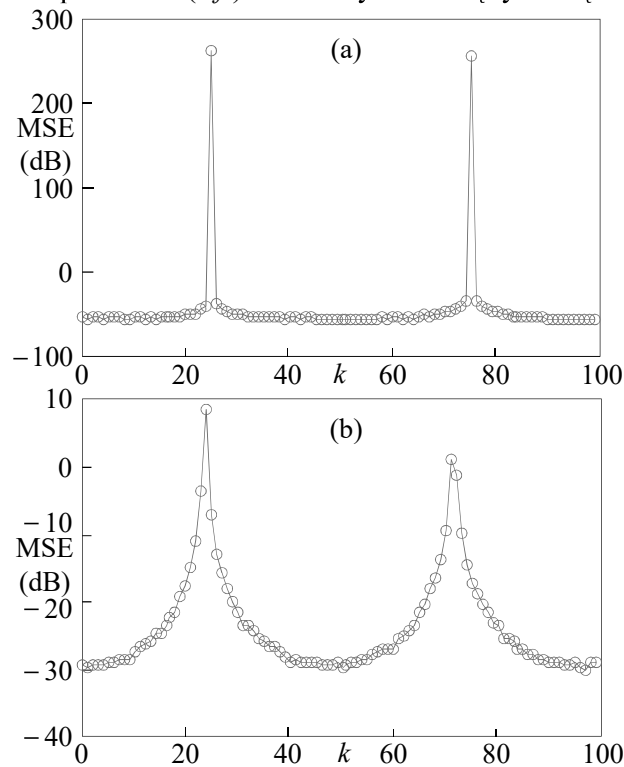
natomiast próbkki  $\tilde{R}_y[k]$  funkcji autokorelacji  $R_y(\tau)$  sygnału  $y(t)$  można opisać wzorem:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_y[k] &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y[n]y[n+k] = \tilde{R}_x[k] + \tilde{R}_q[k] + \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} x[n]q[n+k] \\ &\quad + \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} q[n]x[n+k], \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (11)$$

Estymator (11) jest obciążony ( $b[\tilde{R}_y[k]] \neq 0$ ). Ponieważ wariancja estymatora jest niezerowa ( $\text{Var}[\tilde{R}_y[k]] \neq 0$ ), to  $\text{MSE}[\tilde{R}_y[k]] \neq 0$ . Błąd średniokwadratowy estymatora (11) można oszacować na podstawie  $K$  wartości estymatora. Jeżeli  $K$  będzie dostatecznie duże, to:

$$\text{MSE}[\tilde{R}_y[k]] \approx \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} (\tilde{R}_y^{(i)}[k] - R_x(k/f_s))^2}{R_x^2(k/f_s)}. \quad (12)$$

Na rysunku 1 przedstawiono przykładowe charakterystyki błędu (12). Podczas wyznaczania charakterystyk błędu przyjęto  $A=3\sqrt{2}$  V,  $\omega=0,02$  ( $N=M\cdot\omega=2$ , rysunek 1a),  $\omega=0,021$  ( $N=M\cdot\omega=2,1$ , rysunek 1b),  $M=100$ ,  $K=1000$ , SNR=40 dB. Faza  $\phi$  była randomizowana z zastosowaniem generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym na przedziale  $[0, 2\pi)$ . Łatwo zauważyć, że w warunkach próbkowania synchronicznego ( $\omega=0,02$ , rysunek 1a), błąd (12) przyjmuje największe wartości dla opóźnień  $k=\text{ceil}(1/(2\omega))=25$  i  $k=\text{floor}(3/(2\omega))=75$ . Jest to spowodowane tym, że występująca w (12) funkcja  $R_x(k/f_s)$  przyjmuje w tych punktach wartości równe zero. Jeżeli próbkowanie nie jest synchroniczne ( $\omega=0,021$ , rysunek 1b), to błąd (12) jest największy dla  $k=24$  i  $k=71$ . Dla takich opóźnień  $R_x(k/f_s) \neq 0$  i maksymalne błędy nie są tak duże.



Rys. 1. Charakterystyki błędu (12) w funkcji  $k$ : (a)  $\omega=0,02$ , (b)  $\omega=0,021$   
 Fig. 1. Error characteristics (12) as a function of  $k$ : (a)  $\omega=0,02$ , and (b)  $\omega=0,021$

W tabeli 1 przedstawiono przykładowe wartości błędu (12). Z rysunku 1 i tabeli 1 wynika, że zapewnienie warunków próbkowania synchronicznego prowadzi do istotnego zmniejszenia wartości błędu.

Tabela 1.

Błąd (12) w dB dla ustalonych wartości opóźnienia $k$				
$k$	0	20	40	80
$\omega=0,02$ ( $N=2$ )	-54,51	-50,65	-54,11	-48,01
$\omega=0,021$ ( $N=2,1$ )	-29,54	-17,59	-29,09	-23,71

### 3. ALGORYTM KORELACYJNY

Niech  $\tilde{\omega}_0$  będzie estymatorem częstotliwości kątowej  $\omega_0$ . Rozważmy kombinację liniową:

$$\tilde{R}_y[k-1] + \tilde{R}_y[k+1] = 2 \cos(\tilde{\omega}_0) \tilde{R}_y[k], \quad k=1, \dots, M-2, \quad (13)$$

trzech kolejnych próbek ACF sygnału  $y(t)$  [2]. Na podstawie (13) można sformułować następujące równanie:

$$\sum_{k=2}^{M-3} 2a(k)r(k) = 2 \cos^2(\tilde{\omega}_0) \sum_{k=2}^{M-3} a(k), \quad (14)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a(k) &= \tilde{R}_y[k] \tilde{R}_y[k+1], \\ r(k) &= \frac{\tilde{R}_y[k-1] + \tilde{R}_y[k+1]}{2\tilde{R}_y[k]} \cdot \frac{\tilde{R}_y[k] + \tilde{R}_y[k+2]}{2\tilde{R}_y[k+1]}. \end{aligned} \quad (15)$$

Z (14) wynika, że:

$$\cos^2(\tilde{\omega}_0) = \frac{\sum_{k=2}^{M-3} a(k)r(k)}{\sum_{k=2}^{M-3} a(k)}. \quad (16)$$

Wtedy:

$$\tilde{\omega}_0 = \cos^{-1} \left( \sqrt{\frac{C_1}{2C_2}} \right), \quad (17)$$

gdzie:

$$C_1 = \sum_{k=2}^{M-3} a(k)r(k), \quad C_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{M-3} a(k). \quad (18)$$

Ze wzoru (17) można wyeliminować operację pierwiastkowania. Ponadto do współczynników  $C_1$  i  $C_2$  można wprowadzić dodatkowe sumy uśredniające szum zakłócający użyteczny sygnał. Wówczas:

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( \frac{C_1}{C_2} - 1 \right), \quad (19)$$

gdzie:

$$C_1 = \sum_{k=2}^{M-w-3} \sum_{j=0}^w a(k+j)r(k+j), \quad C_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{M-w-3} \sum_{j=0}^w a(k+j), \quad (20)$$

przy czym  $0 \leq w \leq M-5$ . Z badań własnych wynika, że:

$$w = \underset{0 \leq w \leq M-5}{\operatorname{argmin}} \{ \operatorname{MSE}[\tilde{\omega}_0] \} = 5, \quad (21)$$

gdzie:

$$\operatorname{MSE}[\tilde{\omega}_0] \approx \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} (\tilde{\omega}_0^{(i)} - \omega_0)^2. \quad (22)$$

Na podstawie wzoru (19) można sformułować algorytm korelacyjny do estymacji częstotliwości kątowej  $\omega_0$ :

1. Przeprowadzić próbkowanie sygnału  $y(t)$  z częstotliwością próbkowania  $f_s > 4f$  i uzyskać  $2M$  próbek sygnału.
2. Wyznaczyć próbki ACF na podstawie wzoru (11).
3. Przyjąć  $w=5$  we wzorze (20).
4. Oszacować  $\omega_0$  na podstawie wzoru (19).

Opracowany algorytm nazwano AMC-AC (averaged modified covariance for autocorrelation).

## 4. WYNIKI BADAŃ

### 4.1. Symulacje

Przeprowadzono badania polegające na wyznaczeniu i porównaniu MSE estymatora  $\tilde{\omega}_0$  częstotliwości kątowej  $\omega_0$ . W tym celu wyznaczono w sposób symulacyjny próbki sygnału sinusoidalnego zakłóconego szumem Gaussa. Na tej podstawie wyznaczono próbki funkcji autokorelacji sygnału. Następnie z zastosowaniem algorytmów AMC-AC, MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR przeprowadzono szacowanie  $\omega_0$  i wyznaczono wartości błędu (22). W kolejnym kroku sporządzono charakterystyki MSE w funkcji SNR,  $M$

i  $N$ . Charakterystyki MSE zestawiono z CRLB (Cramer-Rao lower bound) obliczanym ze wzoru [12]:

$$\text{CRLB} \approx \frac{12}{10^{\frac{\text{SNR}}{10}} 2M(4M^2 - 1)}. \quad (23)$$

Na podstawie charakterystyk MSE i CRLB wyznaczono i porównano średnie odchyłki MSE od CRLB:

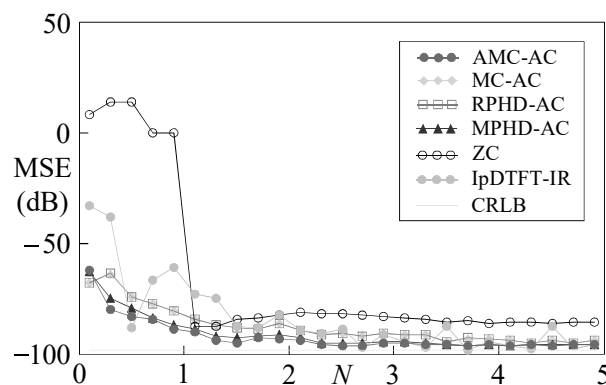
$$\bar{\Delta} = \frac{1}{W} \sum_{k=0}^{W-1} (\text{MSE}[\tilde{\omega}_0, k] - \text{CRLB}[k]), \quad (24)$$

gdzie  $W$  to liczba punktów na charakterystyce.

Podczas badań przyjęto  $A=3\sqrt{2}$  V,  $\omega=0,02$  ( $N=2$ , rysunek 4),  $\omega=0,2$  ( $N=20$ , rysunek 5),  $M=100$  (rysunki 2–5),  $\text{SNR}=40$  dB (rysunki 2, 3, 6 i 7),  $w=5$ ,  $K=1000$ . Faza  $\varphi$  była randomizowana z zastosowaniem generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie równomiernym na przedziale  $[0, 2\pi)$ .

#### 4.1.1. Oddziaływanie liczby okresów na błędy estymacji częstotliwości

W pierwszej kolejności wyznaczono i porównano wyniki błędu (22) w sytuacji, gdy  $0,1 \leq N \leq 5$  ( $0,001 \leq \omega \leq 0,05$ ). Badanie dokładności estymacji częstotliwości w sytuacji, gdy liczba okresów sygnału jest mała jest ważne ze względu na systemy czasu rzeczywistego, w których wyznaczenie częstotliwości następuje zwykle zanim minie kilka okresów sygnału. Z rysunku 2 wynika, że w przyjętych warunkach pomiaru algorytm AMC-AC jest jednym z najdokładniejszych. Wyniki z tabeli 2 pokazują, że algorytm AMC-AC charakteryzuje się najmniejszą wartością odchyłki (24).

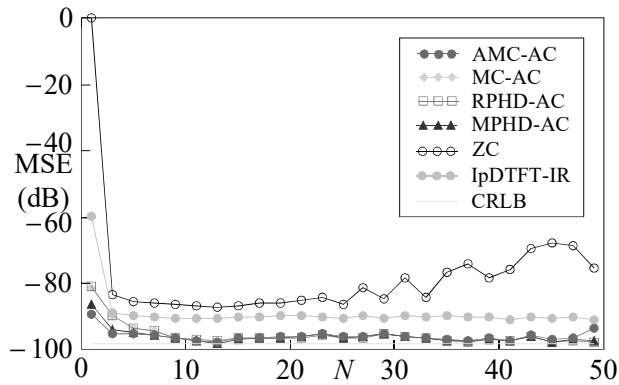


Rys. 2. Charakterystyki błędu (22) w funkcji  $N$  ( $0,001 \leq \omega \leq 0,05$ )  
Fig. 2. Error characteristics (22) as a function of  $N$  ( $0,001 \leq \omega \leq 0,05$ )



Różnice między odchyłką algorytmu AMC-AC a odchyłkami algorytmów MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR wyniosły odpowiednio: 4,558; 4,588; 1,092, 25,93; 8,168 dB.

Kolejne badanie polegało na wyznaczeniu i porównaniu wyników błędu (22) w sytuacji, gdy  $1 \leq N \leq 50$  ( $0,01 \leq \omega \leq 0,5$ ). W tej sytuacji pomiarowej dokładność algorytmu AMC-AC była porównywalna z dokładnościami pozostałych algorytmów korelacyjnych. Opracowany algorytm okazał się jedynie nieznacznie mniej dokładny od algorytmu MPHD-AC (rysunek 3). Z tabeli 2 wynika, że różnice między odchyłką algorytmu AMC-AC a odchyłkami algorytmów MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR wyniosły odpowiednio: 0,327; 0,330; -0,106; 18,14; 6,961 dB.



Rys. 3. Charakterystyki błędu (22) w funkcji  $N$  ( $0,01 \leq \omega \leq 0,5$ )  
Fig. 3. Error characteristics (22) as a function of  $N$  ( $0,01 \leq \omega \leq 0,5$ )

Tabela 2.

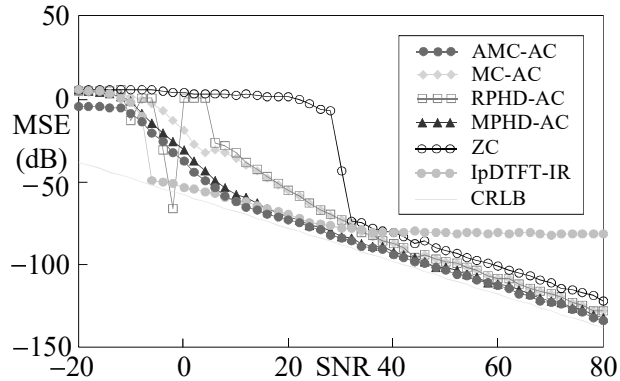
Odchyłka (24) w dB dla danych z rysunków 2 i 3

$N$ ( $\omega$ )	AMC- AC	MC- AC	RPHD- AC	MPHD- AC	ZC	IpDTFT -IR
$0,1 \leq N \leq 5$ ( $0,001 \leq \omega \leq 0,05$ )	6,392	10,95	10,98	7,484	32,32	14,56
$1 \leq N \leq 50$ ( $0,01 \leq \omega \leq 0,5$ )	2,159	2,486	2,489	2,053	20,302	9,120

#### 4.1.2. Oddziaływanie szumu Gaussa na błędy estymacji częstotliwości

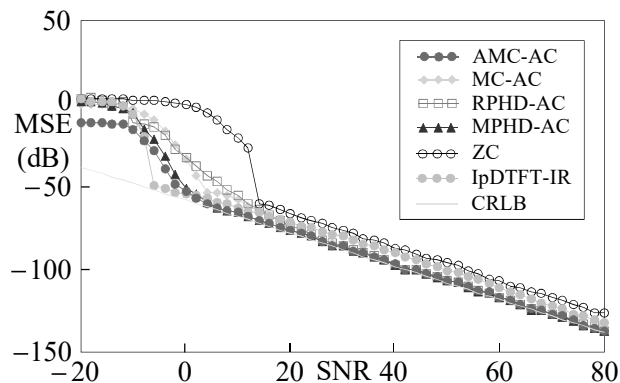
W kolejnym kroku sprawdzono oddziaływanie szumu Gaussa na dokładność estymacji częstotliwości. Na rysunku 4 przedstawiono wyniki błędu (22) w funkcji SNR dla  $N=2$  ( $\omega=0,02$ ). Otrzymane wyniki są zgodne z zaprezentowanymi na rysunku 2. Ponownie estymator AMC-AC okazał się

najdokładniejszy. Potwierdziły to wyniki odchyłki (24) zaprezentowane w tabeli 3. Różnice między odchyłką algorytmu AMC-AC a odchyłkami algorytmów MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR wyniosły odpowiednio: 10,89; 12,22; 3,37; 30,05; 13,67 dB.



Rys. 4. Charakterystyki błędów (22) w funkcji SNR ( $N=2$ )  
Fig. 4. Error characteristics (22) as a function of SNR ( $N=2$ )

Sprawdzenie oddziaływania szumu Gaussa na błędy estymacji częstotliwości powtórzono dla  $N=20$  ( $\omega=0,2$ ). Należy zwrócić uwagę, że zwiększenie liczby okresów wpłynęło na zmniejszenie błędów algorytmów. Szczególnie dotyczy to algorytmów ZC i IpDTFT-IR. Wyniki błędów przedstawione na rysunku 5 pokazują, że algorytm AMC-AC jest jednym z najdokładniejszych i charakteryzuje się najmniejszą wartością odchyłki (24). Z tabeli 3 wynika, że różnice między odchyłką algorytmu AMC-AC a odchyłkami algorytmów MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR wyniosły odpowiednio: 4,770; 5,180; 1,911; 18,11; 4,800 dB.



Rys. 5. Charakterystyki błędów (22) w funkcji SNR ( $N=20$ )  
Fig. 5. Error characteristics (22) as a function of SNR ( $N=20$ )

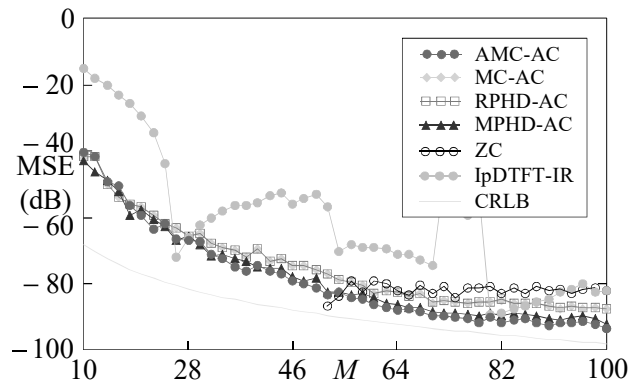
Tabela 3.

Odchyłka (24) w dB dla danych z rysunków 4 i 5

$N$ ( $\omega$ )	AMC- AC	MC- AC	RPHD- AC	MPHD- AC	ZC	IpDTFT -IR
$N=2$ ( $\omega=0,02$ )	11,28	22,17	23,50	14,65	41,33	24,95
$N=20$ ( $\omega=0,2$ )	6,360	11,13	11,54	8,271	24,47	11,16

#### 4.1.3. Oddziaływanie liczby próbek na błędy estymacji częstotliwości

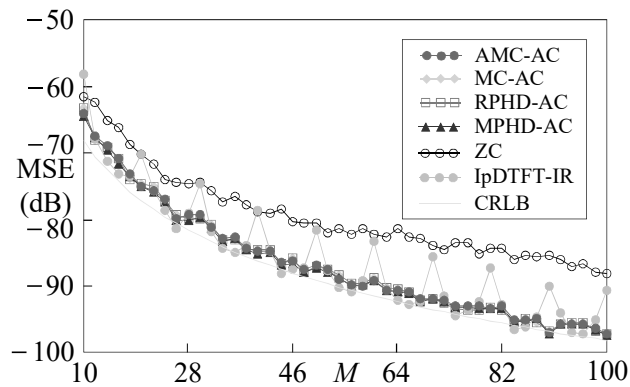
Ostatnie badanie polegało na sprawdzeniu oddziaływania liczby próbek na dokładność estymacji częstotliwości. W pierwszej kolejności przyjęto  $\omega=0,02$  i wyznaczono charakterystyki błędu (22) (rysunek 6) oraz wartości odchyłki (24) (tabela 4). Należy zwrócić uwagę, że w przyjętych warunkach pomiaru (SNR=40 dB), estymacja częstotliwości z zastosowaniem algorytmu ZC była możliwa, gdy  $M>50$ . Wyniki błędów pokazały, że jeżeli  $\omega=0,02$ , to algorytm AMC-RC ponownie okazał się jednym z najdokładniejszych o najmniejszej wartości odchyłki (24). Z tabeli 4 wynika, że różnice między odchyłką algorytmu AMC-AC a odchyłkami algorytmów MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR wyniosły odpowiednio: 3,839; 3,869; 0,879; 3,099; 17,67 dB.



Rys. 6. Charakterystyki błędu (22) w funkcji  $M$  ( $\omega=0,02$ )  
Fig. 6. Error characteristics (22) as a function of  $M$  ( $\omega=0,02$ )

W kolejnym kroku przyjęto  $\omega=0,2$  i ponownie wyznaczono charakterystyki błędu (22) (rysunek 7) oraz wartości odchyłki (24) (tabela 4). Zwiększenie wartości parametru  $\omega$  spowodowało znaczne zwiększenie dokładności estymacji

częstotliwości (szczególnie dla małej liczby próbek), przy czym algorytm AMC-AC okazał się dokładniejszy jedynie od algorytmów ZC i IpDTFT-IR. Z tabeli 4 wynika, że różnice między odchyłką algorytmu AMC-AC a odchyłkami algorytmów MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR wyniosły odpowiednio:  $-0,034$ ;  $-0,033$ ;  $-0,236$ ;  $7,073$ ;  $0,787$  dB.



Rys. 7. Charakterystyki błędu (22) w funkcji  $M$  ( $\omega=0,2$ )  
Fig. 7. Error characteristics (22) as a function of  $M$  ( $\omega=0.2$ )

Tabela 4.

Odchyłka (24) w dB dla danych z rysunków 6 i 7

$\omega$	AMC-AC	MC-AC	RPHD-AC	MPHD-AC	ZC	IpDTFT-IR
$\omega=0,02$	9,581	13,42	13,45	10,46	12,68	27,25
$\omega=0,2$	1,847	1,813	1,814	1,611	8,92	2,634

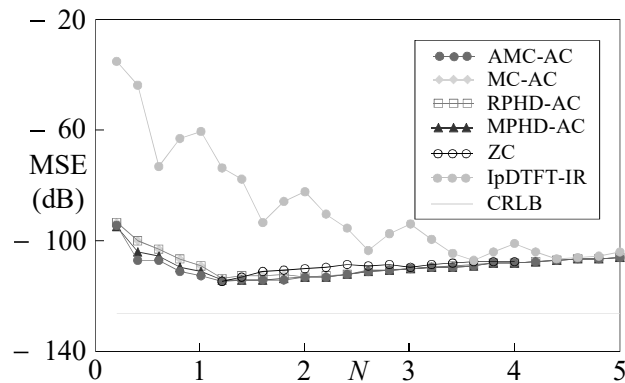
#### 4.2. Eksperyment

Przeprowadzono eksperyment polegający na pomiarze parametrów napięcia sinusoidalnego. W tym celu zbudowano system pomiarowy składający się z generatora funkcyjnego Agilent 33220A, częstotliwościomierza AIM-TTI TF930 oraz komputera PC z zainstalowaną kartą pomiarową PCI-6024E firmy National Instruments. Generator funkcyjny umożliwił generowanie napięcia sinusoidalnego o wartości skutecznej  $V_{RMS}=3$  V i częstotliwości  $f=50$  Hz. Dobór wartości częstotliwości na generatorze wynikał z ograniczonej maksymalnej częstotliwości próbkowania karty pomiarowej (200 kS/s) i większej stabilności napięcia na generatorze w zakresie niskich częstotliwości. Zadaniem częstotliwościomierza był pomiar częstotliwości napięcia z generatora (na częstotliwościomierzu ustawiono czas pomiaru równy 100 sekund). Karta

pomiarowa umożliwiła akwizycję próbek napięcia. Częstotliwość próbkowania napięcia wynosiła  $f_s=50$  kHz.

W wyniku przeprowadzonych pomiarów uzyskano częstotliwość referencyjną napięcia o wartości  $f_{ref}=49,9984$  Hz, która umożliwiła wyznaczenie błędów estymacji częstotliwości. Niepewność standardowa pomiaru częstotliwości wynosiła 0,6 ppm i wynikała głównie z występowania szumu w napięciu z generatora (błędy systematyczne częstościomierza były pomijalnie małe). Ponadto uzyskano plik zawierający  $K=100$  serii pomiarowych składających się z próbek napięcia sinusoidalnego. Każda seria zawierała 5000 próbek napięcia. Dla każdej serii pomiarowej wyznaczono SNR. W ten sposób otrzymano, że  $SNR \in [67, 69]$  dB.

W kolejnym kroku wyznaczono charakterystyki MSE estymatora  $\tilde{\omega}_0$  parametru  $\omega_0=2\pi f_{ref}/f_s$  szacowanego z zastosowaniem algorytmów AMC-AC, MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR. W tym celu z każdej serii pomiarowej wybrano co  $Z$ -tą próbkę napięcia. W ten sposób otrzymano  $K=100$  serii pomiarowych składających się z  $5000/Z$  próbek napięcia ( $M=5000/(2Z)$  próbek na okres). Następnie, przyjmując  $z=1, 2, \dots, Z$ , wyznaczono nowe wartości  $f_s^{(z)}=f_s/z$ ,  $\omega_0^{(z)}=2\pi f_{ref}/f_s^{(z)}$ ,  $N^{(z)}=M\omega^{(z)}$ . Umożliwiło to obliczenie MSE dla różnych wartości  $\omega$  (lub  $N$ ). Do obliczenia MSE zastosowano wzór (22). Na rysunku 8 przedstawiono charakterystyki MSE w funkcji  $N$ . Podczas wyznaczania charakterystyk przyjęto  $Z=25$  ( $M=100$ ,  $0<\omega\leq 0,05$ ,  $0<N\leq 5$ ). Wyniki MSE porównano z CRLB obliczonym dla  $SNR=67$  dB. W tabeli 5 przedstawiono wartości odchyłek MSE od CRLB. Do obliczenia odchyłek zastosowano wzór (24).



Rys. 8. Charakterystyki błędu (22) w funkcji  $N$  ( $0<\omega\leq 0,05$ )  
 Fig. 8. Error characteristics (22) as a function of  $N$  ( $0<\omega\leq 0.05$ )

Tabela 5.

Odchyłka (24) w dB dla danych z rysunku 8

$N$ ( $\omega$ )	AMC- AC	MC- AC	RPHD- AC	MPHD- AC	ZC	IpDTFT -IR
$0 < N \leq 5$ ( $0 < \omega \leq 0,05$ )	16,77	17,89	17,88	17,11	17,48	37,87

Zaprezentowane wyniki błędów dotyczą sytuacji pomiarowej, gdy liczba okresów mierzonego sygnału jest mała. Jak łatwo zauważyć, wyniki eksperymentu są zgodne z wynikami symulacji (zobacz rysunek 2). Jeżeli liczba okresów jest mała, to algorytm AMC-AC jest jednym z najdokładniejszych i charakteryzuje się najmniejszą wartością odchyłki (24). Wynikające z tabeli 5 różnice między odchyłką algorytmu AMC-AC a odchyłkami algorytmów MC-AC, RPHD-AC, MPHD-AC, ZC i IpDTFT-IR wyniosły odpowiednio: 1,120; 1,110; 0,340; 0,710; 21,10 dB.

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono nowy, czasowo-dyskretny algorytm korelacyjny AMC-AC do estymacji częstotliwości sygnału sinusoidalnego. Opracowany algorytm porównano z innymi algorytmami korelacyjnymi, tj. z MC-AC, RPHD-AC i MPHD-AC. Do badań porównawczych zastosowano również czasowo-dyskretny algorytm ZC oraz algorytm widmowy IpDTFT-IR. W celu porównania algorytmów przeprowadzono badania symulacyjne i eksperymentalne polegające na estymacji częstotliwości sygnału sinusoidalnego zakłóconego szumem Gaussa oraz rzeczywistego napięcia sinusoidalnego z generatora funkcyjnego. Następnie wyznaczono i porównano błędy wyników estymacji. Z przeprowadzonych badań wynika, że opracowany algorytm jest jednym z najdokładniejszych. Jednocześnie algorytm AMC-AC umożliwia wyznaczanie częstotliwości z największą dokładnością w sytuacji, gdy liczba okresów sygnału jest mała (nie większa niż pięć).

## LITERATURA

1. Adelson R. M.: Frequency estimation from few measurements, *Dig. Sig. Proc.*, 7 (1), 1997, 47–54.
2. So H. C.: A closed form frequency estimator for a noisy sinusoid, 45th Mid. Symp. Circ. Syst., Tulsa, OK, USA, Aug., 2002, II 160–II 163.
3. Lui K. W. K., So H. C.: Modified Pisarenko harmonic decomposition for single-tone frequency estimation, *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 56 (7), 2008, 3351–3356.

4. Martinez M. A., Ashrafi A.: Real-valued single-tone frequency estimation using half-length autocorrelation. *Dig. Sig. Proc.*, 83, 2018, 98–106.
5. Al-Qudsi B., El-Shennawy M., Joram N., Ellinger F.: Enhanced zero crossing frequency estimation for FMCW radar systems. 13th Conf. Ph.D. Res. Micr. Elect. (PRIME), Giardini Naxos, 2017, 53–56.
6. Belega D., Petri D., Dallet D.: Accurate frequency estimation of a noisy sine-wave by means of an interpolated discrete-time Fourier transform algorithm. *Meas.*, 116, 2018, 685–691.
7. Al-Qudsi B., El-Shennawy M., Joram N., Ellinger F.: Enhanced zero crossing frequency estimation for FMCW radar systems. 13th Conf. Ph.D. Res. Micr. Elect. (PRIME), Giardini Naxos, 2017, 53–56.
8. Hague D. A., Buck J. R.: An experimental evaluation of the generalized sinusoidal frequency modulated waveform for active sonar systems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 145 (6), 2019, 3741–3755.
9. Rice F., Cowley B., Moran B., Rice M.: Cramer-Rao lower bounds for QAM phase and frequency estimation. *IEEE Trans. Commun.*, 49 (9), 2001, 1582–1591.
10. Toth L., Kocsor A.: Harmonic alternatives to sine-wave speech. *EUROSPEECH-2003*, 2003, 2073–2076.
11. Bendat J. S., Piersol A. G.: *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley & Sons, 4th Edition, 2010.
12. Kay S. M.: *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1993.