

IFAC



WARSZAWA 1969

INTERNATIONAL FEDERATION
OF AUTOMATIC CONTROL

Guidance and Control in Space

Fourth Congress of the International
Federation of Automatic Control
Warszawa 16–21 June 1969

TECHNICAL
SESSION

57



Organized by
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce

INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL

Guidance and Control in Space

TECHNICAL SESSION No 57

**FOURTH CONGRESS OF THE INTERNATIONAL
FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL
WARSZAWA 16 — 21 JUNE 1969**



**Organized by
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce**



K-1325

<u>Contents</u>			
Paper No			Page
57.1	SU	- V.A.Besekersky, V.G.Gordeev, J.G.Ostromuhov - Two-rotor Gyroorbit Theory.....	3
57.2	SU	- E.V.Gaushus - Investigation of Multiplex Auto-Oscillations of Spacecraft.....	15
57.3	SU	- V.I.Popov, V.Yu.Rutkovskii - Dynamic Studies of Preliminary Stabilization System of a Gravity-Stabilized Satellite with Taking Into Account Transducers Constraints and Bending Oscillations of Stabilizer.....	35
57.4	D /GFR/	- H.Roderer, H.A.Seelmann, H.W.Woitschella - The Design of An 2-Axes-Attitude Stabilization System for Spinning Payloads.....	53
57.5	SU	- Ju.P.Gouskov, S.V.Bunjakin - Turn Maneuver Control of a Circular Orbit Plane Providing for a Satellite Passage Through a Given Point.....	84
57.6	USA	- E.G.Smith - On the Synthesis of a Control Moment Gyro Implemented Spacecraft Attitude Control System.....	98
57.7	USA	- W.L.Garrard, L.G.Clark - On the Synthesis of Suboptimal, Inertia-Wheel Attitude Control Systems	127
57.8	SU	- E.A.Fedosov, A.M.Batkov, V.F.Levitin - V.A. Skripkin - General Problems of Guidance Theory	143

**Biblioteka
Politechniki Białostockiej**



1120438

Wydawnictwa Czasopism Technicznych NOT - Polska

Zakład Poligraficzny WCT NOT. Zam. 130/69.

ТЕОРИЯ ДВУХРОТОРНОЙ ГИРООРБИТЫ

Доктор технических наук В.А.Бесекерский

Доктор технических наук В.Г.Гордеев

Кандидат технических наук Я.Г.Остромухов

Институт точной механики и оптики

Ленинград

СССР

1. Введение

В настоящее время разработана и опубликована теория одно-роторной гироскопической орбиты, используемой на искусственных спутниках Земли (ИСЗ) для построения плоскости его орбиты¹⁻⁴. Совместно с построителем местной вертикали инфракрасного или иного типа гироскопическая орбита дает возможность построения на борту спутника текущей орбитальной системы координат, которая может приниматься в качестве опорной или базовой системы координат при решении различных задач. К числу таких задач относятся, например, геодезическая съемка, метеорологическая разведка, обеспечение связи и навигации наземных объектов и др.

При необходимости обеспечения режима памяти, то есть при работе с отключенным построителем вертикали, на борту ИСЗ устанавливается дополнительная гироскопическая вертикаль, которая одновременно может служить в качестве сглаживающего устройства, повышающего точность работы гироскопической орбиты. Один из таких комплексных гироскопических приборов описан в работах^{2,3}. Его некоторым недостатком является необходимость организации прецессионного движения гироскопической вертикали в режиме нормальной ориентации и в режиме памяти. Это существенно снижает точность работы гироскопического прибора вследствие нелинейности и неустойчивости устройств, реализующих прецессию гироскопа.

От этого недостатка в значительной мере свободна двухроторная гироскопическая орбита, которая описана в работе⁵. Особенностью этой гироскопической орбиты является использование двух гироскопов (фиг.1) с кинетическими моментами H_1 и H_2 , расположенными в плоскости орбиты под углом 90° друг к другу.

На фиг. I изображена текущая орбитальная система координат x_c, y_c, z_c , оси которой расположены по трансверсали, текущей вертикали и бинормали. Три последовательных поворота на Эйлеровы углы поворота спутника: курса (рыскания) ψ , тангажа ϑ и крена (вращения) δ дает связанную с ИСЗ систему координат x_c, y_c, z_c . Поворот на угол ϵ_p дает приборную плоскость орбиты. Поворот на угол орбитального движения φ^* в плоскости приборной орбиты дает опорную систему координат

x_2, y_2, z_2 . Векторы кинетических моментов H_1 и H_2 отклонены от этой системы координат на углы α_1, β_1 и α_2, β_2 .

Двухроторная гиросфера является также комплексным гиросприбором, обеспечивающим построение орбиты в режиме нормальной ориентации и построение орбиты и текущей вертикали в режиме памяти. Однако векторы кинетических моментов оказываются здесь расположенными в инерциальном пространстве (с точностью до прецессии орбиты), что существенно снижает ошибки гиросприбора вследствие исключения необходимости организации прецессионного движения после того, как опорная система координат построена на борту ИСЗ.

Ниже рассматривается построение плоскости орбиты. Построение текущей вертикали не имеет особенностей по сравнению с обычной гиравертикалью за исключением исключения прецессионного движения гироскопа. Орбитальный угол φ^* (фиг. I) в этом случае строится отдельным точным приводом, скорость которого изменяется в соответствии с круговым или эллиптическим движением ИСЗ.

2. Исходные уравнения

Ограничиваясь прецессионной теорией и считая систему управления ИСЗ относительно его осей независимой и идеальной, можно записать уравнения движения первого и второго гироскопов в виде

$$\left. \begin{aligned} H_1 p_1 &= M_{21} + M_{021}, \\ -H_1 z_1 &= M_{x1} + M_{0x1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} -H_2 q_2 &= M_{22} + M_{022}, \\ H_2 q_2 &= M_{y2} + M_{0y2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь H_1 и H_2 - кинетические моменты; M_{z1} , M_{x1} , M_{z2} и M_{y2} - управляющие моменты; $M_{\delta z1}$, $M_{\delta x1}$, $M_{\delta z2}$ и $M_{\delta y2}$ - возмущающие моменты, спроектированные на соответствующие оси.

Проекции абсолютной угловой скорости на оси Резаля определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \|\omega_e\| \times \|e_{1j}\| + \omega_{x1}, \\ z_1 &= \|\omega_e\| \times \|e_{3j}\| + \omega_{z1}, \\ q_2 &= \|\omega_e\| \times \|e'_{2j}\| + \omega_{y2}, \\ z_2 &= \|\omega_e\| \times \|e'_{3j}\| + \omega_{z2}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$j = 1, 2, 3$

где $\|e_{1j}\|$, $\|e'_{2j}\|$, $\|e_{3j}\|$ и $\|e'_{3j}\|$ - матрицы, определяющие направляющие косинусы, а угловые скорости определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x1} &= \dot{\alpha}_1 - \dot{\epsilon}_p \sin(\varphi^* + \beta_1) \\ \omega_{z1} &= \dot{\beta}_1 \cos \alpha + \dot{\epsilon}_p \sin \alpha \cos(\varphi^* + \beta_1) \\ \omega_{y2} &= \dot{\alpha}_2 + \dot{\epsilon}_p \cos(\varphi^* + \beta_2) \\ \omega_{z2} &= \dot{\beta}_2 \cos \alpha_2 + \dot{\epsilon}_p \sin(\varphi^* + \beta_2) \sin \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Управляющие моменты для бокового движений можно сформировать в соответствии с выражениями

$$\left. \begin{aligned} M_{z1} &= -k'_1 \delta \sin(\varphi^* + \varphi_0) - k'_2 \int_0^t \delta \sin(\varphi^* + \varphi_0) dt, \\ M_{z2} &= -k'_3 \delta \cos(\varphi^* + \varphi_0) - k'_4 \int_0^t \delta \cos(\varphi^* + \varphi_0) dt, \\ \delta &= \alpha \cos(\varphi^* + \beta_1) - \alpha_2 \sin(\varphi^* + \beta_2) - (\delta_0 \cos \epsilon_p + \gamma_0 \sin \epsilon_p) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь k'_1 и k'_3 - коэффициенты передачи канала коррекции, k'_2 и k'_4 - коэффициенты передачи интегральной коррекции, φ_0 - некоторый постоянный угол, вводимый для улучшения переходных процессов, δ_0 и γ_0 - сигналы, снимаемые с индикатора местной вертикали.

В плоскости орбиты корректирующие сигналы формируются в виде

$$\left. \begin{aligned} M_{x_1} &= k_5' \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \\ M_{y_2} &= -k_5' \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения для карданова подвеса, обеспечивающего слежение за гироскопами по углам ε_p и φ^* , будут

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_p &= k_6 [\alpha_2 \cos(\varphi^* + \beta_1) + \alpha_1 \sin(\varphi^* + \beta_2)], \\ \dot{\varphi}^* &= k_7 \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где k_6 и k_7 - добротности следящих систем кардановых колец.

В систему стабилизации ИСЗ относительно осей Ox_c, Oy_c и Oz_c поступают сигналы, пропорциональные углам

$$\Delta\psi = \varepsilon_p,$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\psi} &= (\varphi_{np} - \varphi^*) \cos \varepsilon_p - [\alpha_1 \cos(\varphi^* + \beta_1) - \alpha_2 \sin(\varphi^* + \beta_2)] \sin \varepsilon_p, \\ \Delta\dot{\varphi} &= [\alpha_1 \cos(\varphi^* + \beta_1) - \alpha_2 \sin(\varphi^* + \beta_2)] \cos \varepsilon_p - (\varphi_{np} - \varphi^*) \sin \varepsilon_p. \end{aligned} \quad (8)$$

Программное значение угла φ_{np} для круговых или почти круговых орбит может вырабатываться в соответствии с выражением

$$\dot{\varphi}_{np} = \Omega_n + c_1 \Delta\dot{\psi} + c_2 \int_0^t \Delta\dot{\psi} dt, \quad (9)$$

где Ω_n - программное значение орбитальной скорости; c_1 и c_2 - коэффициенты передачи в цепи привода, вырабатывающего φ_{np} ; $\Delta\dot{\psi} = (\dot{\psi}_s \cos \varepsilon_p - \dot{\psi}_s \sin \varepsilon_p) - \dot{\psi}^*$ и $\dot{\psi}^* = \varphi_{np} - \varphi^*$.

Полная система уравнений (I) - (9) может быть исследована только на вычислительных машинах вследствие высокого порядка и существенных нелинейностей.

Ограничимся решением линеаризованных уравнений. Положим, что $H_1 = H_2 = H$ и обозначим $k_1 = k_1' H^{-1}$, $k_2 = k_2' H^{-1}$, положив $k_1 = k_2 = k$.

Обозначим углы между гироскопической плоскостью и плоскостью орбиты, замеренные в горизонтальной и вертикальной плоскостях через ε и α . Эти углы по существу являются

исковыми переменными, определяющими точность построения орбиты

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \psi^* - \varepsilon_p - \alpha_1 \cos \varphi^* - \alpha_2 \sin \varphi^*, \\ \alpha &= \gamma^* - \alpha_2 \cos \varphi^* + \alpha_1 \sin \varphi^*. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Углы γ^* , ϑ^* и ψ^* будем считать малыми.

Уравнения, описывающие построение плоскости орбиты, и ошибки ориентации ИСЗ по углам γ^* и ψ^* могут быть рассмотрены независимо от уравнений, описывающих движение гироскопов в плоскости, образуемой векторами кинетических моментов, и движения привода, вырабатывающего φ_{np} . Кроме того, ограничимся случаем отсутствия интегральной коррекции, то есть положим $k_3 = k_4 = 0$.

Тогда линеаризованная система уравнений для бокового движения гироскопа сводится к виду

$$(\Omega_1 \varepsilon + \dot{\alpha}) \cos \varphi^* - (\Omega_2 \alpha - \dot{\varepsilon}) \sin \varphi^* = k \gamma_s \sin(\varphi^* + \varphi_0) + a$$

$$(\Omega_2 \varepsilon + \dot{\alpha}) \sin \varphi^* + (\Omega_2 \alpha - \dot{\varepsilon}) \cos \varphi^* = k \gamma_s \sin(\varphi^* + \varphi_0) + b$$

$$\Omega_1 = \Omega_0 - \dot{\vartheta} - \omega_{np} \cos i$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 - \omega_{np} \cos i$$

(11)

$$a = \omega_{np} \sin i \cos \Delta \varphi + \omega_1$$

$$b = \omega_{np} \sin i \sin \Delta \varphi + \omega_2$$

$$\gamma_s = \alpha + \Delta \gamma_s$$

Здесь ω_{np} - скорость прецессии орбиты, i - угол наклона орбиты, ω_1 и ω_2 - скорости уходов гироскопов, $\Delta \gamma_s$ - погрешность построителя местной вертикали.

Для орбит с малым эксцентриситетом ($e \leq 0,3$) можно положить $\varphi^* = \Omega_0 t$. Тогда из системы (11) можно получить уравнения в преобразованиях Карсона с учетом ненулевых начальных условий

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega_1 \varepsilon(p) + (p + k \cos \varphi_0) \alpha(p) &= A(p), \\
 -p \varepsilon(p) + (\Omega_2 + k \sin \varphi_0) \alpha(p) &= B(p), \\
 A(p) &= \frac{(a p + b \Omega_1) p}{p^2 + \Omega_1^2} + p \alpha(0) + \Delta \delta_g k \cos \varphi_0, \\
 B(p) &= \frac{(b p - a \Omega_2) p}{p^2 + \Omega_2^2} + p \varepsilon(0) + \Delta \delta_g k \sin \varphi_0
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Решение этой системы уравнений может быть записано в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon(p) &= \frac{A(p)(\Omega_2 + k \sin \varphi_0) - B(p)(p + k \cos \varphi_0)}{p^2 + k \cos \varphi_0 p + \Omega_1(\Omega_2 + k \sin \varphi_0)}, \\
 \alpha(p) &= \frac{B(p)\Omega_1 + p A(p)}{p^2 + k \cos \varphi_0 p + \Omega_1(\Omega_2 + k \sin \varphi_0)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из (13), в частности, следует условие устойчивости двух-роторной гиросистемы $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Характеристическое уравнение (13) совпадает с характеристическим уравнением однороторной гиросистемы¹⁻⁴, если положить коэффициенты коррекции $k_1 = k \cos \varphi_0$ и $k_2 = k \sin \varphi_0$.

3. Основные составляющие ошибки построения плоскости орбиты

В соответствии с формулами (12) и (13) ошибки построения плоскости орбиты по курсу ε и крену α можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon &= \varepsilon_g + \varepsilon_{np} + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_0, \\
 \alpha &= \alpha_g + \alpha_{np} + \alpha_\gamma + \alpha_0,
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где ε_g и α_g - ошибки, вызванные уходом гироскопов, ε_{np} и α_{np} - ошибки, вызванные прецессией орбиты, ε_γ и α_γ - ошибки, вызванные помехами в сигнале построителя вертикали,

ε_0 и α_0 - ошибки, вызванные ненулевыми начальными условиями. В дальнейшем ошибки от прецессии орбиты не рассматриваются вследствие их малости.

Ошибки от ненулевых начальных условий. Для упрощения положим $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, что допустимо при установившемся пере-

ходном процессе по углу ϑ^* . Тогда

$$\varepsilon_0(p) = \frac{p\alpha(0)(\Omega + k \sin \varphi_0) - p\varepsilon(0)(p + k \cos \varphi_0)}{p^2 + pk \cos \varphi_0 + \Omega^2 + \Omega k \sin \varphi_0} \quad (15)$$

$$\alpha_0(p) = \frac{p\varepsilon(0)\Omega + p^2\alpha(0)}{p^2 + pk \cos \varphi_0 + \Omega^2 + \Omega k \sin \varphi_0}$$

Из формул (15) видно, что при $t \rightarrow \infty$ углы $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ и $\alpha_0 \rightarrow 0$.

Характер переходного процесса определяется корнями характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}(-k \cos \varphi_0 \pm \sqrt{k^2 \cos^2 \varphi_0 - 4\Omega k \sin \varphi_0 - 4\Omega^2}) \quad (16)$$

В частности, для минимального времени переходного процесса при кратных корнях получаем

$$\varphi_0 = \arcsin\left(1 - \frac{2\Omega}{k}\right) \quad (17)$$

Ошибки от ухода гироскопов. Из формул (12) и (13) можно получить

$$\varepsilon_B(p) = \frac{\omega_2 p(p^2 + A_1 p + B_1)}{(p^2 + \Omega^2)(p + \frac{k \cos \varphi_0}{2})^2}, \quad (18)$$

$$\alpha_B(p) = \frac{\omega_1 p(p^2 + A_2 p + B_2)}{(p^2 + \Omega^2)(p + \frac{k \cos \varphi_0}{2})^2},$$

где

$$A_1 = k \cos \varphi_0 - \frac{\omega_1}{\omega_2} (2\Omega + k \sin \varphi_0),$$

$$B_1 = -\Omega(\Omega + k \sin \varphi_0 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \varphi_0),$$

$$A_2 = 2\Omega \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

$$B_2 = -\Omega^2.$$

Из формул (18) можно найти оригиналы функций

$$\begin{aligned} \varepsilon_B(t) &= \varepsilon_m \sin(\Omega t + \lambda) + (\varepsilon^* t + \varepsilon^{**}) e^{-\frac{t}{T}}, \\ \alpha_B(t) &= \alpha_m \sin(\Omega t + \lambda_1) + (\alpha^* t + \alpha^{**}) e^{-\frac{t}{T}} \end{aligned} \quad (19)$$

Для угла $\varepsilon_g(t)$ значения параметров:

$$\varepsilon_m = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\Omega} \sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0},$$

$$\lambda = \arctg \frac{\omega_1 \sin \varphi_0 - \omega_2 \cos \varphi_0}{\omega_2 \sin \varphi_0 + \omega_1 \cos \varphi_0} - 2 \arctg \frac{\cos \varphi_0}{1 + \sin \varphi_0},$$

$$\varepsilon^* = \omega_1 \operatorname{tg} \varphi_0 - \omega_2,$$

$$\varepsilon^{**} = \frac{\omega_1 (\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0) / (1 + \cos \varphi_0) - 2 \omega_2 \cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0}{\Omega}.$$

Соответственно для угла $\alpha_g(t)$:

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\Omega} (1 - \sin \varphi_0)$$

$$\lambda_1 = - \arctg \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2 \arctg \frac{\cos \varphi_0}{1 + \sin \varphi_0}$$

$$\alpha^* = \omega_1 \sin \varphi_0 - 2 \omega_2 \cos \varphi_0$$

$$\alpha^{**} = - \frac{\omega_2 \sin \varphi_0 + \omega_1 \cos \varphi_0}{\Omega} (1 - \sin \varphi_0)$$

Из полученных выражений следует, что ошибки двухроторной гироскопической системы, вызванные постоянными уходами гироскопов, изменяются по гармоническому закону с периодом обращения ИСЗ. Амплитуда ошибки ε_m не может быть сделана меньше значения

$$\varepsilon_m^0 = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\Omega} \quad (20)$$

Амплитуда ошибки α_m при соответствующем выборе угла φ_0 может быть уменьшена до любого значения.

Ошибки, вызванные помехами построителя вертикали.

Из формул (12) и (13) можно получить

$$\varepsilon_y(p) = - \Delta \gamma_0 \frac{k(\Omega \cos \varphi_0 - p \sin \varphi_0)}{p^2 + pk \cos \varphi_0 + \Omega(\Omega + k \sin \varphi_0)} \quad (21)$$

$$\alpha_y(p) = \Delta \gamma_0 \frac{k(\Omega \sin \varphi_0 + p \cos \varphi_0)}{p^2 + pk \cos \varphi_0 + \Omega(\Omega + k \sin \varphi_0)}$$

Для постоянной помехи $\Delta \gamma_0 = \Delta \gamma_{0.} = \text{const}$ установившиеся значения ошибок

$$\varepsilon_{\text{уст}} = - \frac{\Delta \gamma_0 \cdot k \cos \varphi_0}{\Omega + k \sin \varphi_0} \approx - \Delta \gamma_0 \cdot \operatorname{ctg} \varphi_0,$$

$$\alpha_{\text{уст}} = \frac{\Delta \gamma_0 k \sin \varphi_0}{\Omega + k \sin \varphi_0} \approx \Delta \gamma_0 \quad (22)$$

При действии гармонических помех в сигнале построителя вертикали $\Delta \gamma_0 = \Delta \gamma_m \sin \omega_0 t$ или для случая, когда ИСЗ совершает автоколебания по углу крена в зоне нечувствительности построителя вертикали, ошибки гироорбиты будут также меняться по гармоническому закону. Амплитуды ошибок можно найти из формул (21)

$$\varepsilon_{m\gamma} = \Delta \gamma_m k \sqrt{\frac{\Omega^2 \cos^2 \varphi_0 + \omega_0^2 \sin^2 \varphi_0}{[\Omega(\Omega + k \sin \varphi_0) - \omega_0^2]^2 + k^2 \omega_0^2 \cos^2 \varphi_0}},$$

$$\alpha_{m\gamma} = \Delta \gamma_m k \sqrt{\frac{\Omega^2 \sin^2 \varphi_0 + \omega_0^2 \cos^2 \varphi_0}{[\Omega(\Omega + k \sin \varphi_0) - \omega_0^2]^2 + k^2 \omega_0^2 \cos^2 \varphi_0}} \quad (23)$$

Интересен частный случай, когда ошибка вертикали вызвана эллиптичностью Земли. Тогда

$$\Delta \gamma_0 = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad (24)$$

где a и b - экваториальный и полярный радиусы Земли, x - координата точки земной поверхности, измеренная в плоскости экватора. Максимальной ошибке соответствует координата

$$x_m = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad (25)$$

Тогда

$$\Delta \gamma_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad (26)$$

Для эллипсоида Красовского

$$\Delta \gamma_0 = \Delta \gamma_{\max} \sin \varphi \quad (27)$$

где $\Delta \gamma_{max}$ - II угл. мин, а φ - орбитальный угол, отсчитанный от линии узлов. Для этого случая из формул (23) можно получить $\varepsilon_{m\gamma} = \alpha_{m\gamma} = \Delta \gamma_{max} =$ II угл. мин.

Действие случайных помех. Примем, что спектральная плотность помех построителя вертикали может быть представлена в виде

$$S_{\theta}(\omega) = \frac{2\Delta\gamma_{ск}^2 T_K}{1 + \omega^2 T_K^2}$$

Тогда, определив из формул (2I) спектральные плотности ошибок и проинтегрировав их по всем частотам, получим

$$\varepsilon_{ск}^2 = \Delta\gamma_{ск}^2 \frac{T_K(k_1^2 + k_2^2 \Omega + k_2^2 T_K \Omega)}{k_1 k_2 (1 + k_2 T_K + k_1 T_K \Omega)} \approx \Delta\gamma_{ск}^2 T_K k \operatorname{tg} \varphi_0 \sin \varphi_0,$$

$$\alpha_{ск}^2 = \Delta\gamma_{ск}^2 \frac{T_K(k_2^2 + k_1 \Omega + k_1 k_2 T_K \Omega)}{k_2 (1 + k_2 T_K + k_1 T_K \Omega)} \approx \Delta\gamma_{ск}^2 T_K k \cos \varphi_0$$

(28)

где $k_1 = k \cos \varphi_0$ и $k_2 = k \sin \varphi_0$

Последние формулы могут использоваться для определения значения коэффициента коррекции k , обеспечивающего требуемое сглаживание помех построителя текущей вертикали.

4. Выводы

I. Основные динамические свойства двухроторной гироскопической системы близки к динамическим свойствам комплексного гироскопического прибора, содержащего однороторную гироскопическую орбиту и прецессирующую гироскопическую вертикаль. Однако в отличие от последнего двухроторная гироскопическая орбита работает в более благоприятных условиях и не содержит ошибок, связанных с необходимостью организации прецессионного движения гироскопической вертикали. Это в значительной степени повышает точность в режиме памяти.

2. Постоянные уходы гироскопов приводят к ошибкам построения плоскости орбиты, изменяющимся по гармоническому закону. В этом проявляется модулирующее свойство двухроторной гироскопической орбиты. Разный спектр однороторной и двухроторной гироскопических орбит по-

звolyет организовать их эффективное комплексирование.

3. Двухроторная гиросорбита может обеспечить требуемое сглаживание помех, содержащихся в сигнале построителя местной вертикали, что повышает точность построения опорной системы координат на ИСЗ.

Литература

1. Робертсон Р.Э. Измерение угла рыскания спутника с помощью гироскопа. Труды ИФАН, АН СССР, 1960.

2. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическими летательными аппаратами, Изд. "Машиностроение", 1964.

3. Chatkoff M.L., Lynch L.G. *Attitude Control of a Space Vehicle by a Gyroscopic Reference Unit. Aero Space Engineering*, N5, 1960.

4. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Некоторые вопросы управления в межпланетном пространстве, сб. "Искусственные спутники Земли", АН СССР, вып. 5, 1960.

5. Токарь Е.Н. Возможные принципы ориентации космического аппарата относительно вращающейся системы координат, "Космические исследования", том IV, вып. 3, 1966.

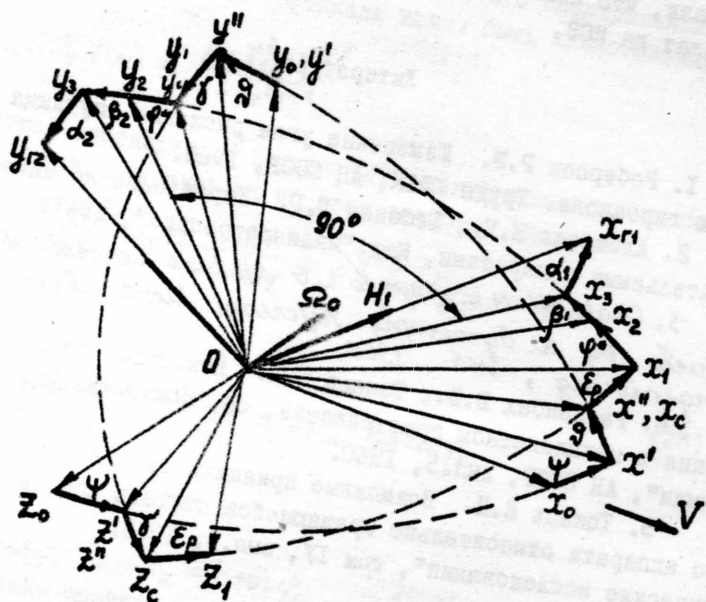


Рис. 1

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

ГАУШУС Э.В.
Институт автоматики и телемеханики
МОСКВА. СССР

Специфической особенностью движения в космосе является практически полное отсутствие демпфирующих сил, в силу чего свободное движение космического аппарата около центра масс носит в основном консервативный характер. На космический аппарат помимо управляющих моментов, создаваемых активной системой управления, действуют сравнительно малые возмущающие моменты, которые оказывают тем не менее существенное влияние на движение космического аппарата.

При действии возмущающих моментов космический аппарат совершает обычно сложные несимметричные автоколебания.

Эти обстоятельства наряду с жесткими требованиями минимизации расхода рабочего тела системы управления приводят к необходимости точного и строгого исследования стационарных движений космического аппарата, что зачастую исключает возможность применения приближенных методов исследования.

Наиболее эффективным методом исследования динамики космического аппарата является метод точечных отображений [1], [2]. Следует отметить, что необходимость учета основных неидеальностей системы управления даже в простейшем случае плоских колебаний приводит к автономным динамическим системам с многолистной фазовой плоскостью.

В таких системах могут иметь место сложные периодические движения, которым на фазовой плоскости соответствуют многократно пересекающиеся замкнутые траектории.

Теоретические вопросы исследования сложных периодических движений рассмотрены в [3].

Ниже рассматриваются плоские колебания космического аппарата около центра масс, т.е. предполагается, что уравнение, описывающее движение относительно одной из его осей инерции имеет вид:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \alpha(\omega) M_y - M_0, \quad (1)$$



где J - момент инерции,

M_u, M_z - управляющий и возмущающий моменты соответственно,

φ - угол отклонения от заданного направления,

$x(u)$ - управляющая функция.

Система управления формирует управляющий сигнал $u = m \frac{d\varphi}{dt} + n\varphi$.
Управляющая функция имеет вид релейной характеристики с зоной нечувствительности $2a$ и пространственным запаздыванием b .
Предполагается, что возмущающий момент является постоянным по величине и направлению. Заменой переменных система (I) может быть приведена к виду:

$$\frac{dz}{dt} = x(s)F - \frac{1}{2}P,$$

$$\frac{dy}{dt} = z, \quad \dot{\epsilon} = 2Sz + y,$$

(2)

где $\tau = \frac{2nb}{m(a+b)} t$, $y = \frac{n}{a+b} \varphi$, $\epsilon = \frac{1}{a+b} u$,

$$P = \frac{\tilde{M}m^2(a+b)}{Jnb^2}, \quad S = \frac{b}{a+b}, \quad F = \left[\frac{4nb^2J}{Mm^2(a+b)} \right]^{-1}.$$

Построение точечного преобразования.

Выберем в качестве отрезка без контакта край I-го листа фазовой плоскости: и построим преобразование этой прямой (L) в себя. В качестве координаты этой прямой будем использовать

$$x = z - \frac{1}{2}Ps.$$

Существует несколько типов фазовых траекторий, осуществляющих точечное преобразование T прямой L в себя (рис. № I) и следовательно, функция последования $f(x)$ этого преобразования имеет разрывы I-го рода.

Легко убедиться, что для нахождения периодических движений достаточно рассмотреть только две ветви этой функции, определяемые фазовыми траекториями A и B (рис. I).

Функции соответствия для траектории A имеют вид:

$$\theta(x) = -\sqrt{x^2 - Q} \quad (3)$$

$$u(x) = -\Omega + \sqrt{(x+\Omega)^2 + 2\Omega - Q},$$

а для траектории В:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \sqrt{x^2 - E}, \\ V(x) &= \Omega - \sqrt{(x - \Omega)^2 + 2\Omega + Q}, \\ \beta(x) &= -\sqrt{x^2 + E}, \\ u(x) &= -\Omega + \sqrt{(x + \Omega)^2 + 2\Omega - Q},\end{aligned}\quad (4)$$

где $Q = Ps$; $E = P(1-s)$; $\Omega = 2Fs$.

В дальнейшем все исследования будем проводить в параметрах Q , E и $H = \frac{1}{2}$.

Обозначим преобразования, определяемые траекториями А и В через T_1 и T_2 и функции последования этих преобразований через $\xi(x)$ и $\eta(x)$ соответственно:

$$\begin{aligned}\xi(x) &= u[\theta(x)] \\ \eta(x) &= u[\beta[V[\alpha(x)]]]\end{aligned}\quad (5)$$

Таким образом, функция последования $f(x)$ точечного преобразования имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \xi(x) & \text{при } x < \sqrt{E} \\ \eta(x) & \text{при } x > \sqrt{E} \end{cases}\quad (6)$$

Исследуем сначала динамику рассматриваемой системы (2) при очень больших управляющих моментах, положив для этого $H=0$. При $H=0$ функции соответствия $u(x)$, $V(x)$ существенно упрощаются и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}u(x) &= 1 + x \\ V(x) &= 1 - x.\end{aligned}$$

При этом функции последования $\xi(x)$ и $\eta(x)$ могут быть записаны в вид:

$$\begin{aligned}\xi(x) &= 1 - \sqrt{x^2 + Q} \\ \eta(x) &= 1 - \sqrt{(1 - \sqrt{x^2 - E})^2 + E}.\end{aligned}\quad (7)$$

Множество возможных периодических движений динамической системы (2) определяется совокупностью неподвижных точек (простых и кратных) точечного преобразования T .

Крайние неподвижные точки преобразования T находятся как простые неподвижные точки преобразований, представляющих собой всевозможные последовательности преобразований T_1 и T_2 :

$$T_k = T_1^{i_1} T_2^{i_2} T_1^{i_3} T_2^{i_4} \dots \quad (8)$$

Рассмотрим сначала преобразования вида:

$$P_n = T_\xi \cdot T_\eta^{n-1}. \quad (9)$$

Нахождение периодических движений.

Точечное преобразование T_η не имеет неподвижных точек, ибо при любом $E > 0$ $\eta(x) < x$.

Преобразование T_ξ имеет единственную простую неподвижную точку:

$$x_* = \frac{1}{2}(1-Q). \quad (10)$$

Эта точка устойчива при любых значениях параметров, ибо ее характеристический корень

$$\lambda = \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=x_*} = \frac{1+Q}{1-Q} \quad (11)$$

не превосходит по модулю единицы.

Бифуркация неподвижной точки x_* может иметь место только при переходе через границу разрыва преобразования T , т.е. при

$$\frac{1}{2}(1-Q) = \sqrt{E}.$$

Таким образом при $Q > 1-2\sqrt{E}$ точечное преобразование T имеет единственную устойчивую простую неподвижную точку, а при $Q < 1-2\sqrt{E}$ преобразование T не имеет простых неподвижных точек.

Предельный цикл, соответствующий неподвижной точке (10) изображен на рис.3.

Для нахождения неподвижных точек преобразований $P_n = T_\xi T_\eta^{n-1}$ будем исследовать функции последования этих преобразований:

$$f_n(x) = \eta_{n-1}[\xi(x)], \quad (12)$$

где $\eta_{n-1}(x)$ есть $(n-1)$ -я итерация функции $\eta(x)$.

Поскольку преобразование T_η не имеет неподвижных точек, достаточно рассмотреть преобразование P_n в интервале $(-\sqrt{E}, +\sqrt{E})$. Это позволит, несмотря на разрывность преобразования T использовать некоторые теоремы работы [3], сформулированные для непрерывных преобразований.

Рассмотрим основные свойства преобразований P_n и функций последования $f_n(x)$.

Функция $f_n(x)$ четна в силу четности функции $\xi(x)$.
 Функция последования $f_n(x)$ имеет единственный максимум
 в точке $x=0$.

Производная функции $f_n(x)$ имеет вид:

$$\frac{df_n(x)}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d\varphi_i}{dx} [f_i(x)] \quad (13)$$

и является монотонно-убывающей функцией $\left(\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} < 0\right)$.

Неподвижные точки преобразования Π_n находятся из уравнения:

$$f_n(x) - x = 0. \quad (14)$$

Из предыдущего следует, что это уравнение имеет не более двух действительных корней, т.е. преобразование Π_n имеет не более двух неподвижных точек.

Задача нахождения неподвижных точек преобразований Π_n тесно связана с исследованием зависимости этих преобразований от параметров Q и E .

Будем проводить это исследование изменяя Q при фиксированном E . Функция последования $f_n(x, E, Q)$ является монотонно-убывающей по параметру Q $\left(\frac{\partial f_n}{\partial Q} < 0\right)$.

Для исследования точечных преобразований $\Pi_n = T_\xi T_\varphi^{n-1}$ введем преобразования T_ξ^{-1} и T_φ^{-1} , обратные по отношению к преобразованиям T_ξ и T_φ , и функции, обратные функциям $\xi(x)$ и $\varphi(x)$. Будем обозначать их через $\bar{\xi}(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$. Заметим, что, вообще говоря, эти функции не однозначны, но в дальнейшем потребуются только их положительные ветви:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(x) &= \sqrt{(1-x)^2 - Q} \\ \bar{\varphi}(x) &= \sqrt{1 - \sqrt{(1-x)^2 + E}} \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что $n^{\text{я}}$ итерация функции $\bar{\varphi}(x)$ является обратной по отношению к $n^{\text{я}}$ итерации функции $\varphi(x)$. Обратная функция $\bar{\varphi}(x)$ и ее итерации могут быть выражены через прямые следующим образом:

$$\bar{\varphi}_n(x) = 1 - \varphi_n(1-x) \quad (16)$$

Функция последования преобразования $\Pi_n^{-1} = T_\varphi^{-(n-1)} T_\xi^{-1}$ имеет вид:

$$\bar{f}_n(x) = \bar{\xi}[\bar{\varphi}_{n-1}(x)]. \quad (17)$$

Каждое из преобразований Π_n определено только при достаточно малых значениях параметра Q .

При значениях $Q > (1 - \sqrt{E})^2$ для любого $x \in (-\sqrt{E}, +\sqrt{E})$ $\xi(x) \in (-\sqrt{E}, +\sqrt{E})$ и, следовательно преобразования Π_n и функции $f_n(x)$ не определены за исключением преобразования Π_1 с функцией последования $\xi(x)$.

При $Q = (1 - \sqrt{E})^2$ в точке $x=0$ рождается преобразование Π_n с функцией последования $f_n(x) = \eta[\xi(x)]$.

При дальнейшем уменьшении Q функции $\xi(x)$ и $f_n(x)$ увеличиваются, причем область определения последней расширяется. В момент, когда $f_n(0) = \sqrt{E}$ в точке $x=0$ рождается преобразование Π_2 с функцией последования $f_2(x) = \eta\{\eta[\xi(x)]\}$ и т.д.

Отсюда следует, что при изменении параметров для любого преобразования Π_n могут иметь место следующие бифуркационные моменты изменения его топологии:

- Момент A_n , соответствующий рождению преобразования Π_n .
 Момент B_n , соответствующий рождению неподвижных точек преобразования Π_n .
 Момент C_n , соответствующий исчезновению меньшей неподвижной точки при переходе через границу разрыва преобразования Π_n .
 Момент D_n , соответствующий расширению области определения преобразования Π_n до интервала $(-\sqrt{E}, +\sqrt{E})$. При этом исчезнет большая неподвижная точка преобразования Π_{n-1} .
 Момент F_n , соответствующий достижению функции последования $f_n(x)$ значения $\sqrt{E}$. При этом рождается преобразование Π_{n+1} .
 Момент H_n , соответствующий исчезновению большей неподвижной точки преобразования Π_n при переходе через границу разрыва $x = +\sqrt{E}$.

Этим моменты проиллюстрированы на рис.4.

Уравнения бифуркационных кривых, соответствующих перечисленным моментам, могут записаны в явном виде за исключением кривой B_n , которая может быть получена из системы:

$$\begin{cases} f_n(x) - x = 0 \\ \frac{df_n}{dx} - 1 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Бифуркационные кривые остальных моментов имеют вид:

$$\begin{aligned} A_n & \quad \eta_{n-2}[\xi(0)] = \sqrt{E}, \\ C_n & \quad \eta(\sqrt{E}) = \xi[\eta_{n-2}(\sqrt{E})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_n & \quad \varphi_{n-2} [\varepsilon(\sqrt{E})] = \sqrt{E}, \\
 F_n & \quad \varphi_{n-1} [\varepsilon(0)] = \sqrt{E}, \\
 H_n & \quad \varphi_{n-1} [\varepsilon(\sqrt{E})] = \sqrt{E}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Эти уравнения могут быть разрешены относительно параметра ε следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Q_{An} &= [1 - \varphi_{n-2}(\sqrt{E})]^2, \\
 Q_{Cn} &= [1 - \varphi_{n-2}(\sqrt{E})]^2 - (1 - \sqrt{1+E})^2, \\
 Q_{Dn} &= [1 - \varphi_{n-2}(\sqrt{E})]^2 - E, \\
 Q_{Fn} &= [1 - \varphi_{n-1}(\sqrt{E})]^2, \\
 Q_{Hn} &= [1 - \varphi_{n-1}(\sqrt{E})]^2 - E.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Из рассмотрения этих кривых следует, что бифуркационные моменты $A_n, \dots, H_n$ наступают в перечисленной выше последовательности.

Следует отметить важный факт совпадения моментов A_n и F_{n-1} , а также D_n и H_{n-1} .

Отсюда следует, что одновременно существует не более двух преобразований Π_n , т.е. одновременно с неподвижными точками кратности n могут существовать только точки либо $(n+1)^2$ либо $(n-1)^2$ кратностей.

Из вида бифуркационных кривых следует также, что для любого n кривые $A_n, \dots, H_n$ существуют в области $Q > 0$ только при достаточно малых значениях E , и при стремлении $E \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, при различных значениях параметров системы могут существовать периодические движения любой сложности (неподвижные точки любой кратности от 1 до ∞).

Исследование устойчивости сложных периодических движений.

Выше были рассмотрены бифуркации точечных преобразований Π_n , связанные с существованием сложных периодических движений. Перейдем теперь к исследованию бифуркаций устойчивости этих движений. Устойчивость неподвижной точки преобразования Π_n определяется значением производной функции последования $\hat{f}_n(x)$ в этой точке [3]. Будем называть

эту величину характеристическим корнем и обозначать через λ_n . Производная функции $f_n(x)$ имеет вид:

$$\frac{df_n}{dx} = \frac{d\tilde{f}}{dx}(x) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dh_i}{dx}[f_i(x)] \quad (21)$$

Заметим здесь, что уравнение неподвижной точки (14) не может быть разрешено относительно x .

Поэтому для исследования устойчивости исключим из выражения характеристического корня параметр Q и будем использовать вместо него координату неподвижной точки C .

После преобразований характеристический корень может быть представлен в следующем виде:

$$\lambda_n = -\frac{C}{1-C} \left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{h_i(C)} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(1-h_{i-1}(C))^2 - E}} - 1 \right) \right]^{-1} \quad (22)$$

Полученная формула удобна для построения бифуркационных границ B_n .

Характеристический корень λ_n является монотонной функцией параметра C и, следовательно, принимает экстремальные значения λ на границах области изменения C . В момент B_n рождается полуустойчивая неподвижная точка (при этом $\lambda_n = +1$), которая затем расщепляется на две, причем меньшая из них неустойчива (ее характеристический корень $\lambda_n > 1$).

Характеристический корень большей неподвижной точки уменьшается при уменьшении параметра Q .

Интервал изменения Q ограничен значением $Q=0$, следовательно, координата C ограничена значением $C=C_0$, соответствующим значению $Q=0$.

Определим значение λ_n в точке $C=C_0$.

При $Q=0$ уравнение неподвижной точки (14) может быть разрешено относительно C :

$$\begin{aligned} \text{для } n=2k+1: C_0 &= h_k(1/2) & k=1,2,3\dots \\ \text{для } n=2m: C_0 &= h_{m-1}(1-\sqrt{1/4+E}) & m=1,2,3\dots \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) после преобразований можно получить:

$$\lambda_n(C_0) = -1 \quad (24)$$

Это означает, что при изменении параметров Q и E неподвижные точки точечных преобразований $P_n = T_E T_n^{n-1}$

рождаются и исчезают, не изменяя своей устойчивости. При этом меньшая точка всегда неустойчива, а большая — всегда устойчива.

О существовании других типов периодических движений.

Выше были исследованы сложные периодические движения, соответствующие неподвижным точкам преобразований $P_n = T_1 T_2^{n-1}$. Полученные результаты позволяют перейти к вопросу о существовании других типов периодических движений.

Разобьем все возможные последовательности (8) точечных преобразований T_1 и T_2 на следующие классы:

I — преобразования $P_n = T_1 T_2^{n-1}$;

II — преобразования, содержащие в качестве сомножителя T_1^k , где $k > 1$;

III — преобразования, содержащие группу сомножителей: $T_1 T_2^k T_1 T_2^m, (n, m)$,

IV — преобразования $(T_1 T_2^{n-1})^k$, кратные преобразованиям I-го класса.

Преобразования I-го класса были рассмотрены выше.

Преобразования II-го класса не существуют в силу того, что производная функции последования $f_1(x)$ по модулю не превосходит единицы.

Преобразования III-го класса для $|n-m| > 1$ не существуют в силу совпадения бифуркаций A_n и B_{n-1} , а также D_n и H_{n-1} . Рассмотрим преобразование $T_1 T_2^{n-1}$ и $T_1 T_2^n$. Если параметры Q и E таковы, что преобразования $T_1 T_2^{n-1}$ и $T_1 T_2^n$ существуют одновременно, то первое из них определено в интервале $(-\nu, +\nu)$, а второе — в интервале $(-\sqrt{E}, \nu)$ и $(+\nu, +\sqrt{E})$, где $\nu = \xi[\bar{\nu}_n, (\sqrt{E})]$.

Для существования преобразования $T_1 T_2^{n-1} T_1 T_2^n$ необходимо существование в интервале $(+\nu, +\sqrt{E})$ таких точек, которые преобразованием $T_1 T_2^{n-1}$ переводятся в интервал $(-\nu, +\nu)$. Заметим, что для любых Q и E в рассматриваемых областях выполняется неравенство:

$$f_n[\xi_n(\sqrt{E})] > \sqrt{E}, \text{ причем равенство имеет место}$$

только на бифуркационной границе H_n .

Отсюда в силу монотонности функции $f_n(x)$ в интервале

$(\forall, \forall E)$ следует, что для любого $x \in (V, \forall E)$ $f_n(x) \in (V, \forall E)$, следовательно, преобразования вида $T_E T_T T_E^{-1} T_T^{-1}$ не существуют.

Рассмотрим существование двукратных неподвижных точек преобразований Π_n . Вторая итерация функции последования $f_n(x)$ является четной функцией, имеющей не более трех экстремумов ($x=0$ и корни функции $f_n(x)$).

Выше было показано, что характеристический корень λ_n не превосходит единицы по модулю. Отсюда с учетом неравенства $f_n[f_n(\forall E)] \geq \forall E$ следует, что преобразование Π_n было вообще не имеет двукратных точек, либо имеет четное число двукратных циклов. С другой стороны функция $f_n[f_n(x)]$ имеет не более одной точки перегиба, а для существования двукратных циклов их должно быть не менее трех.

Следовательно, преобразование Π_n не имеет двукратных циклов, откуда на основании теоремы 4 [3] приходим к выводу, что она не имеет и циклов более высоких кратностей.

Таким образом, множество возможных периодических движений динамической системы (2) исчерпывается найденными неподвижными точками точечных преобразований $\Pi_n = T_E T_T^{-n-1}$.

В зависимости от значений параметров E и Q динамическая система может иметь либо один, либо два устойчивых предельных цикла (соседних по величине кратности). Кратность неподвижных точек может в зависимости от параметров принимать любые значения от 1 до ∞ , т.е. в системе (2) могут иметь место сколь угодно сложные периодические движения. Области существования и устойчивости сложных периодических движений представлены на бифуркационной диаграмме рис. 6.

Следует отметить, что значение $Q=0$ является бифуркационным. Действительно при $Q=0$ функция $\xi(x) = 1-x$ и функция последования преобразования Π_n имеет вид:

$$f_n(x) = r_{n-1}(1-x)$$

Вторая итерация этой функции

$$f_n[f_n(x)] = r_{n-1}[1 - r_{n-1}(1-x)],$$

используя (16), может быть записана так

$$f_n[f_n(x)] = r_{n-1}[r_{n-1}(x)] = x$$

Следовательно, точечное преобразование $\Pi_n^2 = [T_E T_T^{-n-1}]^2$

является при $Q = 0$ тождественным.

Это означает, что при $Q = 0$ из устойчивой n -кратной неподвижной точки преобразования T рождается континуальное множество неподвижных точек кратности $2n$. Подробно этот случай рассмотрен в (4).

Об исследовании зависимости от H .

Выше была рассмотрена динамическая система (2) при $H = 0$. При значениях H , отличных от нуля задача существенно усложняется. Поэтому не проводя полного и строгого исследования, приведем только основные качественные результаты.

Легко заметить, что при увеличении параметра H функция последования $\varphi(x)$ увеличивается и при достаточно больших значениях H имеет место неравенство $\varphi(\sqrt{E}) > 0$. Отсюда следует, что в этом случае схема бифуркаций $A_n \dots H_n$ уже не имеет места, ибо в момент рождения преобразования Π_n в точке $x = 0$ значение функции последования $f_n(x) = \varphi(\sqrt{E}) > 0$. Отсюда следует, что преобразование Π_n имеет не более одной неподвижной точки, причем эта точка в момент ее рождения на границе области определения преобразования Π_n неустойчива, ибо ее характеристический корень в момент рождения равен $-\infty$.

При дальнейшем изменении параметров характеристический корень увеличивается и достигает значения $\lambda_n = -1$. При этом в момент бифуркации устойчивости неподвижной точки преобразования Π_n в этой точке рождается неустойчивый двукратный цикл преобразования Π_n , т.е. неподвижные точки преобразования $\Pi_n^2 = (T_n \circ T_n)^2$, затем этот неустойчивый двукратный цикл увеличивается и исчезает при переходе через границу разрыва $x = \sqrt{E}$. При дальнейшем изменении параметров устойчивая неподвижная точка преобразования Π_n также увеличивается и исчезает при переходе через границу разрыва преобразования $T(x = \sqrt{E})$. Таким образом протекает процесс рождения и исчезновения неподвижных точек преобразований Π_n при достаточно больших значениях H .

Следует отметить также, что в отличие от случая $H=0$ преобразование T_p имеет при достаточно больших значениях H неподвижные точки. При некоторых значениях параметров функция $p(x)$ касается биссектрисы координатного угла. При этом имеет место весьма необычная бифуркация: рождение простого периодического движения (неподвижных точек преобразования T_p) из бесконечно сложного (бесконечно кратные неподвижные точки преобразования T). Эта бифуркация проиллюстрирована на рис.7.

Таким образом, при увеличении параметра H происходит рождение неподвижных точек преобразований P_n более высоких кратностей по приведенной выше схеме. По мере приближения H к некоторому значению H_* кратность неподвижных точек преобразования P_n стремится к бесконечности и при $H=H_*$ бесконечно кратный цикл исчезает, и рождается простая полуустойчивая неподвижная точка преобразования T_p , которая затем расщепляется на две: устойчивую и неустойчивую. При дальнейшем увеличении H неустойчивая точка исчезает при переходе через границу разрыва $\alpha = \sqrt{E}$.

При достаточно больших, но не превышающих $\frac{2}{\alpha}$ значениях H , преобразование T имеет только простые неподвижные точки, соответствующие либо преобразованию T_* , либо преобразованию T_p (рис.8). При значениях $H > \frac{2}{\alpha}$ система становится абсолютно неустойчивой, ибо при этом возмущающее воздействие превышает управляющее.

Цитированная литература.

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Гостехиздат 1954 г.
2. Неймарк Ю.И. Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. Известия ВУЗов. Радиофизика т. I № 1,2,5-6. 1958 г.
3. Гаушус Э.В. К теории точечного преобразования. Автоматика и телемеханика № 12 1966 г.
4. Гаушус Э.В. Исследование одного типа автоколебаний космического аппарата. Искусственные спутники Земли вып.16 1963 г.

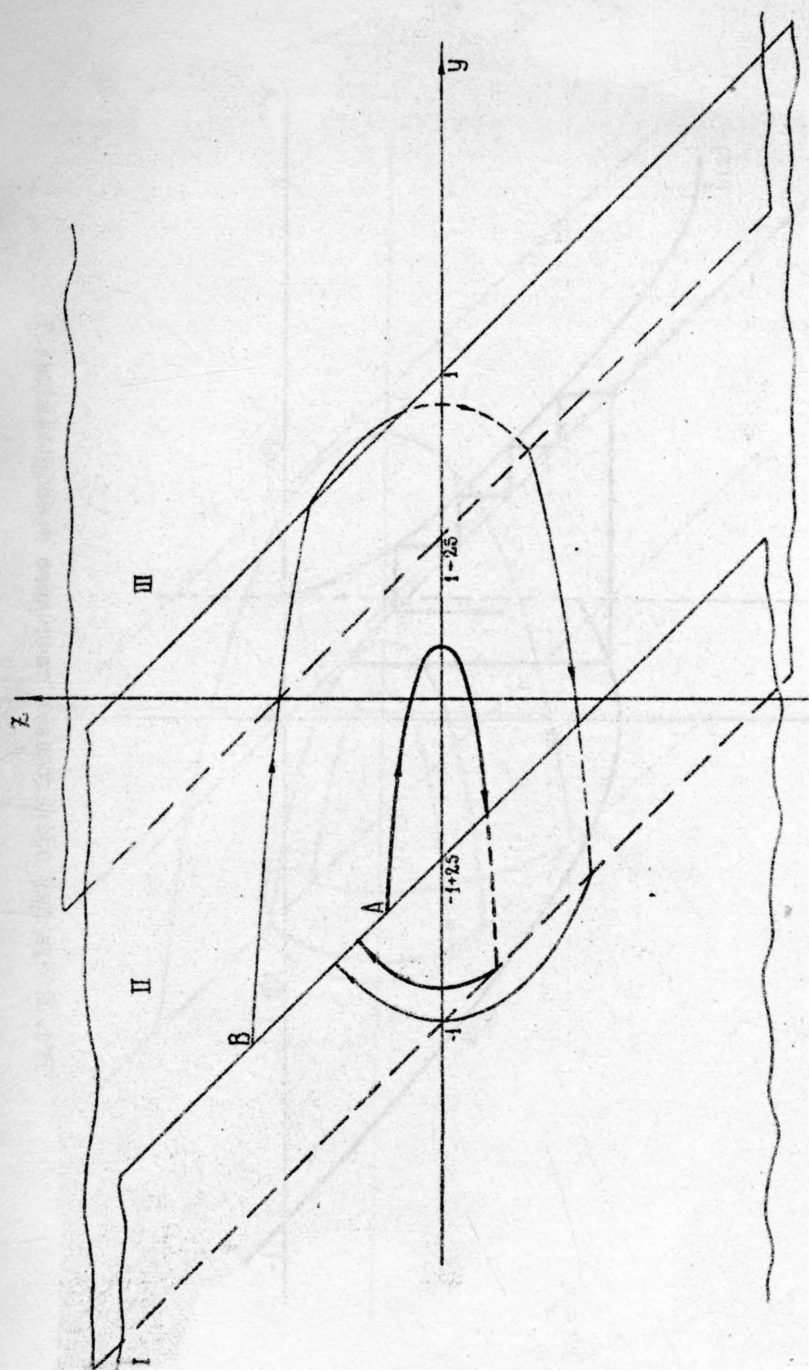


Рис. I фазовая плоскость динамической системы.

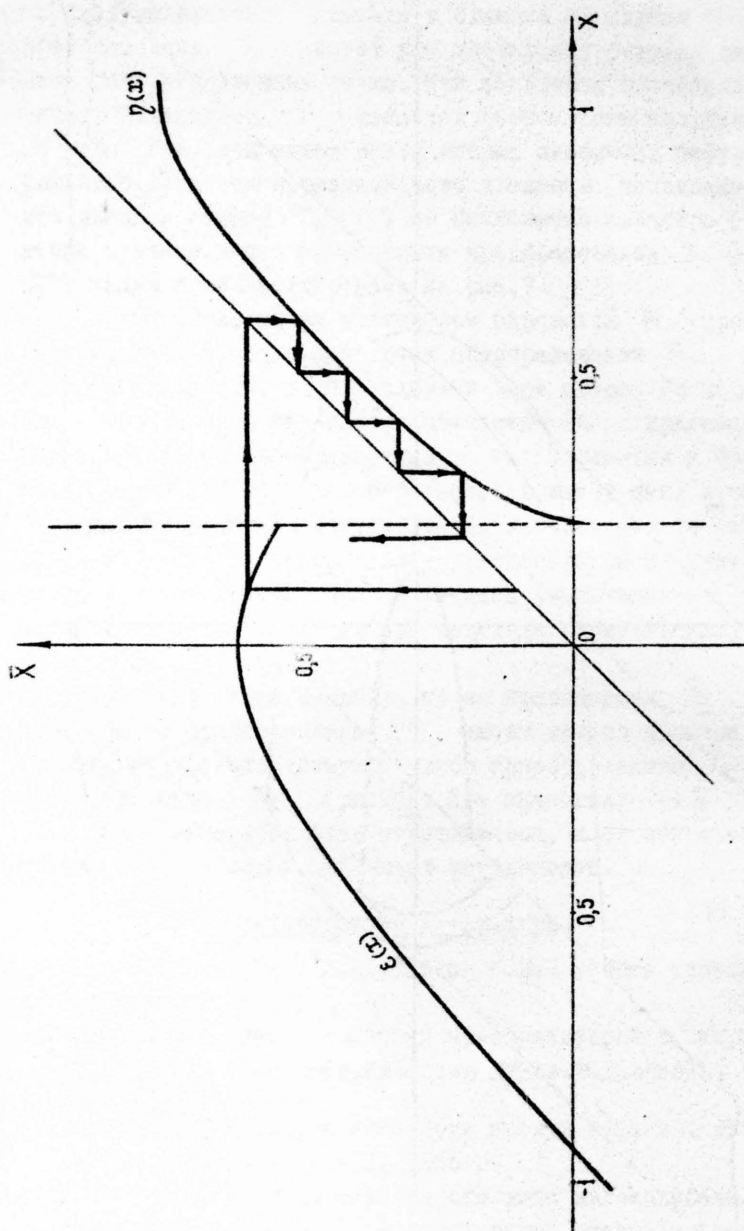


Рис. 2 функция последования точечного преобразования Т.

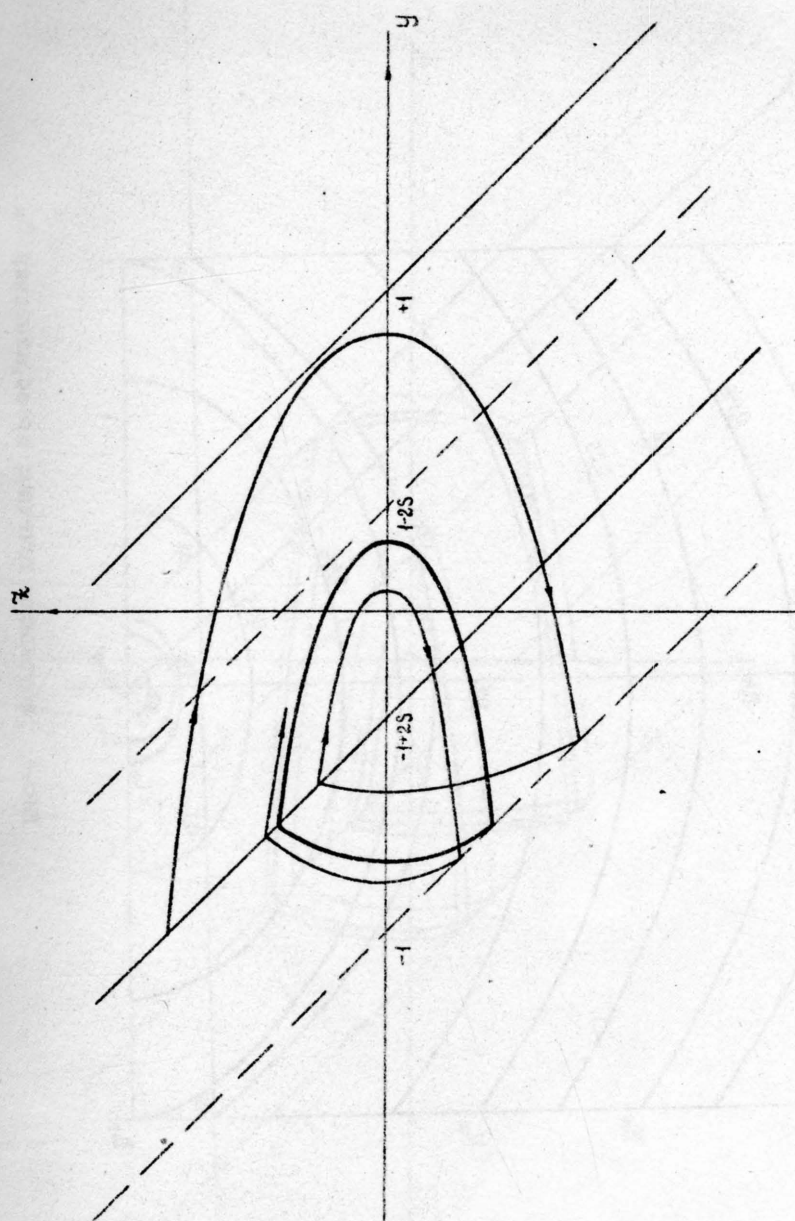


Рис. 3. Предельный цикл, соответствующий неподвижной точке преобразования T_2

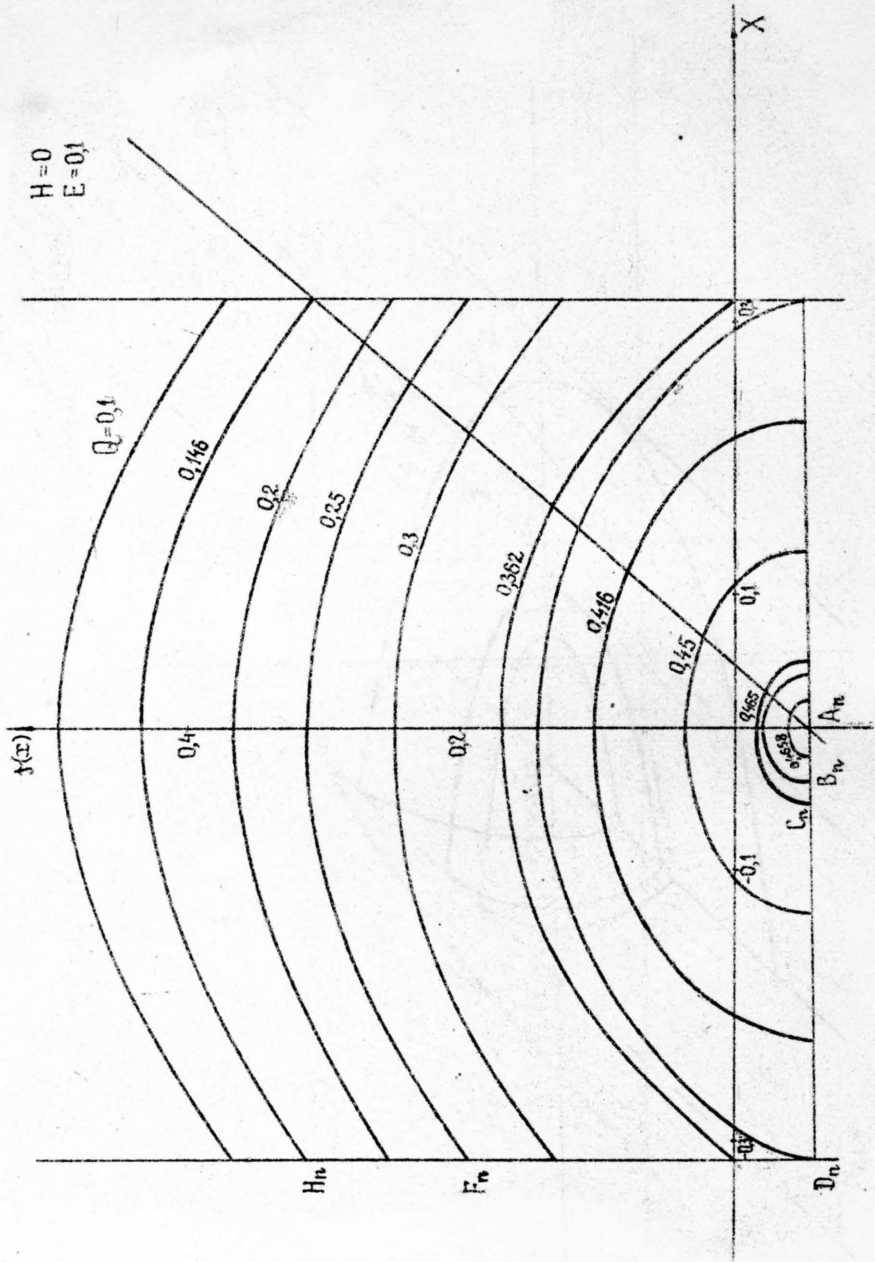


Рис. 4 Бифуркации точечных преобразований Γ_n .

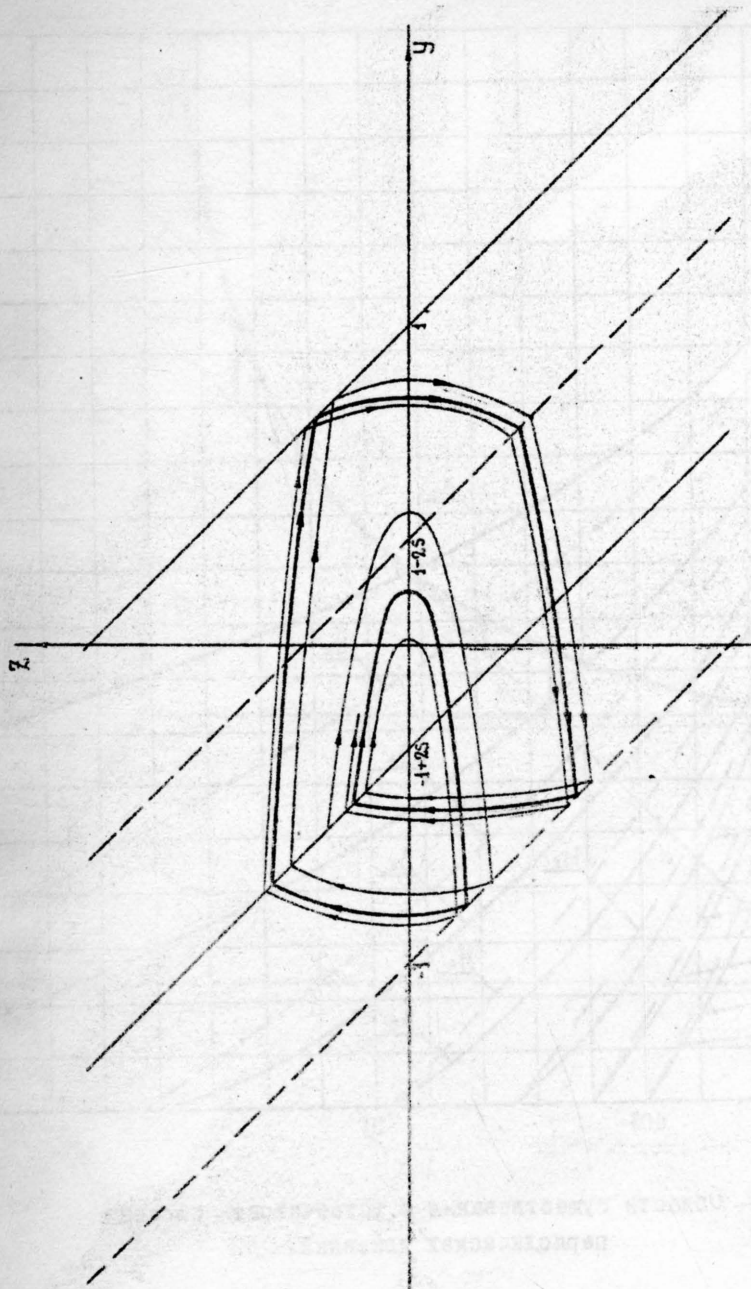


Рис. 5 Пределный цикл, соответствующий неподвижной точке преобразования Π_2

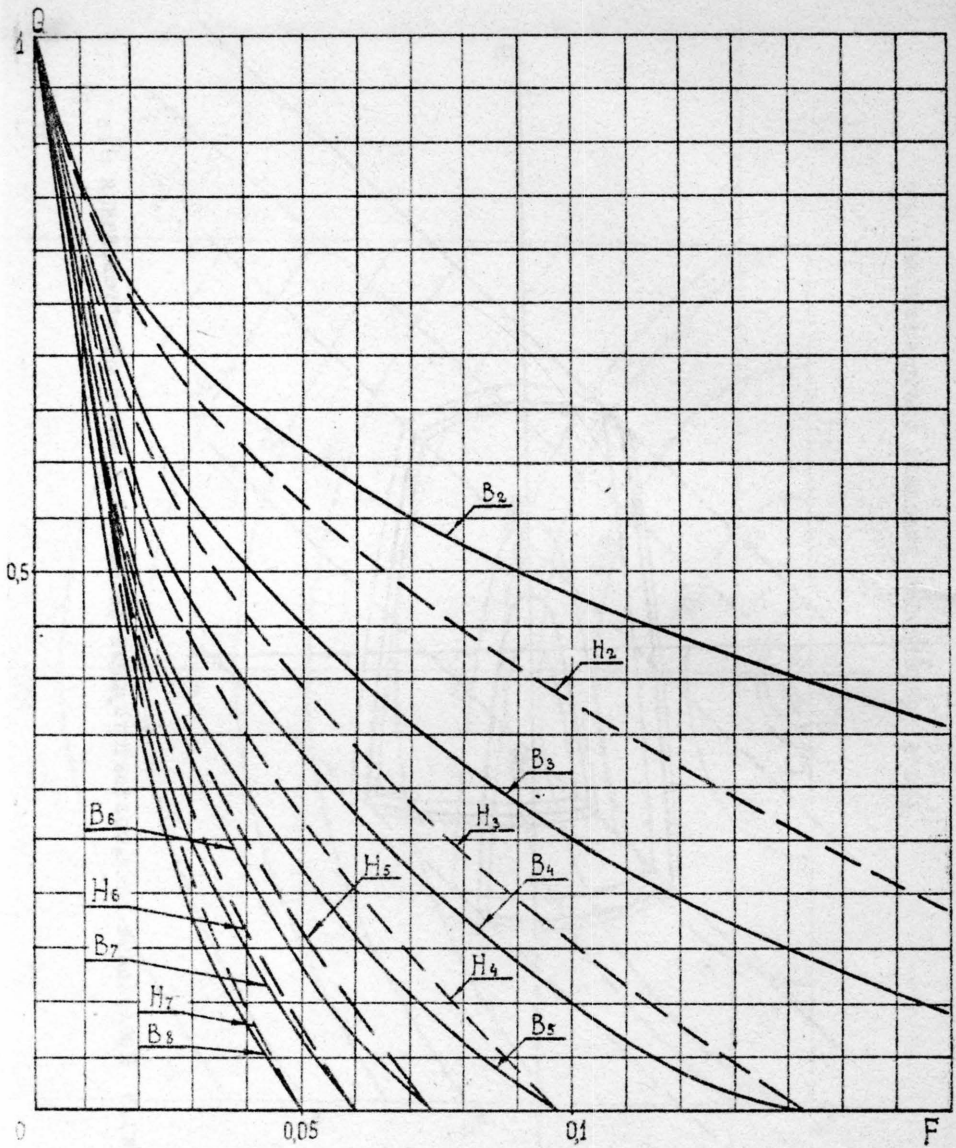


Рис.6 Области существования и устойчивости сложных периодических движений.

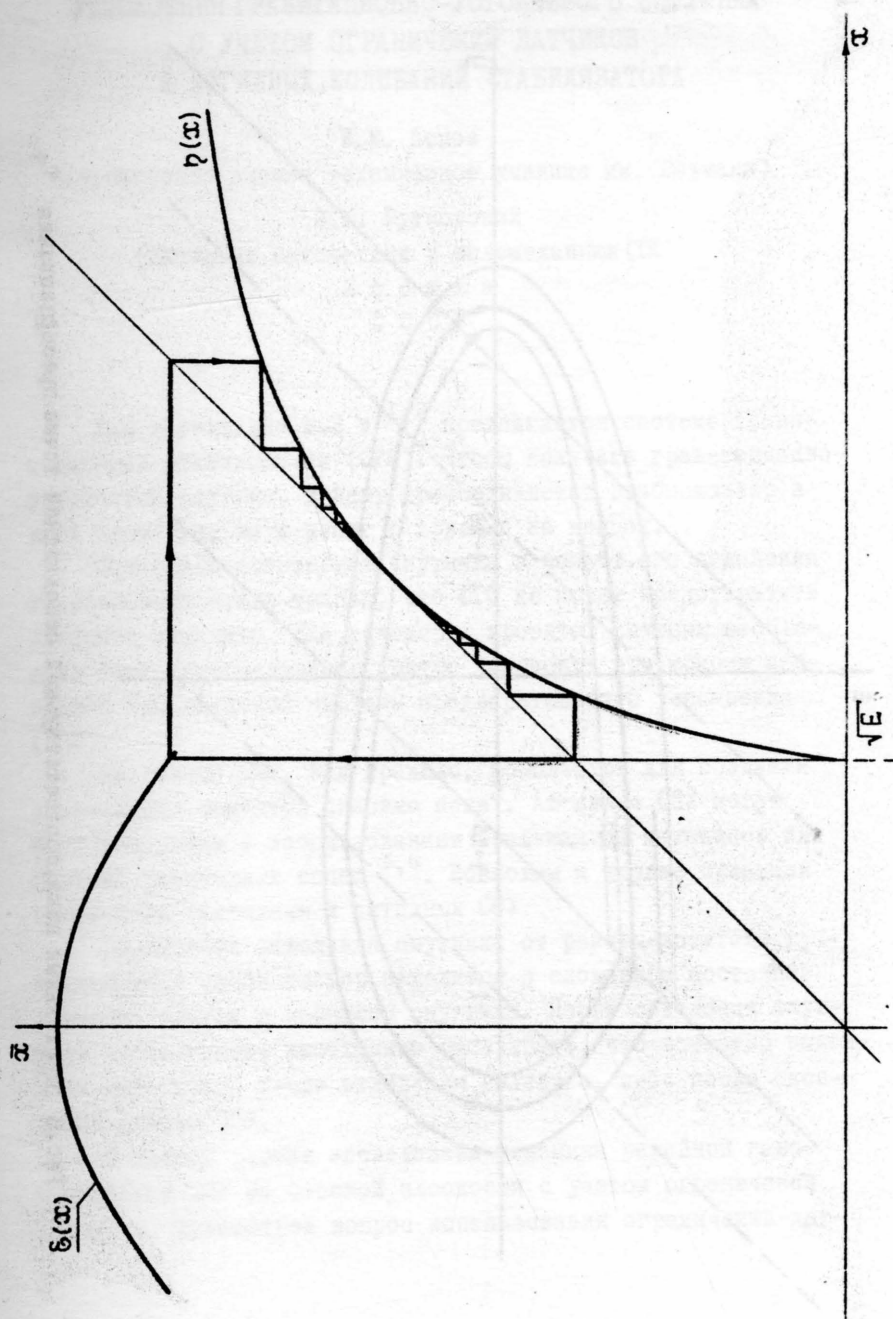


Рис.7 Разделение простого периодического движения из бесконечного сложного.

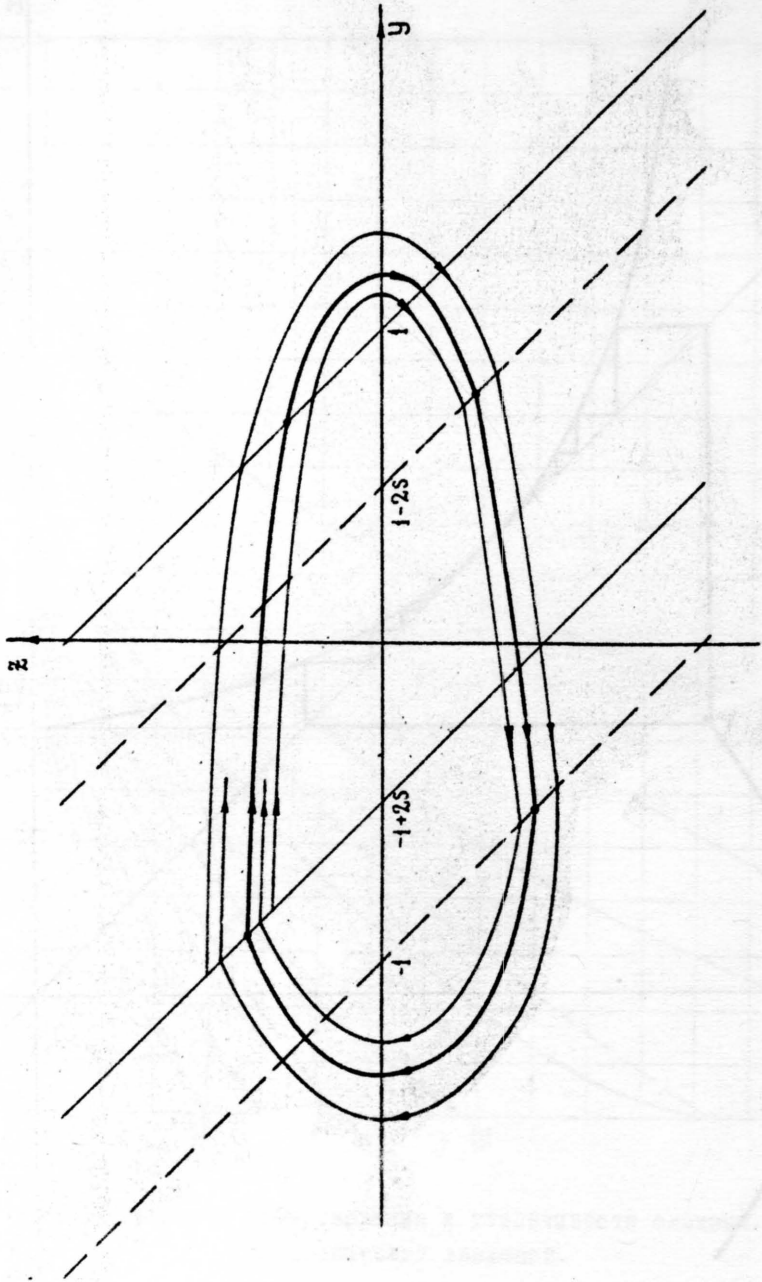


Рис.8 Пределный цикл, соответствующий неподвижной точке преобразования T_2

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО УСПОКОЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННО-УСТОЙЧИВОГО СПУТНИКА С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ДАТЧИКОВ И ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТАБИЛИЗАТОРА

В.И. Попов

(Московское высшее техническое училище им. Баумана)

В.Ю. Рутковский

(Институт автоматики и телемеханики (ТН

М о с к в а

С С С Р

Для ориентации ИСЗ в ^{1,2} предлагается система гравитационной стабилизации (СГС). Чтобы получить гравитационно-устойчивый спутник, к нему присоединяется стабилизатор в виде одной или двух штанг с грузами на концах.

Начальные возмущения спутника в момент его отделения от ракеты-носителя таковы, что СГС не может предотвратить вращение спутника. Для некоторых проектов спутник необходимо после его отделения быстро успокоить при помощи пассивной или активной системы предварительного успокоения (СПУ).

Пассивные СПУ, как правило, используют для создания управляющих моментов силовые поля². Активные СПУ могут быть построены с использованием вращающихся маховиков или газовых реактивных сопел^{3,4}. Возможны и другие принципы построения пассивных и активных СПУ.

До момента отделения спутника от ракеты-носителя гравитационный стабилизатор находится в сложенном состоянии и жестко связан с корпусом спутника. После отделения спутника стабилизатор необходимо раскрывать, что возможно выполнить либо сразу после отделения спутника, либо после окончания работы СПУ.

В данной работе исследована динамика релейной газо-реактивной СПУ на фазовой плоскости с учетом ограничений датчиков. Рассмотрен вопрос использования ограничений дат-

чиков при формировании нелинейных законов управления. Для уменьшения амплитуды автоколебаний в СПУ, имеющей релейную характеристику с гистерезисной петлей, предложено подключать внутреннюю обратную связь, компенсирующую запаздывание.

В работе изучаются вращательные движения спутника с раскрытыми штангами. Выведены уравнения плоских изгибных колебаний системы спутник-стабилизатор, исследованы влияние естественного и искусственного демпфирования в штангах и изгибные колебания системы при работающей СПУ.

1. Уравнения движения СПУ

Для гашения начальных возмущений, появившихся в момент отделения спутника от ракеты-носителя, используем активную релейную СПУ, управляющие моменты которой создаются газовыми реактивными соплами. В качестве исходного положения, относительно которого должен стабилизироваться спутник, выбираем орбитальную систему координат $Ox_0y_0z_0$. Введём в рассмотрение связанную систему координат $Oxyz$, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника. Оси системы $Oxyz$ в заданном положении равновесия ИСЗ совпадают с осями орбитальной системы координат $Ox_0y_0z_0$. Обе системы имеют начало в центре масс спутника O . Известно, что положение осей $Oxyz$ относительно $Ox_0y_0z_0$ определяется заданием трех независимых углов ϑ - угла тангажа, ψ - угла рыскания и γ - угла крена.

При рассмотрении движения спутника вокруг центра масс во время работающей СПУ всеми возмущающими моментами будем пренебрегать ввиду их малости по сравнению с управляющими моментами. Уравнения движения спутника относительно центра масс в связанной системе координат имеют обыкновенную форму динамических уравнений Эйлера.

В общем случае управляющий момент, действующий на спутник, зависит от углов ϑ , ψ , γ , от проекций абсолютной угловой скорости вращения на связанные оси ω_x , ω_y , ω_z и времени t , т.е.

$$M = M(\gamma, \psi, \vartheta, \omega_x, \omega_y, \omega_z, t)$$

Таким образом, три динамических уравнения Эйлера связывают шесть независимых функций: $\gamma, \psi, \vartheta, \omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Для того, чтобы сделать задачу определенной, нужно получить ещё три уравнения с помощью кинематических уравнений Эйлера, устанавливающих связь между $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, углами γ, ψ, ϑ и орбитальной скоростью ω_0 .

Так как нами рассматривается коротковременно работающая СПУ с достаточно большими управляющими моментами при малых угловых скоростях $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и угловых отклонениях спутника, то динамические и кинематические уравнения Эйлера упрощаются. Линеаризация этих уравнений приводит, как известно, к разделению динамических уравнений Эйлера на три независимых уравнения второго порядка.

$$J \ddot{x} = -M, \quad (I)$$

где J — момент инерции относительно интересующей нас оси,

x — угловое отклонение спутника,

M — управляющий момент.

В данной работе излагаются результаты исследования динамики СПУ на основе уравнения (I).

Рассмотрим уравнения движения СПУ. Объединяем релейные характеристики выходного каскада безынерционного усилителя и электропневмоклапана (ЭПК) в одну нелинейную функцию $\Phi_r(\sigma)$, содержащую суммарное запаздывание регулятора τ . Эквивалентная релейная характеристика $\Phi(\sigma)$ может иметь зону нечувствительности или гистерезисную петлю. Аргументом функции $\Phi(\sigma)$ служит выходное напряжение с линейного каскада усилителя. Усилитель считаем идеальным.

В характеристиках датчиков учтем ограничения.

Если на усилитель поступает сигнал обратной связи $\kappa_3 \operatorname{sgn} \Phi(\sigma)$, компенсирующий запаздывание регулятора, то уравнение для входной координаты релейной характеристики можно записать в следующем виде

$$\sigma = K_1 g_1(x) + K_2 g_2(\dot{x}) + K_3 \operatorname{sgn} \Phi(\sigma),$$

где K_1, K_2, K_3 - постоянные коэффициенты, $g_1(x)$ - сигнал с датчика угла, $g_2(\dot{x})$ - сигнал с датчика угловой скорости.

Уравнения для $g_1(x)$ и $g_2(\dot{x})$ имеют вид

$$g_1(x) = \begin{cases} x_{огр} & \text{при } x > x_{огр}, \\ x & \text{при } |x| \leq x_{огр}, \\ -x_{огр} & \text{при } x < -x_{огр}, \end{cases}$$

$$g_2(\dot{x}) = \begin{cases} \dot{x}_{огр} & \text{при } \dot{x} > \dot{x}_{огр}, \\ \dot{x} & \text{при } |\dot{x}| \leq \dot{x}_{огр}, \\ -\dot{x}_{огр} & \text{при } \dot{x} < -\dot{x}_{огр}, \end{cases}$$

где $x_{огр}, \dot{x}_{огр}$ - величина ограничения соответственно по координате и её скорости.

Регулирующим воздействием в системе является управляющий момент. Если полагать, что при включении и отключении ЭПК тяга сопла нарастает и спадает мгновенно и не учитывать транспортное запаздывание, то уравнение для управляющего момента можно записать в виде

$$M = M_{max} \Phi(\sigma),$$

где M_{max} - максимальный момент, создаваемый соплом.

Движение одного канала СПУ в упрощенном виде с учетом запаздывания может быть описано системой уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\delta, \\ \delta &= \Phi_\tau(\sigma) = \Phi[\sigma(t-\tau)], \\ \sigma &= K_1 g_1(x) + K_2 g_2(\dot{x}) + K_3 \operatorname{sign} \Phi(\sigma), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} m & \text{при } \sigma > \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |\sigma| \leq \varepsilon, \\ -m & \text{при } \sigma < -\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь введены обозначения: δ - величина регулирующего воздействия; σ - управляющая функция; m - постоянные по величине значения, принимаемые релейной характеристикой ($-m = M_{max}/\gamma$), ε - величина зоны нечувстви-

тельности регулятора, τ - запаздывание. Остальные обозначения приведены раньше. Структурная схема СПУ, соответствующая уравнениям движения системы (2), приведена на рис. 1.

2. Использование ограничений датчиков для формирования нелинейных законов управления

Если в СПУ применяются датчики угла и угловой скорости, имеющие ограничения, то последние можно использовать для формирования нелинейного закона управления с целью создания системы, близкой к оптимальной с точки зрения минимума расхода рабочего тела или минимума импульса тяги. Заметим, что для системы (2) минимальный импульс тяги, необходимый для гашения начальной угловой скорости $\dot{x}_0$,

$$(Pt)_{\min} = \frac{\gamma}{\ell} \dot{x}_0, \quad (3)$$

где $P = \text{const}$ - тяга сопел, ℓ - плечо ($P\ell = M_{\max}$)

Для решения указанной задачи изучим фазовую плоскость для системы (2) при $K_3 = \tau = 0$. Вид фазовой плоскости существенно зависит от соотношения параметров закона управления.

$$\sigma = K_1 g_1(x) + K_2 g_2(\dot{x}) \quad (4)$$

и величины зоны нечувствительности релейной функции $\Phi(\sigma)$. Необходимо рассматривать следующие сочетания параметров:

- а/. $K_1 x_{0\text{нр}} - K_2 \dot{x}_{0\text{нр}} < -\varepsilon$,
- б/. $K_1 x_{0\text{нр}} - K_2 \dot{x}_{0\text{нр}} = -\varepsilon$,
- в/. $\varepsilon > K_1 x_{0\text{нр}} - K_2 \dot{x}_{0\text{нр}} > -\varepsilon$,
- г/. $K_1 x_{0\text{нр}} - K_2 \dot{x}_{0\text{нр}} = \varepsilon$,
- д/. $K_1 x_{0\text{нр}} - K_2 \dot{x}_{0\text{нр}} > \varepsilon$.

Вид фазовой плоскости, которая является трехлистной (на листе I - $\Phi(\sigma) = 1$, на листе II - $\Phi(\sigma) = 0$ и на листе III - $\Phi(\sigma) = -1$), приведен на рис. 2а-д соответственно. Заметим, что соотношения параметров "б" и "г" являются по существу бифуркационными, так как при бес-

конечно малом изменении любого из параметров вид линий переключения качественно меняется. Кроме того, в этих случаях мы встречаемся с новым интересным фактом, когда "линии" переключения на некоторых участках перестают быть действительно линиями и занимают определенные части фазовой плоскости (заштрихованные участки на рис. 2б,г).

В соответствии с (2) линии переключения целиком лежат на листе II и, следовательно, заштрихованные участки также относятся к листу II.

Из рассмотрения фазовой плоскости следует, что СПУ будет наиболее близкой к оптимальной в случае соотношения параметров "а", "б" и "в". Действительно, импульс тяги при этом

$$Pt = \frac{\gamma}{\ell} (\dot{x}_0 + 2 \frac{\kappa_1 x_{\text{оп}} - \varepsilon}{\kappa_2}) \quad (5)$$

и при достаточно большом κ_2 он практически совпадает с минимальным его значением.

Таким образом, используя лишь естественные ограничения датчиков и не применяя никаких логических элементов, можно построить систему, близкую к оптимальной по расходу рабочего тела.

Следует заметить, что при этом мы имеем большое время регулирования, но, как правило, на время регулирования жестких ограничений для СПУ не задается.

Интересно сравнить по импульсу тяги предложенную систему с системой, оптимальной по быстрдействию. Легко подсчитать, что для последней при $\varepsilon = 0$

$$Pt = \frac{\gamma}{\ell} (1 + \sqrt{2}) \dot{x}_0, \quad (6)$$

т.е. импульс тяги более чем в два раза превышает минимальный.

Рассмотрим фазовую плоскость для случая "в" при $\tau \neq 0$. Ее вид показан на рис. 3. За счет запаздывания имеются участки наложения листов друг на друга. Уравнения линий переключения следующие:

$$(L_1) \quad \dot{x} = - \frac{\kappa_1 x_{\text{оп}} - \varepsilon}{\kappa_2} - m\tau,$$

$$(L_2) (\kappa_2 - \kappa_1 \tau) \dot{x} + \kappa_1 x = \varepsilon - \kappa_2 m \tau + \kappa_1 m \frac{\tau^2}{2},$$

$$(L_3) (\kappa_2 - \kappa_1 \tau) \dot{x} + \kappa_1 x = \varepsilon,$$

$$(L_4) x = -x_{\text{огр}} + \dot{x} \tau \quad (7)$$

Линии (L_i') симметричны с (L_i) относительно начала координат, $i = 1, 2, 3, 4$. Известно, что при наличии запаздывания в системе (2) будут автоколебания при любом соотношении параметров. Без учета автоколебаний импульс тяги составляет:

$$P\tau = \frac{\gamma}{\ell} (\dot{x}_0 + 2 \frac{\kappa_1 x_{\text{огр}} - \varepsilon}{\kappa_2}) + 2P\tau \quad (8)$$

В заключение заметим, что поскольку обычно ε мало, то практически следует выбирать соотношение параметров "а", так как в случае "в" должны быть наложены жесткие ограничения на стабильность значений κ_1 , κ_2 , $x_{\text{огр}}$, $\dot{x}_{\text{огр}}$.

С учетом запаздывания, очевидно условие "а" должно быть дополнено условием

$$2\varepsilon > m\tau \quad (9)$$

так как при невыполнении (9) изображающая точка "проскакивает" зону нечувствительности и импульс тяги резко возрастает.

В установившемся движении система находится в автоколебательном режиме, при этом x и $\dot{x}$ не достигают своих ограничений $(|x| < x_{\text{огр}}$ и $|\dot{x}| < \dot{x}_{\text{огр}})$. Автоколебания в системе (2) при отсутствии ограничений датчиков подробно исследованы. При изучении автоколебаний можно воспользоваться результатами, полученными в работе ⁵.

В заключение остановимся на работе СПУ с релейной характеристикой, имеющей гистерезисную петлю. Доказано ⁶, что в этом случае амплитуду автоколебаний можно уменьшить за счет включения обратной связи $(\kappa_3 \neq 0)$, компенсирующей запаздывание. На фазовой плоскости уменьшение амплитуды автоколебаний объясняется сближением линий переключения.

При почти полной компенсации запаздывания регулятор

приближается к идеальному, но появляются все недостатки такого регулятора. Регулирующий орган переключается в этом случае с очень большой частотой. Частота эта может стать недопустимой для данного регулятора или регулируемого объекта. На высоких частотах может произойти срыв автоколебаний, а это равносильно тому, что система будет работать без регулятора. Поэтому, если теоретически запаздывание можно полностью компенсировать, то практически это делать нецелесообразно. Осуществлять компенсацию надо в допустимых пределах.

3. Уравнения упругих колебаний системы спутник-стабилизатор

При выводе приближенных уравнений вращательного движения спутника за счет изгибных колебаний стабилизатора пренебрегаем распределенной массой штанг и перемещениями грузов вследствие продольных и крутильных колебаний, учитывая перемещения грузов, связанные только с поперечными изгибными колебаниями. Всеми возмущающими моментами пренебрегаем ввиду их малости по сравнению с моментами от колеблющихся грузов и с управляющими моментами от СПУ. Не учитываем также возмущающие силы Кориолиса, возникающие в результате взаимодействия переносного и относительного движения грузов⁷.

Для составления указанных выше дифференциальных уравнений рассмотрим кинематическую схему движения только i -ой штанги с грузом (рис.4). Считаем, что центр масс системы расположен в точке "О", а штанга и груз жестко закреплены соответственно в точках A_i и B_i .

Во время раскрытия стабилизатора из-за действия сил Кориолиса или механизма раскрытия грузам сообщаются начальные криволинейности. В этом случае спутник будет колебаться около центра масс под действием моментов, сообщаемых ему со стороны грузов, колеблющихся под действием сил упругости штанг.

Если груз на i -ой штанге отклонится на угол ψ_i , то тело спутника повернется на угол φ .

Итак, если система спутник-стабилизатор представляет собой спутник и " n " штанг с грузами на концах, то её мож-

но рассматривать как систему с " $n+1$ " степенями свободы. Соответственно обобщенными координатами будут $\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n$.

В рассматриваемом случае уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -M_{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} &= -M_{\psi_i}, \quad i=1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (I0)$$

где $\mathcal{L}$ - функция Лагранжа ($\mathcal{L} = T - V$), T и V соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы, M_{φ} - управляющий момент СПУ, M_{ψ_i} - момент от сил внутреннего трения в материале i -ой штанги.

Введем следующие обозначения (рис.4): $OA_i = \alpha$, $A_i B_i = \ell$, $OB_i = g_i$, v_i - абсолютная скорость движения i -го груза, $m_i = m$ - масса i -го груза.

$$v_i^2 = (\dot{\varphi} g_i)^2 + (\dot{\psi}_i \ell)^2 - 2 \dot{\psi}_i \ell \dot{\varphi} g_i \cos(\alpha_i + \psi_i - \varphi) \quad (II)$$

Кинетическая энергия системы спутник-стабилизатор

$$T = \frac{1}{2} J_c \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m v_i^2, \quad (I2)$$

где J_c - момент инерции спутника.

Выражение для потенциальной энергии i -го груза записываем в виде

$$V_i = \frac{3}{2} \frac{E_i J_i}{\ell} \psi_i^2, \quad (I3)$$

где $E_i = E$ - модуль упругости Юнга для штанги, $J_i = J$ - момент инерции поперечного сечения штанги.

Подставляя выражения (I2), (I3) в функцию Лагранжа и учитывая (II), получим согласно (I0) дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} [J_c + m n a^2 + m n \ell^2 + 2 a \ell \sum_{i=1}^n \cos \psi_i] \ddot{\varphi} - \\ - 2 m a \ell \dot{\varphi} \sum_{i=1}^n \sin \psi_i \dot{\psi}_i - m \sum_{i=1}^n (\ell^2 + a \ell \cos \psi_i) \ddot{\psi}_i + \\ + m a \ell \sum_{i=1}^n \sin \psi_i \dot{\psi}_i^2 = -M_{\varphi}, \end{aligned} \quad (I4)$$

$$m\ell^2\ddot{\psi}_i - m(\ell^2 + a\ell\cos\psi_i)\ddot{\varphi} + m a \ell \dot{\varphi}^2 \sin\psi_i + \frac{3EJ}{\ell}\psi_i = -M\psi_i, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Отметим, что уравнения (I4) описывают движение системы спутник-стабилизатор, обусловленное лишь колебаниями грузов. При малых отклонениях общее угловое движение системы можно рассматривать как сумму указанного выше и движения твердого тела.

К системе (I4) надлежит еще добавить уравнения, описывающие динамику СПУ.

4. Исследование движения системы спутник-стабилизатор, вызванного колебаниями грузов

Упростим уравнения (I4), пренебрегая моментами от сил внутреннего трения в штангах, так как доказано, что они малы по величине⁹. Линеаризировав уравнения, полагая амплитуды автоколебаний малыми, получим

$$[J_c + nm(\alpha + \ell)^2]\ddot{\varphi} - m\ell(\alpha + \ell)\sum_{i=1}^n\ddot{\psi}_i = -M\varphi, \\ m\ell^2\ddot{\psi}_i - m\ell(\alpha + \ell)\ddot{\varphi} + \frac{3EJ}{\ell}\psi_i = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (I5)$$

Так как СПУ релейная, то управляющий момент $M\varphi$ можно принять постоянным на каждом участке приспособывания, и на этих участках можно найти решение системы уравнений (I5).

Для стабилизатора с одной штангой решение системы уравнений (I5), при начальных условиях $t=0, \varphi=\varphi_0, \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0, \psi=\psi_0$ и $\dot{\psi}=\dot{\psi}_0$ имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 - A_1\varphi_0 + (\dot{\varphi}_0 - A_1\dot{\varphi}_0)t + A_1\varphi_0\cos\omega_1 t + \frac{A_1}{\omega_1}\dot{\varphi}_0\sin\omega_1 t - B_1M_\varphi t^2, \\ \psi = \psi_0\cos\omega_1 t + A_2\dot{\psi}_0\sin\omega_1 t - C_1M_\varphi. \quad (I6)$$

Для стабилизатора из двух штанг с грузами решение системы уравнений (I5) при самых невыгодных начальных условиях $t=0, \varphi=\varphi_0, \dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0, \psi_1=\psi_2=\psi_0$ и $\dot{\psi}_1=\dot{\psi}_2=0$ имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 - A\varphi_0 + \dot{\varphi}_0 t + A\varphi_0 \cos \omega_2 t - B M_\varphi t^2, \\ \varphi_1 &= \varphi_0 \cos \omega_2 t - C M_\varphi, \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cos \omega_2 t - C M_\varphi.\end{aligned}\quad (I7)$$

Постоянные коэффициенты $A, A_1, A_2, B, B_1, C, C_1$ и частоты ω_1 и ω_2 зависят от параметров системы спутник-стабилизатор и определяются следующими формулами

$$\begin{aligned}A &= \frac{2m\ell(\alpha+\ell)}{J_c + 2m(\alpha+\ell)^2}, \quad A_1 = \frac{m\ell(\alpha+\ell)}{J_c + m(\alpha+\ell)^2}, \quad A_2 = \frac{1}{\omega_1}, \\ B &= \frac{1}{2[J_c + 2m(\alpha+\ell)^2]}, \quad B_1 = \frac{1}{2[J_c + m(\alpha+\ell)^2]}, \\ C &= \frac{m\ell^2(\alpha+\ell)}{3EJ[J_c + 2m(\alpha+\ell)^2]}, \quad C_1 = \frac{m\ell^2(\alpha+\ell)}{3EJ[J_c + m(\alpha+\ell)^2]}, \\ \omega_1^2 &= \frac{3EJ}{m\ell^3} \left[1 + \frac{m(\alpha+\ell)^2}{J_c} \right], \quad \omega_2^2 = \frac{3EJ}{m\ell^3} \left[1 + \frac{2m(\alpha+\ell)^2}{J_c} \right].\end{aligned}$$

Из (I6) и (I7) видно, что при выключенной СЛУ ($M_\varphi = 0$) после раскрытия стабилизатора спутник при $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ будет медленно поворачиваться, одновременно совершая колебания с частотой, зависящей от жесткости штанг. Угловое отклонение увеличивается до тех пор, пока возмущение не будет уравновешено гравитационным моментом. Ввиду того, что силы внутреннего трения в штангах ничтожно малы, гравитационно-устойчивая система спутник-стабилизатор будет совершать медленные незатухающие колебания под действием гравитационного момента и быстрые колебания от качающихся грузов на штангах. Нежелательные высокочастотные колебания в системе можно погасить, если ввести в штангах силы внутреннего трения.

Так как корни характеристического уравнения системы первого приближения (I5) чисто мнимые, то суждение об устойчивости движения по этим уравнениям не является правомерным. Для строгого анализа необходимо исследовать уравнения движения (I4).

На ЦВМ в качестве примера была численно проинтегрирована система уравнений (I4) для ряда конкретных значений параметров спутника и стабилизатора². Сравнение результа-

тов численного интегрирования с аналитическим решением упрощенных уравнений показало, что частоты и амплитуды колебаний спутника и стабилизатора в обоих случаях практически совпадают.

На ЦВМ исследовалось также влияние момента от сил внутреннего трения в материале штанг и демпфирующих устройств. Демпфирующий момент учитывали по формуле $M_{\psi} = K\dot{\psi}$. Рас рассеяние энергии в штанге ($K = 0,001; 0,005; 0,01$) практически не влияет на колебания системы. Если штанга оснащена демпфирующими приспособлениями ($K = 1, 5, 10, 100$), то колебания в системе затухают очень быстро, однако спутник продолжает отклоняться от заданного положения до тех пор, пока за счет гравитационного момента не наступит равновесное состояние. После этого гравитационно-устойчивая система спутник-стабилизатор под действием гравитационного момента будет совершать медленные колебания. Однако, угол отклонения будет меньше за счет введения искусственного демпфирования в штангах. Таким образом, за счет изгибных колебаний стабилизатора спутник на небольших интервалах времени не удастся задемфировать.

На гравитационно-ориентированных спутниках, запущенных в США, стабилизатор раскрывается после окончательного успокоения спутника при помощи системы „йо-йо“ и имеется магнитное демпфирование². При таком выборе момента раскрытия стабилизатора угловая скорость спутника, не погашенная СПУ, уменьшается вследствие увеличения момента инерции системы спутник-стабилизатор.

В уравнениях (16) и (17) величина управляющего момента M_{ψ} входит с очень малым коэффициентом. Если время работы СПУ невелико и управляющий момент мал, то можно ожидать, что за время своей работы она не окажет существенного влияния на динамику спутника. Поэтому можно сделать вывод о целесообразности раскрывать стабилизатор после выключения СПУ. Полученный вывод требует дополнительного исследования. Если стабилизатор не обладает достаточной жесткостью, то раскрыть его целесообразно после предварительного успокоения спутника. О влиянии СПУ при раскрытом гравитационном стабилизаторе на

динамику следует судить по результатам исследования уравнений движения (I4).

На ЦВМ было проведено исследование полных уравнений движения изгибных колебаний системы спутник-стабилизатор с учетом работы СПУ для выбранных параметров спутника и стабилизатора ². Исследования показали, что если СПУ имеет релейную характеристику с зоной нечувствительности, то изгибные колебания системы спутник-стабилизатор можно затенпфировать в течение приемлемого интервала времени при небольших по величине управляющих моментах.

Л и т е р а т у р а

1. Д.Е.Охочимский, В.А.Сарычев. Система гравитационной стабилизации искусственных спутников. Сб. "Искусственные спутники Земли", вып. I6, Из-во АН СССР, 1963.
2. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли, под ред. С.Ф.Сингера. Из-во "Наука", 1966.
3. Б.В.Раушенбах, Е.Н.Токарь. Некоторые вопросы управления в межпланетном пространстве. Сб. "Искусственные спутники Земли", вып. 5. Из-во АН СССР, 1960.
4. В.П.Легостаев, Б.В.Раушенбах. Система одноосной ориентации по солнцу кораблей-спутников "Восток". Космические исследования, т. IV, вып. 3. Из-во АН СССР, 1966.
5. В.В.Петров, В.Ю.Рутковский. Теория простейших релейных сервомеханизмов с запаздыванием. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1956.
6. В.И.Попов. Исследование одной релейной системы с изменяющимися во времени регулирующим воздействием и переключением закона регулирования. Сб. "Теория и применение автоматических систем". Из-во "Наука", 1964.
7. В.И.Попов, В.Ю.Рутковский. Исследование плоских изгибных колебаний гравитационно-устойчивой системы спутник-стабилизатор. Космические исследования, т. 3, вып. 5. Из-во АН СССР, 1965.
8. Ю.А.Шиманский. Динамический расчет судовых конструкций. Судпромгиз, 1963.
9. Я.Г.Пановко. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. Физматгиз, 1960.

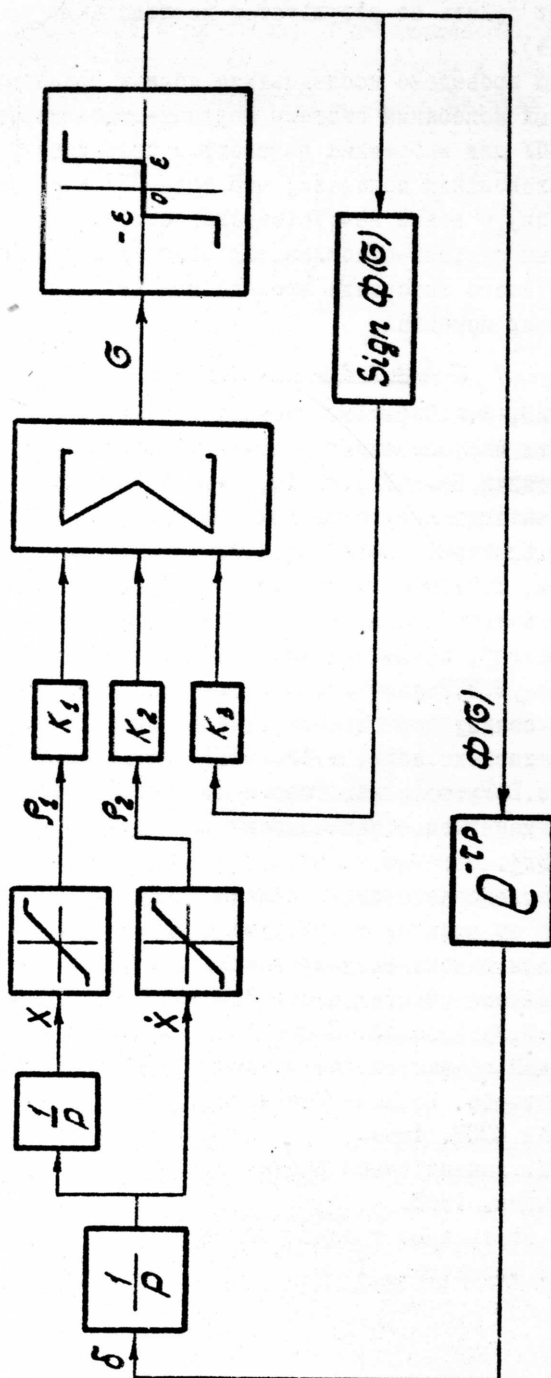


Рис. 1

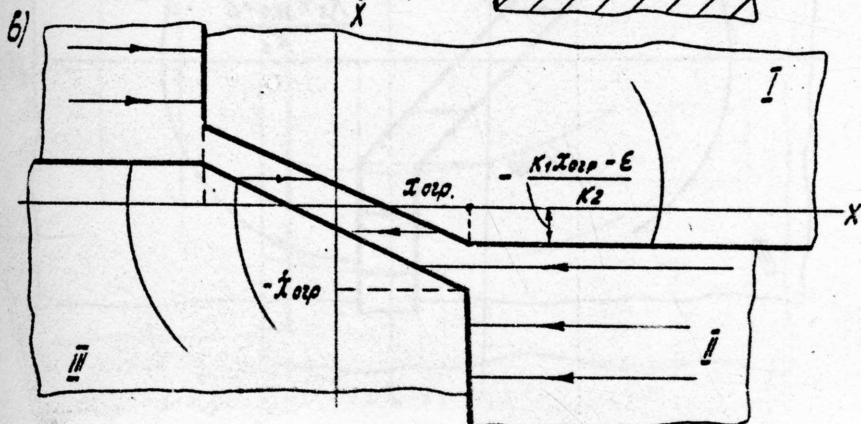
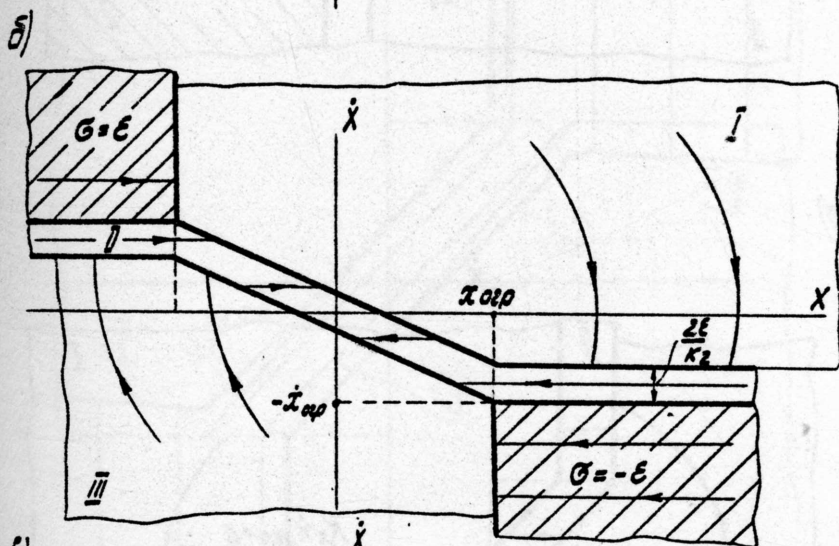
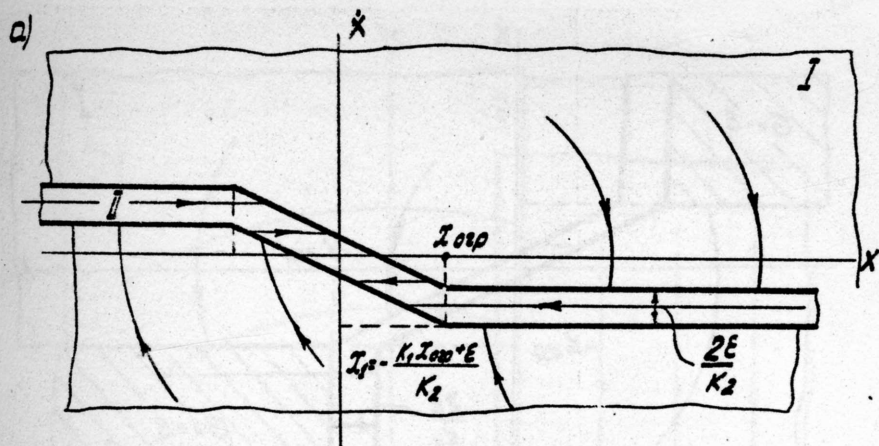
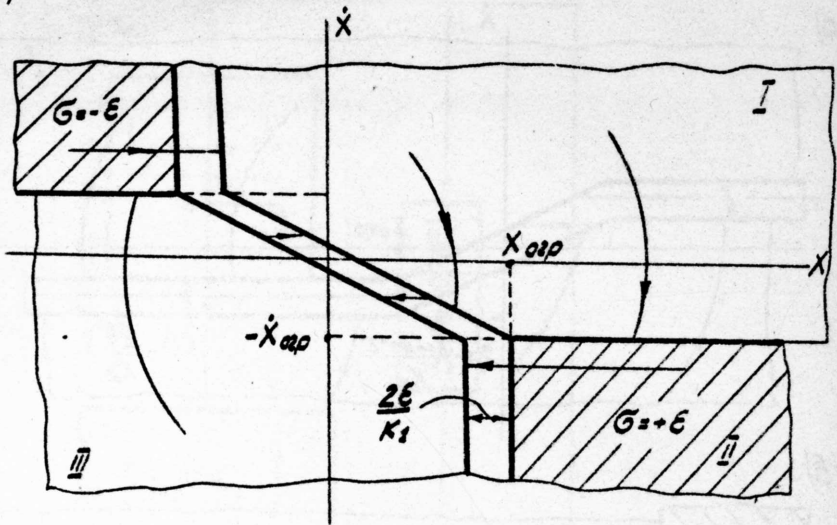


Рис. 2

2)



a)

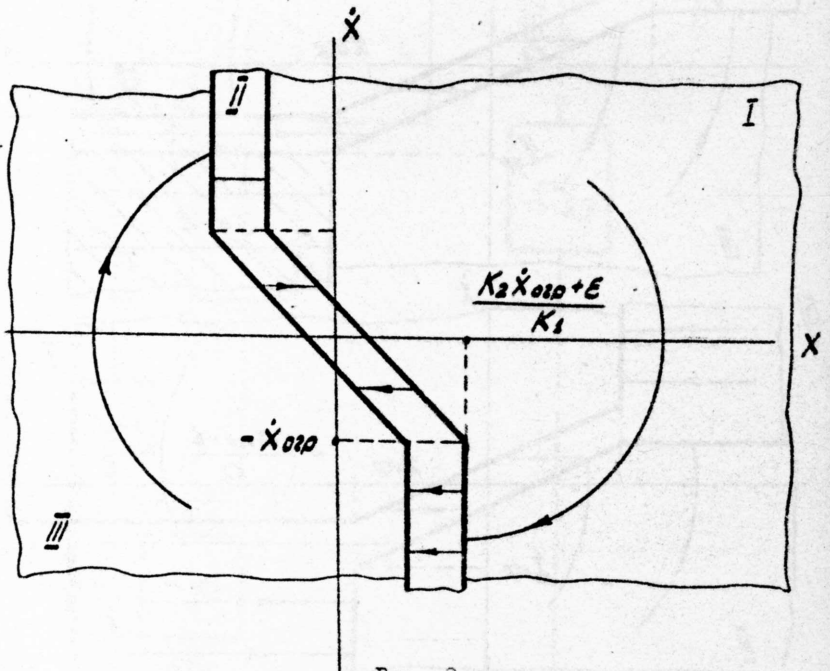


Рис. 2

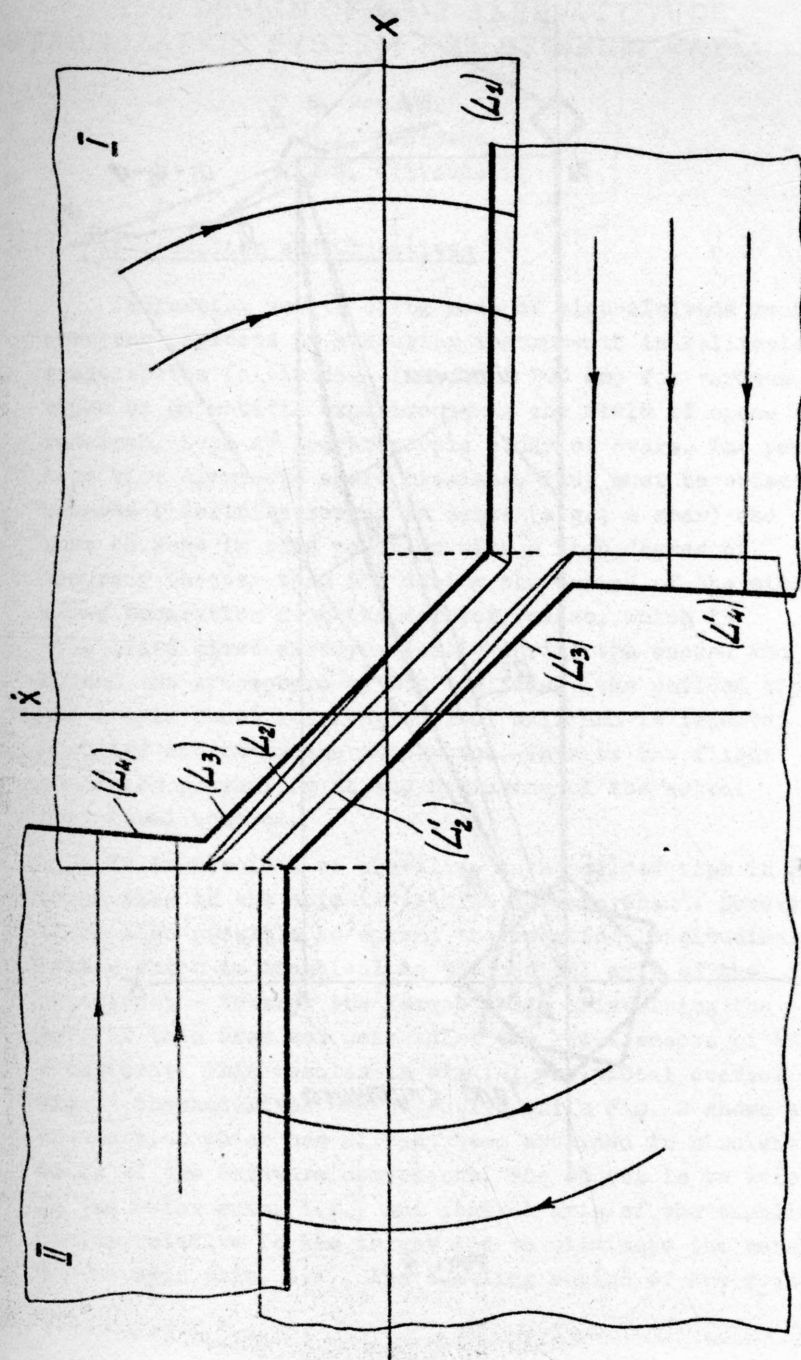


Рис. 3

THE DESIGN OF AN 2-AXES-ATTITUDE STABILIZATION SYSTEM FOR SPINNING PAYLOADS

H. Roderer

H.A. Seelmann

H.W. Woitschella

1. Introduction and Objectives

Increasing use is being made of high-altitude rockets carrying payloads of measuring instruments in ballistic trajectories (altitudes of approx. 200 km) for various types of scientific experiments in the field of space research, such as spectroscopic study of stars. The payload tips carry out short missions, they must be oriented towards a definite target in space (e.g., a star) and must be kept in this position with a high degree of accuracy (better than 5') during the period of the mission. After separation from its carrier rocket, which is stabilised first aerodynamically during the ascend and beyond the atmosphere by its own twist, the payload tip has a spin about its longitudinal axis and is imparted a wobbling motion by the separation. This is the flight condition prevailing at the beginning of the actual positional control.

It is possible to stabilise such payload tips in all three axes if the spin is eliminated beforehand. However, it is also possible to orient the rotating longitudinal axis - which is identical to the optical axis of the experiment - towards the target while maintaining the spin if this does not contradict the requirements of the experiment. This results in biaxial positional control. Fig. 1 characterizes the objective while Fig. 2 shows an acquisition which has already been attained in simulator tests of the hardware components. The object is to zero in the twist axis, i.e., the central axis of the tumbling motion relative to the target and to eliminate the nutation of the spin axis, i.e., the tumbling motion of the rotating

longitudinal axis of the body. The phenomenon of motion (Fig. 2) is represented on an inertial reference plane which is in an orthogonal position relative to the target and which is characterised by Euler angles in the axes.

The target star is projected into the origin of this plane and the spin axis passes through the plane on the trajectory represented.

Since the payload tip has to carry out a short mission, an additional objective is to accomplish such an orientation process within an optimum period of time. The analysis and synthesis of a positional control system for executing the described orientation operation which works on an approximately optimum time basis is the object of the following studies.

2. Analysis of Missile Dynamics

The laws of gyroscopic dynamics govern the orientation and positional control of a rotating missile. The coordinate systems employed are shown in Fig. 3, as it is expedient to view them in connection with the course of motion. The twist of the missile in the inertial reference system (subscript ₁) can be expressed by the main inertial moments and by the speeds of rotation in coordinates of an internal system of axes rotating with a spin ω_s .

$$\underline{D}_1 = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x = \omega_s \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

A spinless axial system (subscript _s) which has only the position of the longitudinal axis x but not the body spin in common with the internal axial system appears expedient for a rotation symmetrical missile such as

the payload tip, whose motion is to be influenced only in two rotational degrees of freedom. The spinless system has the two rotational degrees of freedom

$$\underline{\omega}_{s,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{y,s} \\ \omega_{z,s} \end{pmatrix} \quad (2)$$

The total twist of the coordinates of the spinless system amounts to

$$\underline{D}_i = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_s \\ \omega_{y,s} \\ \omega_{z,s} \end{pmatrix} \quad (3)$$

According to the principle of conservation of angular momentum, an external moment acting on the missile brings about a change in the twist.

$$\underline{M}_s = \frac{d\underline{D}_i}{dt} + \underline{\omega}_{s,i} \times \underline{D}_{s,i} \quad (4)$$

This formulation provides the moment equations in components of the spinless system

$$M_{x,s} = I_x \dot{\omega}_s$$

$$M_{y,s} = I \dot{\omega}_{y,s} + I_x \cdot \omega_s \cdot \omega_{z,s} \quad (5)$$

$$M_{z,s} = I \dot{\omega}_{z,s} - I_x \cdot \omega_s \cdot \omega_{y,s}$$

The position of the spinless system in the inertial reference system is already fixed by two Euler's angles of rotation ϑ, ψ since it does not roll ($\varphi = 0$). Thus the following approximation for the rotary movement is admissible for small deviations ($\vartheta \approx 20^\circ$).

$$\begin{aligned}\omega_{y,s} &= \dot{\vartheta} \\ \omega_{z,s} &= \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta \approx \dot{\psi}\end{aligned}\quad (6)$$

If we take into account the fact that the spin of the missile body is maintained without being influenced, i.e. $M_{x,s} = 0$, and if we introduce the control moments

$$m_{y,s} = \frac{M_{y,s}}{I}$$

$$m_{z,s} = \frac{M_{z,s}}{I}$$

and the nutation frequency

$$h = \frac{I_x}{I} \cdot \omega_s \quad (7)$$

as standardised magnitudes, we obtain simple motion equations which lend themselves to evaluation

$$\begin{aligned}m_{y,s} &= \ddot{\vartheta} + h\dot{\psi} \\ m_{z,s} &= \ddot{\psi} - h\dot{\vartheta}\end{aligned}\quad (8)$$

Aerodynamical and gravitational interference factors beyond the dense layers of the atmosphere can be neglected in the orientation operation. A constant control moment m for controlling the missile around the internal traverse

axis z_f is available which, upon transformation to the spinless system, yields the components.

$$m_{y,s}(t) = -m \sin \omega_s t$$

(9)

$$m_{z,s}(t) = m \cos \omega_s t$$

This control moment m is to be switched on at certain intervals in order to effect controlled orientation. In this way the switching periods are optimised in accordance with Pontrijagin's maximum principle.

3. Optimum Time Control of the Rotating Missile

The optimisation of the orientation operation is regarded as a control problem until the longitudinal axis of the missile points in the approximate direction of the target. The object is to determine the optimum control course u^* for the internal adjustment moment so that the twist and spin axes of the missile are aligned with the target from an unknown starting position in the shortest possible time.

With the variables of state

$$x_1 = \gamma$$

$$x_2 = \psi$$

$$x_3 = \dot{\gamma}$$

$$x_4 = \dot{\psi}$$

and the limited control variables

$$0 \leq u \leq 1$$

the equations of motion (equation 8) lead to a linear,

non-autonomous system of state:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \cdot \underline{x}(t) + B(t) \cdot u \quad (10)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & h & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \omega_s t \\ \cos \omega_s t \end{vmatrix} \cdot m \cdot u$$

The adjointed system

$$\dot{\underline{\lambda}}(t) = -A^* \cdot \underline{\lambda}(t) \quad (11)$$

has the general solution with the integration constants

$$\lambda_{10}, \lambda_{20}, c_1, \varphi_1$$

$$\lambda_1 = \text{konst} = \lambda_{10}$$

$$\lambda_2 = \text{konst} = \lambda_{20}$$

$$\lambda_3 = c_1 \sin(ht + \varphi_1) + \frac{\lambda_{20}}{h} \quad (12)$$

$$\lambda_4 = -c_1 \cos(ht + \varphi_1) - \frac{\lambda_{20}}{h}$$

The optimal control course u^* , according to the maximum principle, is given when the Hamilton function has its upper limit in the total motion interval.

$$H(x, \underline{\lambda}, u^*, t) = \sup_{u \in U} H(x, \underline{\lambda}, u, t) = M(x, \underline{\lambda}, t) \quad (13)$$

The switching function $\Gamma(t)$ is this obtained for the control course:

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \lambda_4(t) \cos \omega_s t - \lambda_3(t) \sin \omega_s t \\ &= -\frac{c_2}{h} \sin(\omega_s t + \varphi_2) - c_1 \cos(Ht - \varphi_1)\end{aligned}\quad (14)$$

$$\Gamma(t) \geq 0 \rightarrow u^* = 1; \quad \Gamma(t) < 0 \rightarrow u^* = 0$$

The twist frequency H is introduced in equation 14 as an additional abbreviation

$$H = \omega_s - h = \omega_s \left(1 - \frac{I_x}{I}\right) \quad (15)$$

The magnitudes c_1 , c_2 , φ_1 and φ_2 are the integration constants of the adjointed system. Since only the four final conditions of the vector of state $\underline{x}(T)$ are known, an additional condition for the orientation time T is still to be obtained before a complete, unequivocally optimal solution can be determined. This condition is provided by the Hamilton function at its upper bound:

$$H(\underline{x}(t), \underline{\lambda}(t), u^*, t) - \int_T^t \sum_{v=1}^n \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial t} \lambda_v(t) dt - \lambda_0 = 1 \quad (16)$$

$$-hc_1[x_4(T) \sin(hT + \varphi_1) + x_3(T) \cos(hT + \varphi_1)] + u^*(T)m\Gamma(T) = 1$$

A general solution for arbitrary initial values $\underline{x}(t_0)$ and for the final values $\underline{x}(T)$ is as yet unknown for the boundary value problem. The problems has been solved for

the important, special initial and final values

$$x_3(t_0) = 0 \quad x_3(T) = 0$$

$$x_4(t_0) = 0 \quad x_4(T) = 0$$

The following integration constants have been obtained in this case:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \text{konst} < 0$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{x_1(t_0)}{x_2(t_0)}$$

The hodograph x_3, x_4 in Fig. 4 shows a periodically increasing and decreasing nutation of the frequency h during an orientation loop of the spin axis. Energy is periodically applied to and withdrawn from the nutation in the periods during which the control moment is switched on (dotted paths). The energy of the nutation motion remains constant during the uncontrolled phases (circular arc). The course of the control magnitude and of the regulating moment is represented in Fig. 5. The corresponding internal adjusting moment has a relay-like connection. In this case this can be technologically realised by a single gas jet, arranged to point in the direction of the internal y axis with a lever to the centre of gravity of the body. The jet must produce the necessary regulating moment:

$$m_{z_2} = m = \frac{1 \cdot S_0}{I}$$

Figure 6 shows the optimal path of the spin axis under the special condition that the missile does not nutate at the beginning. For this purpose cycloid paths

with closed loops set in. They are conditioned by the fact that the increasing and decreasing nutation has just decreased during the orientation at the points of inflection. The size of the cycloid arcs depends alone on the missile parameters I_x , I and the final regulating moment m .

This means that the target position can be calculated accurately only from special initial values with predetermined constant regulating moment. If the missile has an initial nutation, the loops open at the cycloid points of inflection, since the initial nutation remains unattenuated during the orientation. A nutation attenuation could be attained if the integration constants c_1 and φ_1 in the switching function could be taken into account in accordance with equation 14 and if they could be solved for a general initial state $\underline{x}(t_0)$. This is possible only numerically and only for certain initial states.

For this reason we propose to show that the laws of gyroscopic dynamics offer another solution.

4. Control Possibilities Presented by A Gyroscope

In the following observations of the gyroscopic dynamics it is expedient to study the equations of motion in the internal coordinate system, i.e., coordinate system with the spin ω_s . The reason for this lies in the fact that the regulating moment of the control jet points in one constant direction in this coordinate system. Thus the equations of motions can be analytically integrated. If the jet is placed in the internal y axis, as assumed above, so that it generates a pulse-shaped regulating moment around the z axis,

$$m_z(t) = m[\sigma(t-t_a) - \sigma(t-t_e)] \quad (17)$$

then the following system of equations is to be solved.

$$0 = \dot{\omega}_y - H \cdot \omega_z \quad (18)$$

$$m_z = \dot{\omega}_z + H \cdot \omega_y$$

Assuming the missile has a deviation ψ_0 , $\tilde{\psi}_0$, and a nutation with the amplitude at a random initial time. The time course of the uncontrolled motion yields a pure nutation. The velocity components are:

$$\omega_y(t) = \{\omega_{y0}\} \cos Ht + \{\omega_{z0}\} \sin Ht \quad (19)$$

$$\omega_z(t) = -\{\omega_{y0}\} \sin Ht + \{\omega_{z0}\} \cos Ht$$

After transforming to the inertial reference system we obtain for small deviation angles:

$$\tilde{\psi} = \left\{ \tilde{\psi}_0 - \frac{\omega_{z0}}{h} \right\} + \left\{ \frac{\omega_{y0}}{h} \right\} \sin ht + \left\{ \frac{\omega_{z0}}{h} \right\} \cos ht \quad (20)$$

$$\psi = \left\{ \psi_0 + \frac{\omega_{y0}}{h} \right\} - \left\{ \frac{\omega_{y0}}{h} \right\} \cos ht + \left\{ \frac{\omega_{z0}}{h} \right\} \sin ht$$

The time invariable term of equation 20 represents the position of the centre of the circle of nutation, i.e., the position of the twist axis. Since no control moments are acting on the system, the position remains constant. The remaining terms are determined by the nutation.

The position of the optimum time control pulses is known when the integration constants of the adjointed system

are given from Pontrijagin's optimization. The constants can be obtained from the boundary value problem. In the following we show how this tedious procedure can be circumvented.

One of the principles in control engineering is to introduce control variables in such a way that they reduce the control deviation. In the present case the deviation of the twist axis from the direction to the target star and the nutation are to be diminished. According to this principle it is also possible to derive the mean ignition positions of the control jet from the equations of motion. Thus the integration constants of the adjointed system can be determined. The optimum ignition periods can then be calculated by way of the switching function.

We proceed on the basis of the general solution of the motion system equation 18, taking into account the control moment equation 17:

$$\begin{aligned}\omega_y(t) = & \omega_{y0} \cos Ht + \omega_{z0} \sin Ht \\ & + \frac{M}{H} [1 - \cos H(t-t_a)] \sigma(t-t_a) \\ & - \frac{M}{H} [1 - \cos H(t-t_e)] \sigma(t-t_e)\end{aligned}\quad (21)$$

$$\omega_z(t) = -\omega_{y0} \sin Ht + \omega_{z0} \cos Ht$$

$$\begin{aligned}& + \frac{M}{H} [\sin H(t-t_a)] \sigma(t-t_a) \\ & - \frac{M}{H} [\sin H(t-t_e)] \sigma(t-t_e)\end{aligned}$$

The position angles are described as follows after the angular velocities are transformed and integrated:

$$\begin{aligned}\vartheta(t) = & \vartheta_0 + \frac{\omega_{y0}}{h} \sin ht - \frac{\omega_{z0}}{h} [1 - \cos ht] \\ & + \frac{m}{H} \left[\frac{1}{\omega_s} \{ \sin \omega_s t - \sin \omega_s t_a \} - \frac{1}{h} \{ \sin(ht + Ht_a) - \sin \omega_s t_a \} \right] \sigma(t - t_a) \\ & - \frac{m}{H} \left[\frac{1}{\omega_s} \{ \sin \omega_s t - \sin \omega_s t_e \} - \frac{1}{h} \{ \sin(ht - Ht_e) - \sin \omega_s t_e \} \right] \sigma(t - t_e) \\ \psi(t) = & \psi_0 + \frac{\omega_{y0}}{h} [1 - \cos ht] + \frac{\omega_{z0}}{h} \sin ht \quad (22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& + \frac{m}{H} \left[\frac{1}{\omega_s} \{ \cos \omega_s t - \cos \omega_s t_a \} + \frac{1}{h} \{ \cos(ht + Ht_a) - \cos \omega_s t_a \} \right] \sigma(t - t_a) \\ & - \frac{m}{H} \left[\frac{1}{\omega_s} \{ \cos \omega_s t - \cos \omega_s t_e \} + \frac{1}{h} \{ \cos(ht + Ht_e) - \cos \omega_s t_e \} \right] \sigma(t - t_e)\end{aligned}$$

A free motion comparable with equations 19 and 20 sets in again after the control phase ($t > t_0$). In this phase the discontinuous functions are from equations 21 and 22

$$\sigma(t - t_a) = 1$$

$$\text{for } t > t_e \quad (23)$$

$$\sigma(t - t_e) = 1$$

By transforming equations 21 and 22 we can compare the coefficients of the time variable terms and obtain a new position of the twist axis.

The new coefficients

$$\begin{aligned}\omega_y^* &= \omega_{y0} + \frac{m}{H} (\cos Ht_e - \cos Ht_a) \\ \omega_z^* &= \omega_{z0} + \frac{m}{H} (\sin Ht_e - \sin Ht_a)\end{aligned}\quad (24)$$

replace the ω_{y0} and ω_{z0} from Eq. 19

To decrease the existing nutation, the following must apply:

$$\sqrt{\omega_{y0}^2 + \omega_{z0}^2} - \sqrt{\omega_y^{*2} + \omega_z^{*2}} \rightarrow \text{Min} \quad (25)$$

On this basis it is possible to determine t_a and t_e , i.e., the position and duration of the control pulse in the case of a pure nutation decrease. The control moment in compliance with equation 25 and equation 24 is produced as long as $\omega_z(t) < 0$. This results in the fact that the resulting moment is in an orthogonal position relative to the initial nutation path and counteracts the motion. Fig. 7a shows the progression from the larger to the smaller circle of nutation. It can be observed that an attenuation of the nutation is attained.

A new position of the twist axis is also obtained by a comparison of the coefficients of equations 20 and 22:

$$\begin{aligned}\vartheta_m^* &= \vartheta_{m0} + \frac{m}{H} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega_s} \right) [\sin \omega_s t_a - \sin \omega_s t_e] \\ \psi_m^* &= \psi_{m0} - \frac{m}{H} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega_s} \right) [\cos \omega_s t_a - \cos \omega_s t_e]\end{aligned}\quad (26)$$

The following must apply in order to diminish the deviation:

$$\sqrt{\sigma_{m0}^2 + \psi_{m0}^2} - \sqrt{\sigma_m^{*2} + \psi_m^{*2}} \rightarrow \text{Min} \quad (27)$$

This condition results in the fact that the resulting control moment m lies in the plane defined by the twist axis and aligns the twist axis with the target.

Fig. 7b shows that the twist axis has described a semicone and has stopped exactly in the line of sight. The initial nutation may have either increased or diminished in the course of the control operation, depending on the position of the spin axis.

After several such precision control steps, a periodically increasing and decreasing nutation can be determined. We must now find a relation between the results of the time optimisation and the gyroscopic dynamic observation.

5. Measurement Engineering Problems Connected with the Realisation of the Switching Conditions

In order to realise the ignition criteria according to equations 25 and 27, only those measuring signals can be utilised which are logged in the internal system. Fig. 8 illustrates the assignment of internal measuring magnitudes relative to the inertial reference system.

The orientation in space can be measured in the internal system only by means of spin-modulated deviation signals σ_f, ψ_f .

$$\sigma_f = \sigma \cos \omega_s t + \psi \sin \omega_s t$$

$$\psi_f = \sigma \sin \omega_s t + \psi \cos \omega_s t$$

(28)

With regard to precision control, equation 27 shows that a control moment must be produced as long as the spin-modulated position magnitude of the twist axis is $\mathcal{J}_{fm}(t) > 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{fm}(t) &= \mathcal{J}_{mo} \cos \omega_s t + \psi_{mo} \sin \omega_s t > 0 \\ &= \sqrt{\mathcal{J}_{mo}^2 + \psi_{mo}^2} \sin(\omega_s t + \varphi_2)\end{aligned}\quad (29)$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{\mathcal{J}_{mo}}{\psi_{mo}}$$

Comparing this ignition condition from the gyroscopic dynamics with the switching function of equation 14 according to Pontrijagin, we shall note that the following relations hold true

$$c_2 = \text{konst} < 0$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{\mathcal{J}_{mo}}{\psi_{mo}} = \arctan \frac{x_1(t_0)}{x_2(t_0)} \quad (30)$$

A possible initial nutation, characterized by the components c_1 , φ_1 will not be attenuated by this condition alone.

As mentioned in the foregoing, the nutation criterion according to equation 25 leads to a control moment as long as $\omega_z(t) < 0$.

$$\begin{aligned}\omega_z(t) &= -\omega_{y0} \sin Ht + \omega_{z0} \cos Ht < 0 \\ &= \sqrt{\omega_{y0}^2 + \omega_{z0}^2} \cos(Ht - \varphi_1)\end{aligned}\quad (31)$$

$$\tan \varphi_1 = -\frac{\omega_{y0}}{\omega_{z0}}$$

The constants c_1 and φ_1 must be as follows for pure nutation attenuation:

$$c_1 = \text{konst} > 0$$

$$\varphi_1 = \arctan\left(-\frac{\omega_{y0}}{\omega_{z0}}\right) \quad (32)$$

If both a deviation as well as an initial situation are present at the beginning of the control operation, the constants c_1 and c_2 are in a certain relation to each other. The relation is given due to the fact that the increasing and decreasing nutation required for precision is not attenuated, but an additionally present nutation is. The relation depends on the magnitude of the control moment present, since a greater moment gives rise to a greater increasing and decreasing nutation.

The condition expressed by equation 31 must be immediately satisfied for the nutation attenuation with the given measuring signal $\omega_z(t)$ e.g. of a reversing gyroscope.

The condition expressed by equation 29 for the precision of the twist cannot be measured. But it could be calculated from the measurable, inertial position of the spin axis. The difference in the positions of the twist and spin axes is given by the nutation. If small nutation amplitudes are expected, the condition expressed by equation 29 can be approached by the following measurable condition:

$$\mathcal{J}_f(t) = \sqrt{\mathcal{J}_0^2 + \psi_0^2} \sin(\omega_{st} + \varphi_2) > 0$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{\mathcal{J}_0}{\psi_0} \quad (33)$$

For instance, the measured magnitude $\mathcal{J}_f(t)$ is given by a gyroscope platform or a star sensor. The approximation introduced in equation 33 results in the fact that an additional gradually increasing nutation is superimposed

on the increasing and diminishing nutation necessary for the precision control. Fig. 9 shows the precision control without nutation attenuation. In the vicinity of the target, the twist axis enters into a pointing error, while the spin axis nutates divergently. Then the entire control energy is converted into increased nutation.

A limit cycle is produced in the inertial position of the spin axis as a result of finite, discrete control pulses in the case of a pure nutation attenuation (Fig. 10). The amplitude of this limit cycle depends essentially on the magnitude of the control moment produced and diminishes with diminishing control thrust.

Figure 11 shows a superimposed control operation in which the amplitude of the nutation oscillation is supervised and selectively attenuated. It can be seen from the resulting limit cycle that the target position cannot be attained with the necessary accuracy from an arbitrary initial condition with the given control moment. A further control step with a reduced thrust level of the control jet is necessary for fulfilling the precision requirements.

Figure 12 shows the complete acquisition in the vicinity of the target, the individual errors of the controller components being taken into account. The figure shows a theoretical result which can be compared with the real process (see Fig. 2). The required accuracy of 5 minutes of arc is attained, as can be seen, within a wide margin of safety.

6. Layout of the Biaxial Positional Control System ASTRID

The layout of the ASTRID system made by the Dornier Co. is based on theoretical observations carried out to date. The problem of orienting the twist and spin axes in the desired position within an optimum period of time is regarded as a control problem in the following. The deviation of the twist axis and the nutation of the spin axis is designed as a feedback to the controller. Apart from the

optimal acquisition, the problem covers also the compensation for external interferences exerted on the system and the stabilisation of the missile throughout the period of the mission (approx. 5 min).

Figure 13 shows the design of the control system in the form of a block diagram. The acquisition takes places in two separate phases. In the first phase (coarse phase) a large deviation from the target direction is corrected with the maximum available control moment in optimum time. The positional sensor in this phase is a biaxial inertial platform whose spin-modulated deviation signal $\mathcal{J}_f(t)$ is fed to the controller network after being processed and filtered free from noise for determining the precision ignition points.

The second phase (fine phase) controls with a diminished thrust level and has a star sensor in place of the platform for measuring the position. The star sensor has the same function in the control circuit as the platform. Due to the fact that the platform produces drift errors as a result of which the exact positional coordinates of the target star are lost in the course of the rocket launch and of the coarse acquisition, the payload tip is not oriented to the exact desired target. This orientation error is corrected in the fine phase.

A reversing gyroscope serves for measuring the nutation in both phases. It measures the angular velocity about the traverse axis of the missile. The signal of the reversing gyroscope is filtered free from noise and fed to the controller network for determining the ignition points for attenuating the nutation. In this way the controller network continuously determines the ignition instants both for precision as well as for nutation attenuation and requires for this purpose only the zero transitions of the measurement signals.

No amplitude data is processed for determining the ignition instants.

A logic component decides on the coarse and fine phases (level control), selective nutation attenuation and ignition periods for the jet drive. Only the logic component requires amplitude data of the measurement signals. The amplitude of the angular velocity $\omega_z(t)$ is continuously monitored for the selective attenuation of the nutation, while the amplitude of the deviation signal $\mathcal{J}_p$ is utilised for level control and thrust reduction only when the approximate target orientation is reached (Fig. 14).

The signal of state of the momentary control phase from the logic component determines the thrust level of the control jet. A thrust variation is effected by a pulse modulator, which actuates the jet during the duration of the electronic ignition pulse with individual, small pulses of variable width and sequence frequency.

The positional sensors of the control system are adapted to each other in such a way that the drift error of the platform is smaller than the angle of sight of the star sensor. On the other hand, the angle of sight of the star sensor is restricted by the fact that it is designed in such a way that it cannot see neighbouring stars of the same luminosity. In the ASTRID system, for instance, the angle of view of the star sensor amounts to $\pm 2^\circ$. This means that the nearest equally bright star must be at least 4° away and that all drift errors must be less than 2° .

Concluding Remarks

The present work represents the stage of development of the ASTRID project reached in July, 1968. It is planned to present more detailed results from further hardware tests and possibly from first flight tests. The first flight tests with this system will be conducted in the middle of 1969. With regard to the final results attainable with such a biaxial stabilisation system for high altitude research rockets we can state that in

principle there are only technological restrictions. When it becomes possible to attain the required level of fine adjustment of the control thrust, to utilise sensors of maximum resolution, and to carry out a mechanical integration of the components with a high degree of accuracy, then such a control system will attain the accuracies which are today attainable with triaxial stabilisation systems. Although it must be pointed out that the use of a biaxial stabilisation system is restricted to experiments in which the inertial orientation of only one axis is considered.

Bibliography

- 1 L.S. Pontryagin,
The Mathematical Theory of Optimal Processes
John Wiley & Sons, 1962
- 2 S. Timoshenko and D.H. Yong,
Advanced Dynamics, Mc. Graw Hill, New York 1948
- 3 G. Leitmann,
Optimization Techniques with Applications to
Aerospace Systems, Academic Press, New York 1962
- 4 B. Etkin,
Dynamics of Flight, John Wiley & Sons, 1962
- 5 E.I. Jury,
Theory and Application of the z-Transform Method,
John Wiley & Sons, 1964
- 6 R. Lunderstädt, H. Roderer, H. Seelmann,
Zeitoptimale Lageregelung für den Einfangvorgang
drallstabilisierter Flugkörper,
Dornier-Report EE 40--A-148-68

Nomenclature

D_1	twist in the inertial system
H	twist frequency
I_x	
$I_y = I$	main inertial moments of the missile
$I_z = I$	
$M_{x,s}$	moments in the spinless system
$M_{y,s}$	
$M_{z,s}$	
S_D	jet thrust
T	stabilisation time
c_1	integration constants of the adjoined system
c_2	
h	nutaton frequency
l	lever of the jet to the centre of gravity
m	constant, standardised regulating moment around the
m_z	internal z-axis
t	time
t_0	initial time
t_a	beginning and end of pulse
t_e	
u	control variable
x	axes of the rigid system
y	
z	

x_s	
y_s	axes of the spin-less system
z_s	
x_i	$i = 1 \dots 4$ state variables
$r(t)$	switching function
$\delta(t)$	discontinuity function
γ	inertial Euler angles of the spin axis position
ψ	Euler angles of the twist axis position
γ_f	spin modulated Euler angles of the spin axis position
ψ_f	
γ_m	Euler angles of the twist axis position
ψ_m	
λ_i	$i = 0 \dots 4$ adjointed variables
φ_1	
φ_2	integration constants of the adjointed system
ω_s	spin frequency
ω_x	
ω_y	angular velocity of the internal system
ω_z	
$\omega_{y,s}$	
$\omega_{z,s}$	angular velocities of the spinless system

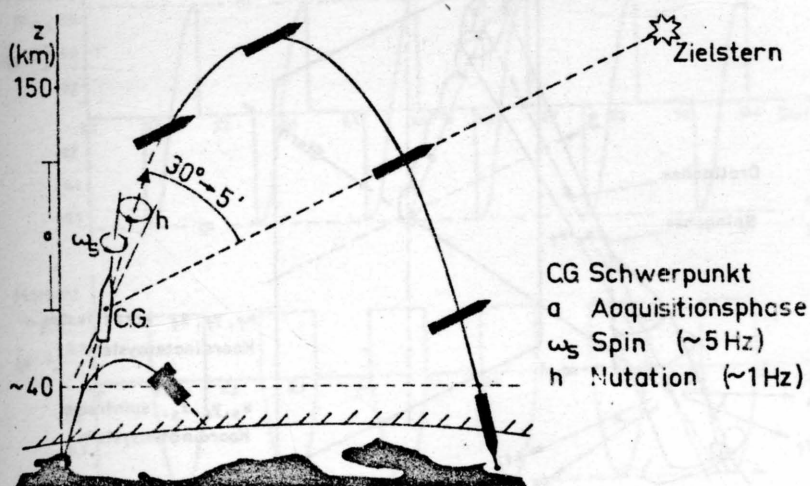


Fig. 1. Stabilisation of a twisting missile

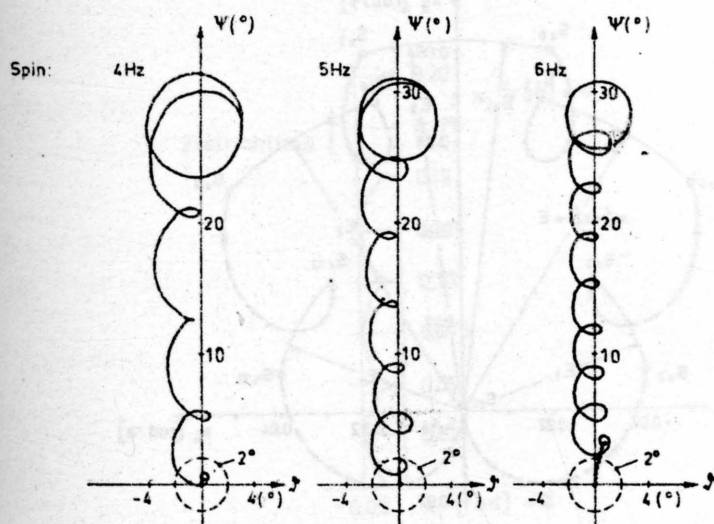


Fig. 2. Realised acquisition trajectories

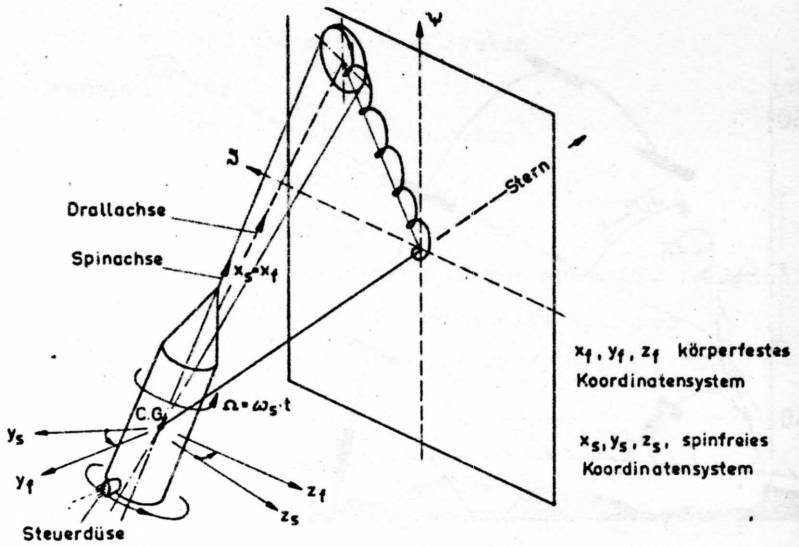


Fig. 3. Inertial orientation of the missile

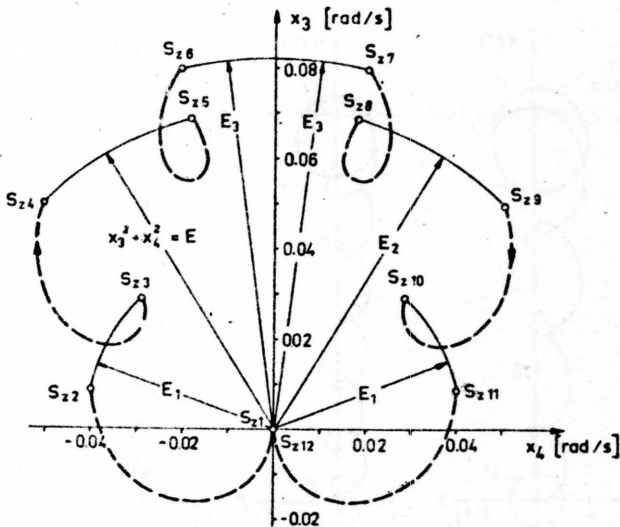


Fig. 4. Hodograph representation of the angular velocities x_3 and x_4 for a nutation period

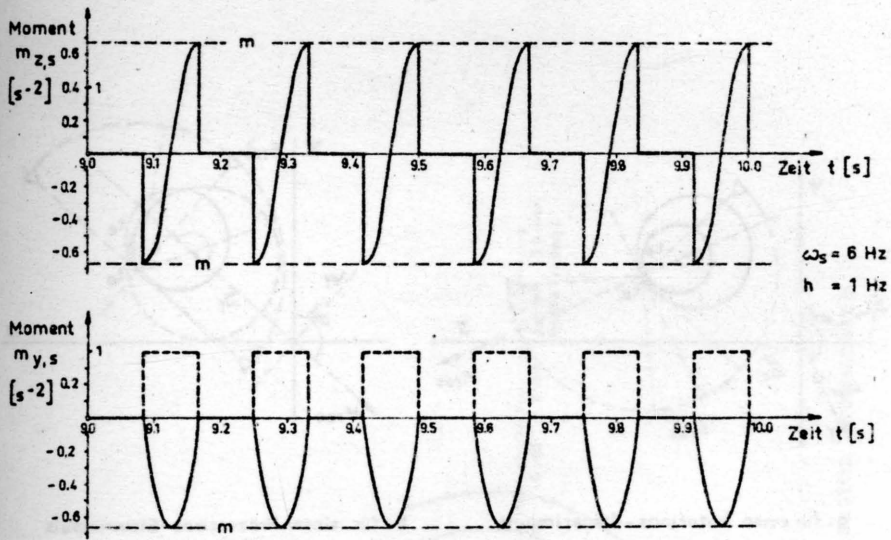


Fig. 5. Control moments during a nutation period

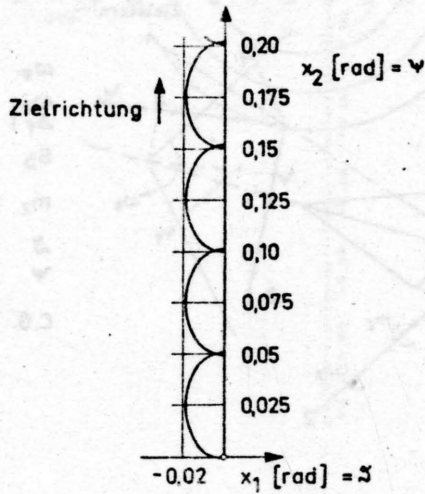


Fig. 6. Polar diagram for optimum time transient behaviour

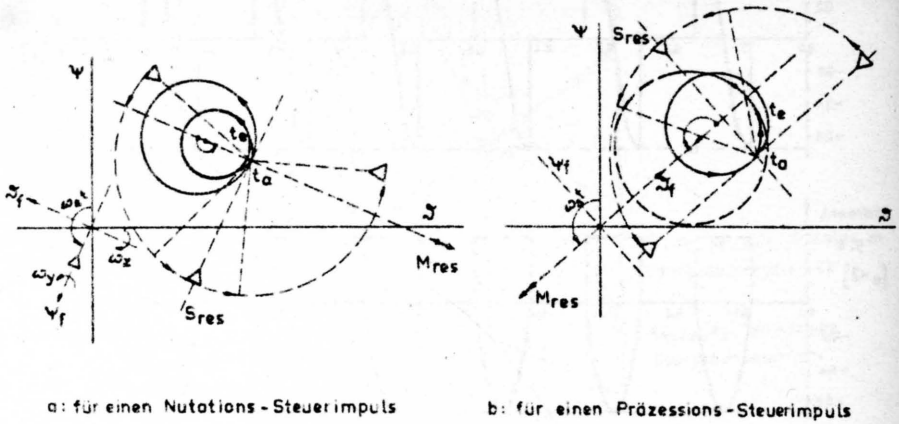


Fig. 7. Ignition position of the control jet

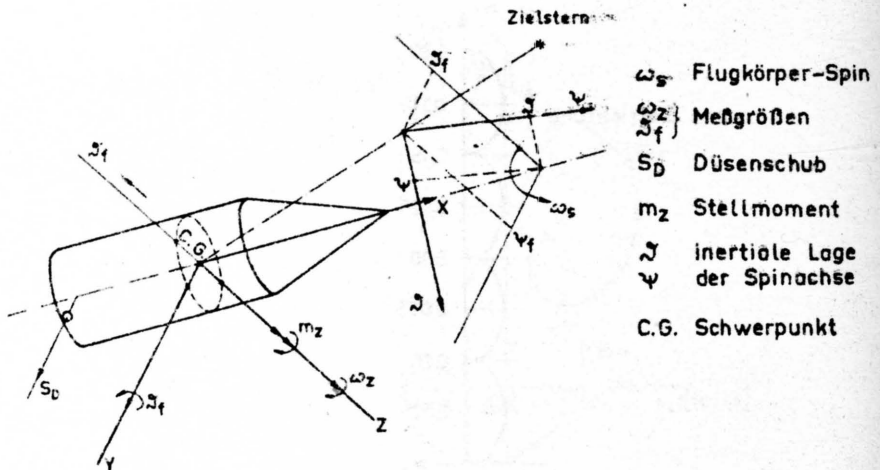


Fig. 8. Assignment of regulated quantities and process variables between the rigid and the inertial axial systems

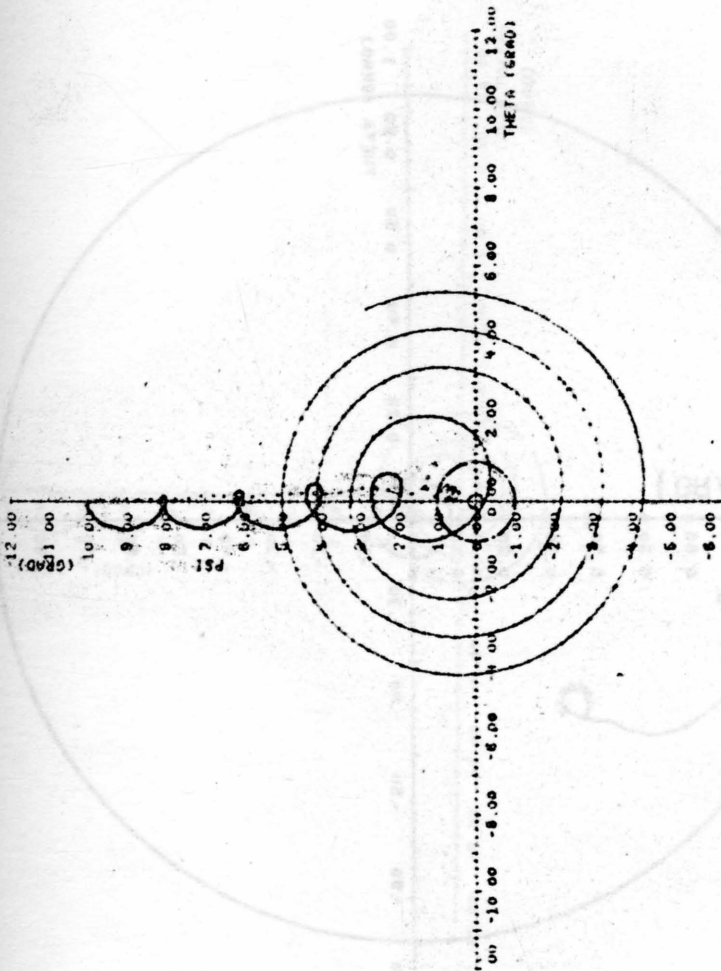


Fig. 9. Precision control without mutation attenuation

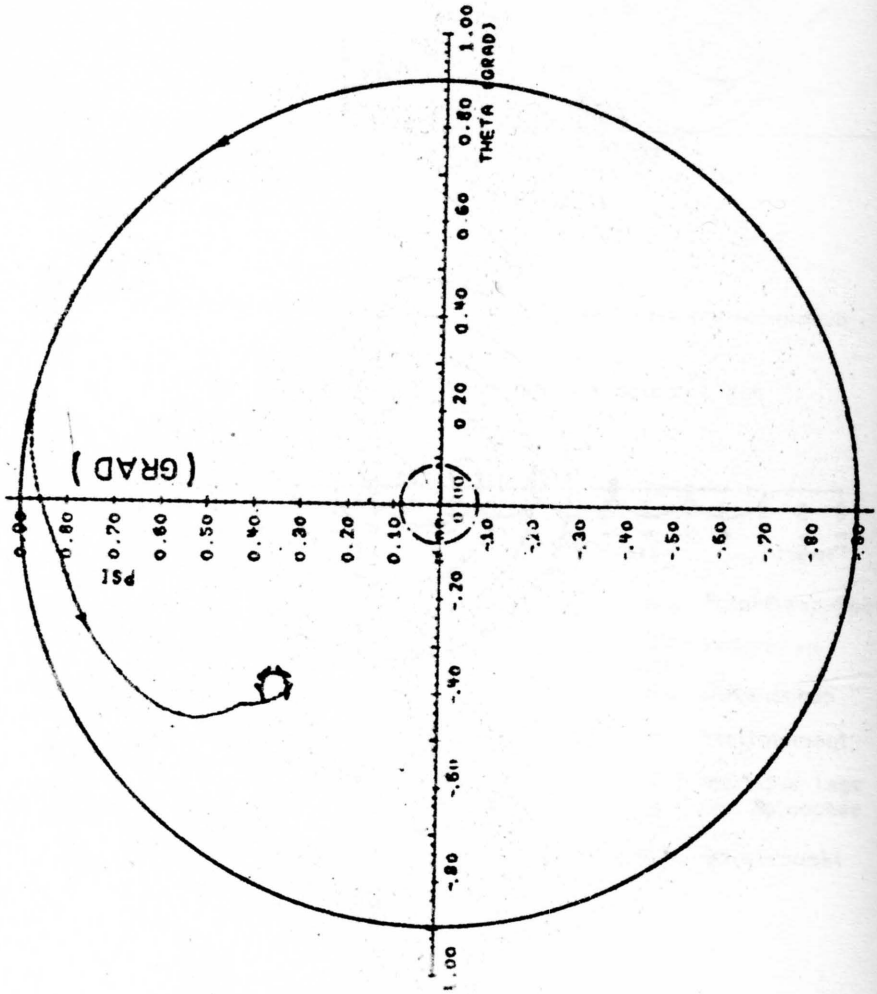


Fig. 10: Nutation attenuation

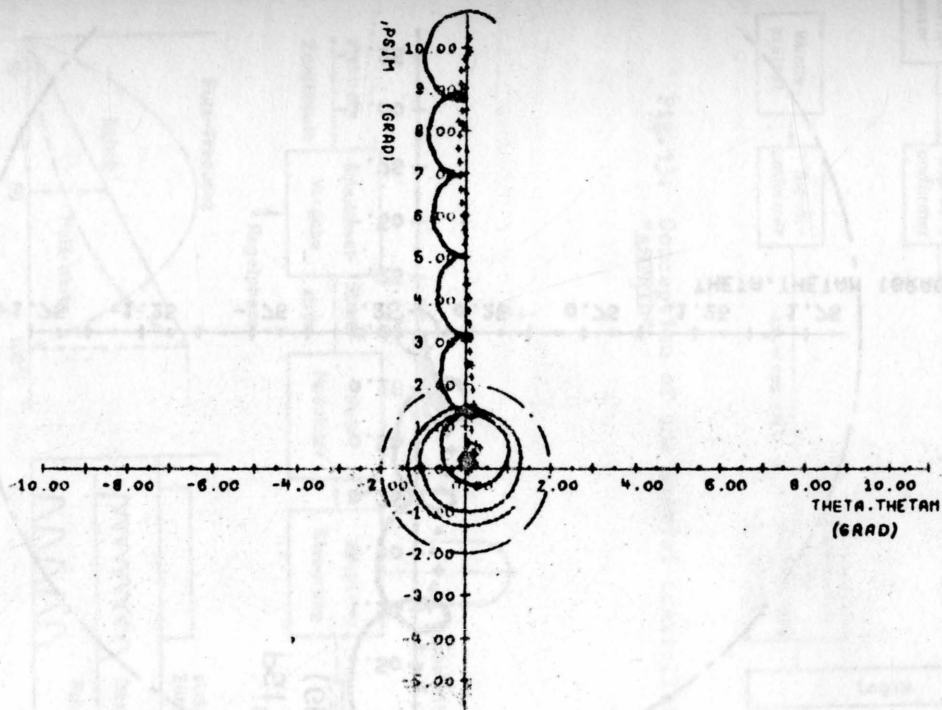


Fig.11: Precision control with selective mutation attenuation

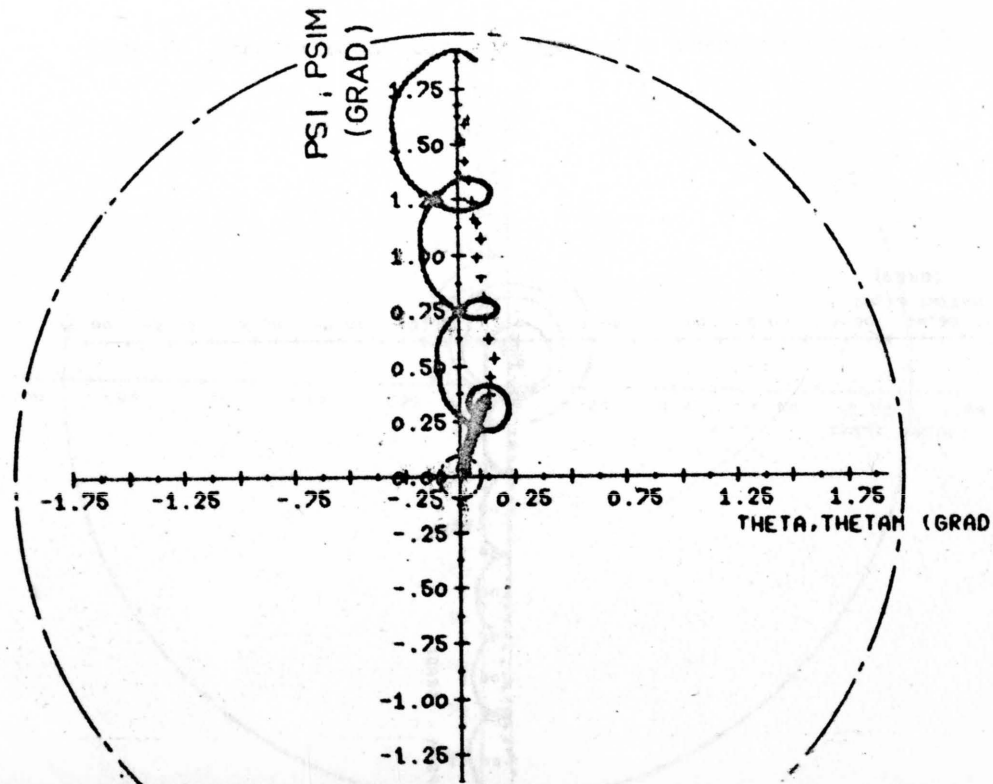


Fig.12: Realised control procedure in the fine adjustment range

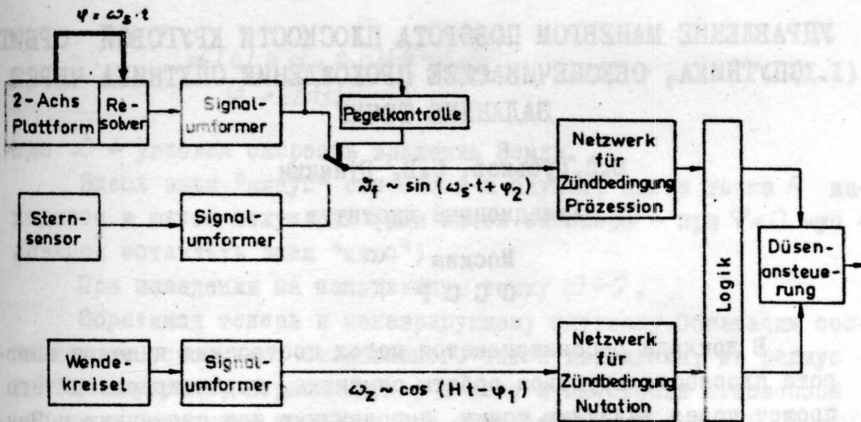


Fig.13: Conception of the biaxial controller "ASTRID"

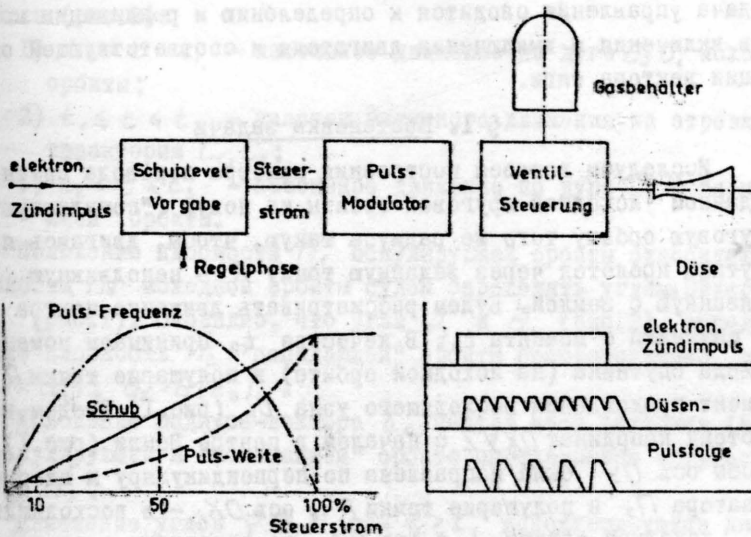


Fig.14. Electronic driving of the jet system

УПРАВЛЕНИЕ МАНЕВРОМ ПОВОРОТА ПЛОСКОСТИ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ СПУТНИКА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЕ ПРОХОЖДЕНИЕ СПУТНИКА ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ ТОЧКУ

Ю.П.Гуськов, С.В. Бунякин

Авиационный институт

Москва

С С С Р

В докладе рассматривается метод построения маневра поворота плоскости круговой орбиты спутника, гарантирующего его пролет через заданную точку, неподвижную или связанную с Землей.

Принимается, что в оборудование спутника входит двигатель с нерегулируемой тягой, гиросtabilизированная платформа, система угловой стабилизации, акселерометры и счетно-вычислительное устройство.

В рассматриваемом случае нерегулируемой тяги двигателя задача управления сводится к определению и реализации моментов включения и выключения двигателя и соответствующей ориентации вектора тяги.

§ 1. Постановка задачи

Исследуем вопросы построения маневра перевода спутника с заданной исходной круговой орбиты на новую ("падающую") круговую орбиту того же радиуса такую, чтобы, двигаясь по ней, спутник пролетел через заданную точку R - неподвижную или связанную с Землей. Будем рассматривать движение центра масс C спутника с момента t_0 . В качестве t_0 принимаем момент перехода спутника (на исходной орбите) в полушарие точки R , т.е. момент прохождения восходящего узла C_0 (рис.1). Введем, далее, систему координат $OXYZ$ с началом в центре Земли (рис.1) так, чтобы ось OY была направлена по перпендикуляру к плоскости экватора Π , в полушарие точки R , ось OX - в восходящий узел C_0 исходной орбиты, а ось OZ - по перпендикуляру к плоскости OXY .

Положение радиуса - вектора r , точки R земной поверхности задается широтой φ и долготой λ , отсчитываемой от оси OX в плоскости экватора (рис.1). Обозначая $\alpha(t_0) = \alpha_0$, имеем для λ и φ

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0 \pm \omega(t-t_0) \\ \varphi &= \text{const} \end{aligned} \quad (\text{I.I})$$

где ω - угловая скорость вращения Земли.

Здесь знак "минус" относится к случаю, когда точка R находится в южном полушарии (для точек экватора - при $\varphi=0$ -ус - ловимся оставлять знак "плюс").

При наведении на неподвижную точку $\omega=0$.

Обратимся теперь к маневрирующему спутнику. Обозначим составляющие ускорения, создаваемого тягой двигателя, на радиус-вектор спутника, перпендикуляр к нему в плоскости мгновенной орбиты и бинормаль к траектории соответственно через S , T и W . Из небесной механики известно [1], что поворот плоскости орбиты осуществляется только за счет ускорения W .

Пусть ускорение W действует на отрезке времени $[t_1, t_2]$. При этом W является заданной знакоопределенной функцией времени. Тогда траекторию наведения спутника на отрезке от t_0 до t_3 - момента пролета над точкой R - можно разделить на 3 участка (рис.2):

- 1) $t_0 \leq t < t_1$ - пассивное движение по дуге $C_0 C$, исходной орбиты;
- 2) $t_1 \leq t \leq t_2$ - участок активного движения на отрезке траектории C_1, C_2 ;
- 3) $t_2 < t \leq t_3$ - пассивное движение по дуге $C_2 R$ "попадающей" орбиты.

Положение плоскости Π , оскулирующей орбиты относительно плоскости Π_0 исходной орбиты будем определять углами Эйлера ψ и θ (рис.1). Очевидно, что углы ψ_2 и θ_2 (рис.2), определяющие плоскость Π_2 "попадающей" орбиты соответственно равны $\psi_2 = \psi(t_2)$; $\theta_2 = \theta(t_2)$.

Положение радиуса-вектора Z_c центра масс спутника (рис.1) на оскулирующей и "попадающей" орбите определяется аргументом широты U .

Изменение углов ψ, θ, U при $t > t_1$ характеризуется дифференциальными уравнениями оскулирующих элементов [1]

$$\frac{d\psi}{dt} = W \frac{z}{V p u} \sin U \csc \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = W \frac{z}{\sqrt{\rho\mu}} \cos U \quad (1.2)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\sqrt{\rho\mu}}{z^2} - W \frac{z}{\sqrt{\rho\mu}} \sin U \operatorname{ctg} \theta$$

где μ - гравитационная постоянная, z - текущий радиус, ρ - параметр оскулирующей орбиты.

Изменение параметров ρ и z определяется уравнениями [2]

$$\frac{dy}{d\tilde{\nu}} = z \quad (1.3)$$

$$\frac{dz}{d\tilde{\nu}} = -y + \frac{1}{\rho} \left(1 + n_s + \frac{z}{y} n_r \right)$$

$$\frac{d\rho}{d\tilde{\nu}} = \frac{2}{y} n_r$$

где $y = 1/z$, $n_s = S/\mu y^2$, $n_r = T/\mu y^2$ - составляющие продольной перегрузки на высоте спутника, а $\tilde{\nu}$ - угловое расстояние спутника от закрепленной на оскулирующей орбите оси - определяется уравнением

$$\frac{d\tilde{\nu}}{dt} = \frac{\sqrt{\rho\mu}}{z^2} \quad (1.4)$$

При маневре с сохранением формы исходной круговой орбиты $\rho = z = \text{const}$, и систему (1.2) можно переписать в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = \Omega n_w \sin U \operatorname{Csc} \theta \quad (1.5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega n_w \cos U$$

$$\frac{dU}{dt} = \Omega (1 - n_w \sin U \operatorname{ctg} \theta)$$

где $\Omega = \frac{\sqrt{\mu}}{r\sqrt{2}}$ - орбитальная угловая скорость ;
 $n_w = \frac{W r^2}{\mu}$ - боковая перегрузка на высоте спутника.

§ 2. Программирование маневра

Первым этапом в построении маневра является определение программы управляющего ускорения, обеспечивающей совмещение в некоторый момент t_3 радиусов-векторов точек R и C , движущихся по законам (I.1), (I.5).

а) Кинематика активного участка

По условию задачи закон изменения управляющей перегрузки при $t > t_*$ задан. Поэтому, в результате решения уравнений (I.5) при начальных условиях $\psi(t_*) = \psi_*$, $\theta(t_*) = U(t_*) = 0$, могут быть найдены зависимости

$$\theta = \theta(\tau), \quad \Delta\psi = \psi - \psi_* = \Delta\psi(\tau), \quad U = U(\tau) \quad (2.1)$$

где $\tau = t - t_*$,

в случае $n_w = \text{const}$ эти функции согласно [3] имеют вид

$$\theta = 2 \arcsin \frac{n_w \sin(0.5 \Omega \tau \sqrt{n_w^2 + 1})}{\sqrt{n_w^2 + 1}}$$

$$\Delta\psi = U = \arctg \frac{\tg(0.5 \Omega \tau \sqrt{n_w^2 + 1})}{\sqrt{n_w^2 + 1}}.$$

Мы не в состоянии определить вид решения (2.1) в общем случае задания n_w . Можно лишь отметить следующие свойства этого решения, вытекающие, при принятом предположении о знакоопределенности n_w , из структуры второго уравнения системы (I.5):

- 1) угол поворота плоскости орбиты не может превышать некоторого значения $\theta_{\max}$, зависящего от n_w ;
- 2) максимальное значение угла поворота плоскости достигается при $U = \frac{\pi}{2}$;
- 3) изменение θ во времени в пределах $0 \leq U \leq \frac{\pi}{2}$ происходит монотонно.

В силу отмеченных свойств при $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ в решении (2.1) можно перейти к независимой переменной ϑ :

$$\tau = \tau(\vartheta), \quad \Delta \Psi = \Delta \Psi(\vartheta), \quad u = u(\vartheta) \quad (2.2)$$

Для $n_w = \text{const}$ соотношения (2.2) записываются в виде

$$\tau = \frac{2}{\Omega} \left(\cos \frac{|\vartheta_{\max}|}{2} \right) \arcsin \frac{\sin \frac{|\vartheta|}{2}}{\sin \frac{|\vartheta_{\max}|}{2}}$$

$$u = \Delta \Psi = \arctg \left(\cos \frac{|\vartheta_{\max}|}{2} \operatorname{tg} \arcsin \frac{\sin \frac{|\vartheta|}{2}}{\sin \frac{|\vartheta_{\max}|}{2}} \right)$$

где $\vartheta_{\max} = 2 \arctg n_w$

В случае импульсного маневра поворота плоскости орбиты ($n_w = \infty$)

$$\tau(\vartheta) = \Delta \Psi(\vartheta) = u(\vartheta) = 0$$

б) Соотношения связи

Рассматривая движение в центральном поле тяготения, выявим условия, которым должна удовлетворять траектория наведения спутника на линию радиуса-вектора точки R .

Предположим, что в результате маневра произошло совмещение в момент t_3 радиусов-векторов $\mathcal{L}_c$ и $\mathcal{L}_R$ (рис.2). При этом будем полагать для определенности, что при $0 \leq \alpha_3 < \pi$ пролет над точкой R (относительно момента t_0) происходит на втором витке, а при $\pi \leq \alpha_3 < 2\pi$ - на втором полувитке. Тогда должны выполняться баланс времени и условия соответствующего равенства двух сферических координат точек R и C , отсчитываемых относительно плоскости Π_0 и оси OX в ней. Как следует из рис.2, эти условия приводят к 3 соотношениям

$$\alpha_3 = \alpha_0 \pm \frac{D}{\Omega} \left(S_3 - \Delta \Psi(\vartheta_2) - u(\vartheta_2) + \Omega \tau(\vartheta_2) \right)$$

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \varphi \cos i - (-1)^k \cos \varphi \sin i \sin \alpha_3}{\sin U_3} \quad (2.3)$$

$$S_3 = k\pi + \arccos \frac{\cos \varphi \cos \alpha_3}{\sin \varphi \sin i + (-1)^k \cos \varphi \cos i \sin \alpha_3} + \\ + U_3 - \arctg \frac{\operatorname{ctg} U_3}{\cos \theta_2}$$

где $S_3 = \psi_2 + U_3$, $k = \begin{cases} 2 & 0 \leq \alpha_3 < \pi \\ 1 & \pi \leq \alpha_3 < 2\pi \end{cases}$, а функции $\Delta\psi(\theta)$, $U(\theta)$, $\tau(\theta)$ определяются соотношениями (2.2).

в) Оптимизация траектории

Полученные выше три условия связывают 4 неизвестных — α_3 , S_3 , θ_2 и U_3 . Поэтому имеется свобода произвольного выбора одного из параметров. Устраним эту неопределенность требованием энергетической оптимальности маневра.

При заданной тяге двигателя энергетически оптимальным является маневр с минимальной продолжительностью активного участка. Так как изменение аргумента широты U на активном участке энергетически оптимального маневра с однократным включением двигателя всегда должно быть не больше $\pi/2$, то, в силу имеющей при этом место монотонности изменения θ , минимизация продолжительности работы двигателя эквивалентна минимизации абсолютной величины потребного для маневра угла θ_2 . Поэтому в нашем случае определение оптимальной траектории наведения сводится к задаче минимизации функции $J = |\theta_2|$ при условиях (2.3).

Наиболее просто задача эта решается путем проведения серии численных решений уравнений (2.3) для различных значений U_3 (в окрестности предполагаемого оптимума) с последующим отысканием минимума зависимости $|\theta_2| = f(U_3)$. Процесс итерационного решения уравнений (2.3) сходится довольно быстро, если в качестве первого приближения принять $\alpha_3^{(1)} = \alpha_0$.

При найденных оптимальных значениях U_3^* , θ_2^* , S_3^* параметров U_3 , θ_2 , S_3 легко определяется программа работы двигателя. Двигатель, линия действия тяги которого направляется по бинормали к траектории, должен включаться в момент t , когда угловая дальность ψ спутника от восходящего узла достигает значения

$\psi_1^* = S_3^* - U_3^* - \Delta \psi(\theta_1^*)$. Продолжительность Δt работы двигателя определяется как время поворота плоскости орбиты на угол θ_2 , т.е. $\Delta t = \tau(\theta_2^*)$

§ 3. Управление маневром

Заключительным этапом в построении маневра является реализация запрограммированной траектории наведения. Осуществляет эту функцию система управления. Рассматриваемая здесь система с обратной связью основана на измерении перегрузок n_s, n_r, n_w . Введение обратной связи диктуется необходимостью парировать действие случайных отклонений отмеченных перегрузок от их программных значений. Причиной возникновения этих отклонений являются флуктуации силы тяги двигателя и ошибки угловой стабилизации спутника.

Предполагая, что перегрузки n_s, n_r, n_w измеряются с помощью акселерометров, установленных на гиросплатформе, будем формировать управление, корректирующее программу, в функции этих измерений. При этом коррекция бокового движения формируется дискретно за счет сдвига момента отсечки двигателя относительно программного значения, а управление продольным возмущенным движением осуществляется релейно путем соответствующего отклонения вектора тяги относительно бинормали. За счет этого на направление радиуса и перпендикуляра к нему в плоскости орбиты будут проектироваться составляющие вектора тяги, действие которых подчиняется требованию сохранения формы исходной круговой орбиты.

а) Критерии качества

В результате действия возмущений спутник в расчетный момент встречи t_3 будет находиться на угловом расстоянии ρ от точки цели R . Положение радиуса-вектора спутника в этот момент может быть охарактеризовано (рис.3) углами Эйлера

$$\psi_2 = \psi_2^* + \delta \psi_2 \quad (3.1)$$

$$\theta_2 = \theta_2^* + \delta \theta_2$$

$$U_3 = U_3^* + \delta U_3$$

или углами

$$E_3 = E_3^* + \delta E_3 \quad (3.2)$$

$$\lambda_3 = \lambda_3^* + \delta \lambda_3$$

Здесь и в дальнейшем звездочкой отмечаются параметры программного движения.

Считая отклонения δE_3 и $\delta \lambda_3$ малыми, для промаха ρ из сферического треугольника C_0CR (рис.3) получаем

$$\rho^2 = \delta E_3^2 + \sin^2 \varepsilon_3^* \delta \lambda_3^2 \quad (3.3)$$

Из сферического треугольника KE_3C (рис.3) в линейном приближении определяем

$$\delta E_3 = c_1 \delta \psi_2 + c_2 \delta \theta_2 + c_3 \delta u_3 \quad (3.4)$$

$$\delta \lambda_3 = e_1 \delta \psi_2 + e_2 \delta \theta_2 + e_3 \delta u_3$$

где

$$c_1 = -\cos U_3^* \sin \psi_2^* \csc \varepsilon_3^* (1 - \operatorname{tg} U_3^* \operatorname{ctg} \psi_2^* \cos \theta_2^*)$$

$$c_2 = \csc \varepsilon_3^* \sin U_3^* \sin \psi_2^* \sin \theta_2^*$$

$$c_3 = \sin U_3^* \cos \psi_2^* \csc \varepsilon_3^* (1 - \operatorname{ctg} U_3^* \operatorname{tg} \psi_2^* \cos \theta_2^*)$$

$$e_1 = -\frac{\sin^3 \lambda_3^* \cos \varepsilon_3^* \sin \varepsilon_3^* \sec \lambda_3^*}{\sin^2 \theta_2^* \sin^2 U_3^*} c_1$$

$$e_2 = \operatorname{ctg} \theta_2^* \operatorname{tg} \lambda_3^* + \frac{c_2}{c_1} e_1$$

$$e_3 = \operatorname{ctg} U_3^* \operatorname{tg} \lambda_3^* + \frac{c_3}{c_1} e_1$$

В целях симметрии введем обозначения

$$x_1 = \psi(t) - \psi^*(t) \quad (3.5)$$

$$x_2 = \theta(t) - \theta^*(t)$$

$$x_3 = u(t) - u^*(t)$$

Тогда имеем

$$\delta \psi_2 = x_1(t_3), \quad \delta \theta_2 = x_2(t_3), \quad \delta u_3 = x_3(t_3) \quad (3.6)$$

Подставляя выражения (3.4) в (3.3), с учетом обозначений (3.6) получаем

$$\rho^2 = (c \cdot x(t_3))^2 + \sin^2 \varepsilon_3^* (e \cdot x(t_3))^2 \quad (3.7)$$

где точкой обозначено скалярное произведение вектора $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ с векторами $c = \{c_1, c_2, c_3\}$ и $e = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Рассматривая (3.7) как критерий качества бокового управления, подчиним синтез боковой коррекции цели минимизации функционала (3.7).

Построение системы стабилизации продольного движения подчиняется требованию критерия быстродействия. При выполнении этого требования устранение накопившихся отклонений параметров будет выполнено за минимально возможное время.

б) Боковая коррекция

Синтез управления, определяющего момент отсечки двигателя, производится в предположении, что искажениями формы круговой орбиты можно пренебречь.

Линеаризуем уравнения (1.5) в окрестности программного движения на отрезке $[t, t_3]$. Получаем с учетом (3.5)

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)(\xi_w + q_w) \quad (3.8)$$

где ξ_w - случайное отклонение перегрузки n_w , q_w - управляющее воздействие,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$$

Коэффициенты a_{ij} , b_k суть

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\Omega n_w^* \sin U^* \operatorname{ctg} \theta^* \operatorname{Csc} \theta^* & a_{33} &= -\Omega n_w^* \cos U^* \operatorname{ctg} \theta^* \\ a_{13} &= \Omega n_w^* \cos U^* \operatorname{Csc} \theta^* & b_1 &= \Omega \sin U^* \operatorname{Csc} \theta^* \\ a_{23} &= -\Omega n_w^* \sin U^* & b_2 &= \Omega \cos U^* \\ a_{32} &= \Omega n_w^* \sin U^* \operatorname{Csc}^2 \theta^* & b_3 &= -\Omega \sin U^* \operatorname{ctg} \theta^* \end{aligned}$$

Решение векторного уравнения (3.8) при нулевых начальных условиях в момент t , имеет вид

$$x(t) = \int_t^{t_3} N(t, \tau) b(\tau) \Delta n_w(\tau) d\tau$$

где t - момент включения двигателя; $\Delta n_w = \xi_w + q_w$, $N(t, \tau)$ - матричная функция веса уравнения (3.8).

Отсюда для момента t_3 получаем

$$x(t_3) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{N}(t_3, \tau) b(\tau) \xi_w(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_3} \mathcal{N}(t_3, \tau) b(\tau) q_w(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

где t_2 - момент отсечки двигателя.

Так как управляющее воздействие q_w создается за счет сдвига момента t_2 относительно его программного значения t_2^* , то для второго интеграла в правой части (3.9) приближенно имеем

$$\int_{t_1}^{t_3} \mathcal{N}(t_3, \tau) b(\tau) q_w(\tau) d\tau \approx \mathcal{N}(t_3, t_2^*) b(t_2^*) n_w^*(t_2^*) \delta t_2 \quad (3.10)$$

где $\delta t_2 = t_2 - t_2^*$.

Таким образом, задача синтеза корректирующего управления сводится к отысканию сдвига δt_2 , обеспечивающего минимум функционала (3.7).

Подставив (3.9) в (3.7), находим с учетом (3.10)

$$\rho^2 = (c \cdot P + c \cdot Q \delta t_2)^2 + \sin^2 \varepsilon_3^* (e \cdot P + e \cdot Q \delta t_2)^2 \quad (3.11)$$

где

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{N}(t_3, \tau) b(\tau) \Delta n_w(\tau) d\tau$$

$$Q = \mathcal{N}(t_3, t_2^*) b(t_2^*) n_w^*(t_2^*)$$

Значение сдвига δt_2 , доставляющее минимум критерию (3.11), равно

$$\delta t_2^0 = - \frac{[(c \cdot Q) c + \sin^2 \varepsilon_3^* (e \cdot Q) e] \cdot P}{(c \cdot Q)^2 + \sin^2 \varepsilon_3^* (e \cdot Q)^2}$$

Отсюда получаем, что отсечка двигателя должна происходить в момент t_2 выполнения условия

$$t_2 = t_2^* - \int_{t_1}^{t_2} \Phi(\tau) \Delta n_w(\tau) d\tau$$

где

$$\Phi(\tau) = \frac{[(c \cdot Q) c + \sin^2 \varepsilon_3^* (e \cdot Q) e] \cdot \mathcal{N}(t_3, \tau) b(\tau)}{(c \cdot Q)^2 + \sin^2 \varepsilon_3^* (e \cdot Q)^2}$$

в) Управление продольным движением

Для целей синтеза релейного управления линеаризуем систему (1.3) в окрестности круговой орбиты радиуса r^* . Вводя обозначения $\eta_1 = \delta y$, $\eta_2 = \delta z$, $\eta_4 = \delta p$, получаем в пренебрежении членом $\delta p / r^{*2}$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \eta_2$$

$$\frac{d\eta_2}{d\tau} = -\eta_1 + \frac{n_s}{r^*} \quad (3.12)$$

$$\frac{d\eta_3}{d\tau} = \eta_4$$

$$\frac{d\eta_4}{d\tau} = 2r^* n_r$$

$$n_s = \xi_s + q_s$$

$$n_r = \xi_r + q_r$$

где ξ_s и ξ_r - случайные составляющие перегрузок, q_s и q_r - управляющие воздействия.

Как следует из движения (3.12), стабилизация высоты и скорости полета осуществляются независимо - первая с помощью управления q_s , вторая с помощью q_r .

При синтезе управления q_s и q_r будем рассматривать только свободное движение, не принимая во внимание ξ_s и ξ_r . Последние здесь рассматриваются только как источники возникновения отклонений η_1 , η_2 , η_3 , η_4 , цели быстрой ликвидации которых и подчиняется действие q_s и q_r .

Используя результаты, полученные в [4], и вводя зоны нечувствительности ε и δ , определяем законы формирования управлений q_s и q_r в виде

$$q_s = \begin{cases} -q_s^{\max} & \eta_2 \gg -(\operatorname{sign} \eta_1) \sqrt{a^2 - (\eta_1 - a \operatorname{sign} \eta_1)^2} \\ 0 & \eta_1^2 + \eta_2^2 \leq \varepsilon^2 \\ q_s^{\max} & \eta_2 < -(\operatorname{sign} \eta_1) \sqrt{a^2 - (\eta_1 - a \operatorname{sign} \eta_1)^2} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$q_r = \begin{cases} -q_r^{\max} & \eta_4 \gg -(\operatorname{sign} \eta_3) \sqrt{2b\eta_3 \operatorname{sign} \eta_3} \\ 0 & \eta_3^2 + \eta_4^2 \leq \delta^2 \\ q_r^{\max} & \eta_4 < -(\operatorname{sign} \eta_3) \sqrt{2b\eta_3 \operatorname{sign} \eta_3} \end{cases} \quad (3.14)$$

где $q_s^{\max}$ и $q_r^{\max}$ — модули максимальных значений управлений q_s и q_r ; $a = \frac{q_s^{\max}}{z^*}$, $b = 2z^* q_r^{\max}$.

Заметим, что закон (3.13) записан в предположении, что $|\eta_1| \leq 2a$, или $|\delta z/2| \leq q_s^{\max}$. Управления (3.13), (3.14) обеспечивают отклонения с точностью до ε и δ .

Выражение отклонений η_1 , η_2 , η_3 , η_4 через перегрузки n_s и n_r может быть получено-аналогично боковому движению — путем решения уравнений (3.12) при нулевых начальных условиях. При этом переход от $\bar{v}$ к t может быть осуществлен с помощью приближенного соотношения $d\bar{v} \approx \Omega dt$, получающегося из (1.4) при $P = z^*$.

Л и т е р а т у р а

1. Дубошин Г.И. Небесная механика. Основные задачи и методы. Физматгиз, 1963.
2. Копнин Ю.М. К задаче о повороте плоскости орбиты спутника. Космические исследования, 1965, вып. 4.
3. Гуськов Ю.П. Метод управления поворотом плоскости круговой орбиты спутника ПММ, 1963, вып. 3.
4. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов.
и другие Физматгиз, 1961.

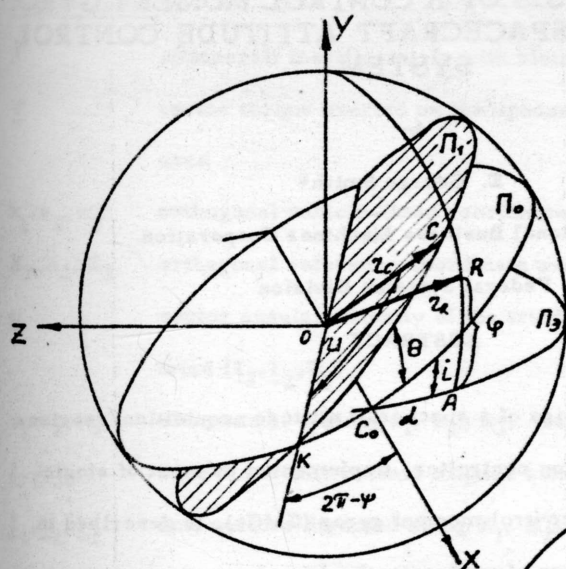


Рис. 1

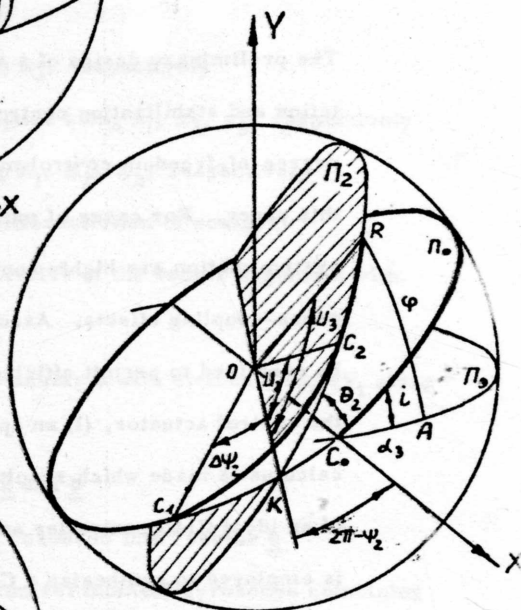


Рис. 2

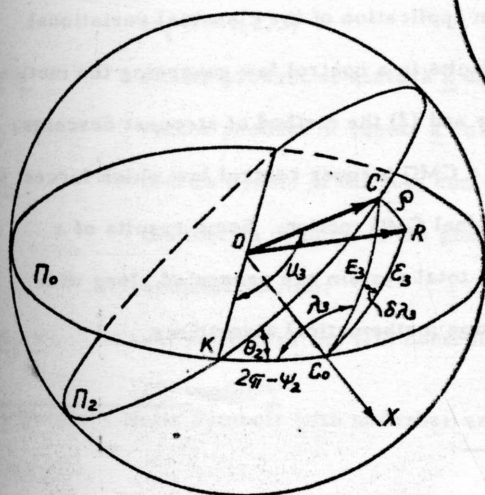


Рис. 3

ON THE SYNTHESIS OF A CONTROL MOMENT GYRO IMPLEMENTED SPACECRAFT ATTITUDE CONTROL SYSTEM

by

E. George Smith*

International Business Machines Corporation

Federal Systems Division

ABSTRACT

The preliminary design of a spacecraft attitude acquisition/reorientation and stabilization controller, implemented by a set of single-degree-of-freedom control moment gyros (CMGs), is described in this paper. For cases of motion-in-the-large, equations governing system motion are highly nonlinear as evidenced by the serious cross-coupling effects. Assuming that a control algorithm should be contrived to permit efficient use of the inherent nonlinearity of the control actuator, (1) an application of the classical variational calculus is made which results in a control law governing the motion of an ideal CMG controller and (2) the method of steepest descents is employed to synthesize a CMG torquer control law which forces a close realization of the ideal CMG motion. Some results of a computer simulation of the total system are presented along with a derivation of the simulation mathematical algorithms.

*Advisory Engineer

Nomenclature*

J	spacecraft inertia matrix with elements J_j^i ($i, j = 1, 2, 3$)
$\underline{T}$	vector torque exerted on the spacecraft, referred to body-fixed axes
x_1, x_2, x_3	orthogonal vehicle-fixed coordinate axes
X_1, X_2, X_3	orthogonal reference coordinate axes
$\underline{\omega}$	vector angular velocity of the triad ($\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}$) relative to the triad ($\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$)
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	elements of $\underline{\omega}$ along x_1, x_2, x_3 , respectively
$\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}$	body-fixed unit vectors aligned along x_1, x_2, x_3 , respectively
$\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$	unit vectors directed along X_1, X_2, X_3 , respectively
($\dot{}$)	overdot denotes the time differentiation of scalars
$d(\)/dt$	denotes the total time derivative of the vector argument with respect to inertial space
$\partial\phi/\partial V$	denotes the gradient of the scalar ϕ with elements $\partial\phi/\partial V_i$ along $+x_i$ ($i = 1, 2, 3$)
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	scalar product of vectors $\underline{a}$ and $\underline{b}$
$\underline{a} \times \underline{b}$	vector product of vector $\underline{a}$ "crossed into" vector $\underline{b}$
$\underline{K}_i$	inertia dyadic of the i -th control moment gyroscope combining the inertia dyadics of the gimbal, torquer assembly and symmetric rotor
$\underline{K}_i \cdot \underline{v}$	dot product of the i -th control moment gyro inertia dyadic with the vector $\underline{v}$

* Printers Note: Symbols with underbar are boldface characters.

$\ \underline{v}\ _A^2$	denotes the quadratic form $\underline{v}' A \underline{v} = \sum A_j^i v_i v_j$ ($i, j = 1, 2, 3$)
$ s $	absolute value of the scalar, s
$\ \underline{v}\ $	Euclidean norm of the vector, $\underline{v}$
A'	denotes the transpose of the matrix A
$\ B\ $	norm of the matrix B
α_i	gimbal angle of the i -th control moment gyroscope
$\underline{0}$	the null vector
$\underline{\omega}_c$	commanded spacecraft angular velocity
T_{m_i}	i -th control moment gyro gimbal control torque
d_i	i -th gimbal damping coefficient

1. Introduction

It is well known that, at best, reaction control jets provide a course attitude control in the vicinity of a desired spacecraft terminal attitude state resulting in what is referred to as the limit cycling phenomena. With regards to attitude acquisition, reorientation and terminal attitude stabilization of future manned and unmanned spacecraft, it appears that stringent attitude maneuver and attitude stabilization requirements will necessitate the implementation of more sophisticated controllers [1, 2]*. State-of-the-art developments indicate the application of a system of reaction wheels and/or control moment gyroscopes (CMGs) in the role of primary attitude controller actuators or as a backup system for a primary attitude control mode employing a set of reaction control jets. CMGs and reaction wheel actuators share a common advantage, unlike mass expulsion devices used to produce control torques, in that the momentum exchange systems may possibly utilize solar energy for a more economical attitude control operation for some missions.

The first momentum exchange type attitude control system employed the momentum reaction wheel. The high level of development of techniques for analyzing the behavior of reaction wheel attitude controllers, in particular for the case of system motion-in-the-small, has lead to a consideration of applying CMGs for spacecraft attitude control [3-7]. From a control systems synthesis point of view, the application of CMGs as actuators in future spacecraft attitude controllers appears unattractive at first sight owing to the relative complexity of the mathematical equations governing the motion of the vehicle rotation and the CMG controller dynamics. However,

*Numbers in square brackets refer to references listed at the end of the paper.

the increased complexity of the CMG equations of motion is overshadowed by the many advantages of, for example, considerably lower electrical power consumption and input torquing requirements for attitude maneuvering and greater pointing accuracy—of a target surveillance sensor, for instance—due to faster dynamic response and finer granularity of control obtained by the CMG implemented system.

Concerning the problem of designing future attitude controllers which employ highly nonlinear control actuators such as control moment gyros, it appears that current designs are intended for very limited spacecraft attitude maneuvering as characterized by single-axis maneuvers or simultaneous three-axis maneuvers with very small vehicle angular rates. For motion-in-the-small operation, the controller designer may apply frequency domain techniques to construct a suitable controller. However, for motion-in-the-large operation of the combined vehicle-CMG controller system, such techniques are expected to be of limited use.

The paper presents an application of some modern control theory techniques to obtain a feasible solution to the control moment gyro implemented attitude controller synthesis problem. The method employed provides (1) a rational basis for the determination of CMG gimbal rate command signals and also provides (2) a practical means of designing a CMG torquer algorithm which serves to force the actual CMG gimbal rates to track the commanded gimbal rates. It is significant to note that the torquer control law is contrived such that efficient use of the inherent nonlinearity of the control actuator is attained.

II. Equations of Motion

A simplified set of equations shall be assumed appropriate in the present effort to explore and establish the utilization and application of a set of control moment gyros for spacecraft attitude acquisition, reorientation, and stabilization. The rotational behavior of the spacecraft is assumed to be governed by the vector differential equation

$$\dot{\underline{\omega}} = J^{-1}[(J\underline{\omega}) \times \underline{\omega} + \underline{T}] \quad (1)$$

where $J\underline{\omega}$ denotes the angular momentum, the superscript -1 denotes the matrix inversion operation, and $\underline{T}$ denotes the sum of all torques accelerating spacecraft axes with respect to inertial space.

Before setting forth the equations governing the motion of the CMGs, it will be worthwhile to consider a very useful notation which shall supplant the classical x, y, z nomenclature and lead to a considerable savings in labor. With reference to Fig. 1a, let $\underline{1}_i$ denote a unit vector aligned along x_i ($i = 1, 2, 3$). Further, with reference to Figs. 1b and 1c, let $\underline{2}_i$ denote a unit vector directed along the i -th CMG rotor spin axis and let $\underline{3}_i \equiv \underline{1}_i \times \underline{2}_i$ complete the triad. Note that, for example, $\underline{2}_1$ and $\underline{3}_1$ are located relative to the vehicle-fixed triad $(\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}) \equiv (\underline{1}_1, \underline{1}_2, \underline{1}_3)$ according to the relations $\underline{2}_1 = \cos \alpha_1 \underline{1}_2 + \sin \alpha_1 \underline{1}_3$ and $\underline{3}_1 = -\sin \alpha_1 \underline{1}_2 + \cos \alpha_1 \underline{1}_3$, respectively. Thus, one establishes the relations

$$\begin{bmatrix} \underline{1}_1 \\ \underline{2}_1 \\ \underline{3}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{bmatrix}, \quad (2a)$$

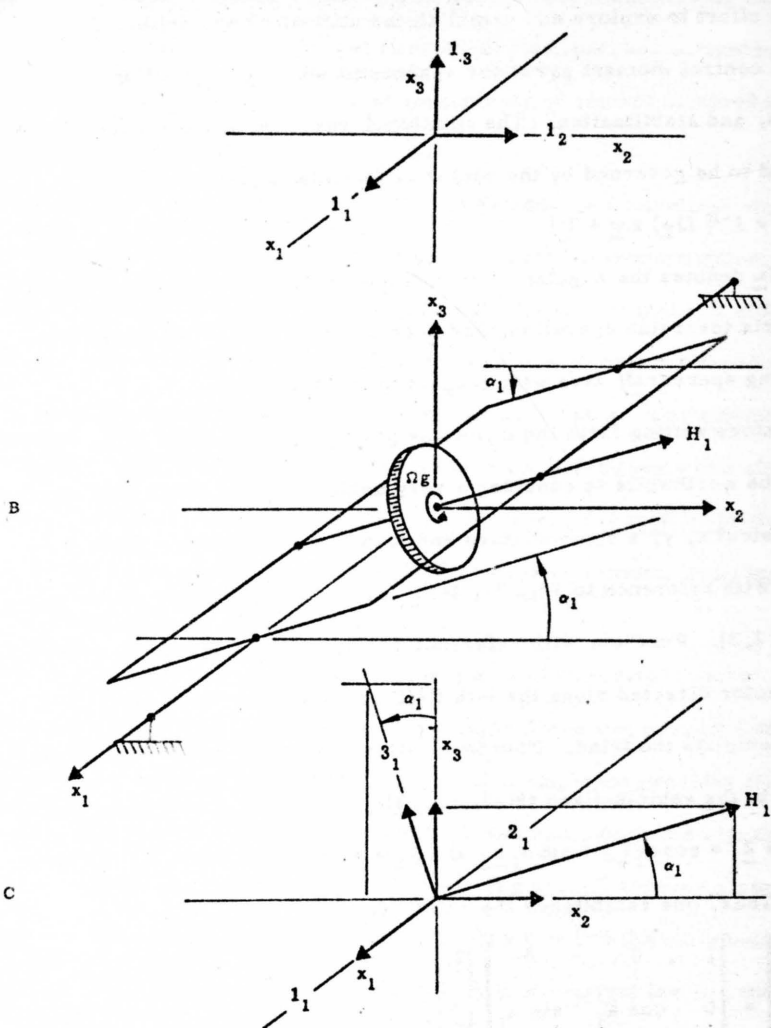


Figure 1. Definition of CMG Axes Relative to Vehicle-Fixed Reference Axes

$$\begin{bmatrix} \underline{1}_2 \\ \underline{2}_2 \\ \underline{3}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ 0 & -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{1} \end{bmatrix}, \quad (2b)$$

and

$$\begin{bmatrix} \underline{1}_3 \\ \underline{2}_3 \\ \underline{3}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 \\ 0 & -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{3} \\ \underline{1} \\ \underline{2} \end{bmatrix}. \quad (2c)$$

Note that the above definition of unit vectors fixed in the CMG assemblies implies that the particular CMG implemented attitude controller is comprised of three control moment gyros whose gimbal axes are mutually orthogonal. Thus, the index i referring to the i -th CMG shall be understood to range over the integers 1, 2, 3 in what follows although this restriction shall be relaxed in Section IV.

Now define the inertia dyadic for the i -th CMG as

$$\underline{K}_i \equiv \sum K_{ij} \underline{j}_i \underline{j}_i \quad (3)$$

where, for convenience, the CMG products of inertia are assumed to be zero-valued; K_{ij} is the moment of inertia of the i -th CMG about $\underline{j}_i$; and where the summation is with respect to the index j over the integers 1, 2, 3 ($i = 1, 2, 3$). The CMG angular momentum vector, denoted $\underline{M}_i$, is given by

$$\underline{M}_i \equiv \underline{K}_i \cdot (\underline{\omega} + \dot{\alpha}_i \underline{1}_i) + H_i \underline{2}_i \quad (4)$$

where H_i denotes the angular momentum of the CMG rotor, assumed constant. In terms of the foregoing nomenclature, one can write the equation

$$\frac{d\underline{M}_i}{dt} = \underline{T}_i \quad (5)$$

where $\underline{T}_i$ denotes the negative of the torque delivered to the vehicle by the i -th CMG and $d(\cdot)/dt \equiv \partial(\cdot)/\partial t + (\underline{\omega} + \dot{\alpha}_i \underline{1}_i) \times (\cdot)$. Thus, substituting

Eq. (4) into Eq. (5) leads to

$$\begin{aligned} \underline{T}_i = & [K_{i1}(\ddot{\alpha}_i + \dot{\omega} \cdot \underline{1}_i) + (K_{i3} - K_{i2})(\omega \cdot \underline{2}_i)(\omega \cdot \underline{3}_i) - H_i(\omega \cdot \underline{3}_i)] \underline{1}_i \\ & + [K_{i2}(\dot{\omega} \cdot \underline{2}_i + \dot{\alpha}_i \omega \cdot \underline{3}_i) + (K_{i1} - K_{i3})(\dot{\alpha}_i + \omega \cdot \underline{1}_i)(\omega \cdot \underline{3}_i)] \underline{2}_i \\ & + [K_{i3}(\dot{\omega} \cdot \underline{3}_i - \dot{\alpha}_i \omega \cdot \underline{2}_i) \\ & + (K_{i2} - K_{i1})(\omega \cdot \underline{2}_i)(\dot{\alpha}_i + \omega \cdot \underline{1}_i) + H_i(\dot{\alpha}_i + \omega \cdot \underline{1}_i)] \underline{3}_i \quad (6) \end{aligned}$$

for the i -th CMG reaction torque. The reaction torque of an "ideal" CMG, to be employed in the following section, is readily obtained by assuming (1) the terms in Eq. (6) involving gimbal inertias to be negligible and (2) that the CMG rotor is symmetric with respect to $\underline{2}_i$. Then, Eq. (6) becomes simply

$$\underline{T}_i \approx (\omega + \dot{\alpha}_i \underline{1}_i) \times H_i \underline{2}_i. \quad (7)$$

The synthesis of optimal gimbal rate commands, denoted $\dot{\alpha}_i^*$ ($i = 1, 2, 3$), is considered in the next section. Eqs. (1) and (7) are employed as differential constraints in a variational calculus formulation of the synthesis problem. Eqs. (1) and (6), along with the coordinate transformation relations given by Eqs. (2), the equations describing CMG gimbal motion (Eq. 19), and the equations describing the CMG gimbal torquer algorithm (Eqs. 24), have been programmed in Fortran for an IBM System 360/44 computer. Results of the simulation are discussed in Section V. The algorithms employed to generate the spacecraft commanded angular velocity, denoted $\underline{\omega}_c$, are given in the Appendix.

III. Generation of CMG Gimbal Rate Commands and Control Torques

A. CMG Gimbal Rate Command Signal Synthesis

The classical calculus of variations [7] shall be exploited to synthesize optimal "ideal" CMG gimbal rate command signals, denoted $\dot{\alpha}_i^*(t)$. Let the performance criterion functional to be minimized be of the form

$$S \equiv \frac{1}{2} \|\underline{\omega}(T)\|_J^2 + \int_{t_0}^T F[\underline{\omega}(t), \underline{\omega}_c(t)] dt \quad (8)$$

where $F(\underline{\omega}, \underline{\omega}_c)$ is a non-negative scalar function of the indicated arguments, t_0 denotes the initial time, and T denotes the final time. A particular form of F shall be chosen later which permits an analytic solution of the inverse control synthesis problem [8] to be obtained.

By adjoining the constraint relations, Eqs. (1) and (7), through the use of the vector Lagrange multiplier $\underline{\lambda}$, one constructs the function

$$G \equiv F + \underline{\lambda} \cdot \{ \dot{\underline{\omega}} + J^{-1} [\underline{\omega} \times (J\underline{\omega}) + \Sigma H_i (\underline{\omega} + \dot{\alpha}_i \underline{1}_i) \times \underline{z}_i] \} \quad (9)$$

where it is noted that, within the approximations made leading from Eq. (6) to Eq. (7), $G \equiv F$. Now, according to the variational calculus, the functional S is extremized if the Euler-Lagrange equation

$$\dot{\underline{\lambda}} = \partial G / \partial \underline{\omega}, \quad \underline{\lambda}(T) = -\partial S / \partial \underline{\omega}(T) \quad (10)$$

is satisfied for all $t \in [t_0, T]$. Assuming a priori that $\dot{\alpha}_i^*$ is a function of $\underline{\omega}$, the substitution of Eq. (9) into (10) leads to

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\lambda}} = & \partial F / \partial \underline{\omega} + J[(J^{-1}\underline{\lambda}) \times \underline{\omega}] + (J\underline{\omega}) \times (J^{-1}\underline{\lambda}) \\ & + \Sigma H_i [\underline{z}_i \times (J^{-1}\underline{\lambda}) + \underline{z}_i \cdot (J^{-1}\underline{\lambda}) \partial \dot{\alpha}_i / \partial \underline{\omega}], \quad \underline{\lambda}(T) = -J\underline{\omega}(T). \end{aligned} \quad (11)$$

A study of Eq. (11) indicates that a general solution of the CMG gimbal rate synthesis problem shall be quite difficult regardless of the choice of the integrand of the performance criterion functional. It appears reasonable that a simple solution of the synthesis problem should be sought. One such

solution is obtained as follows. Assume that the solution

$$\underline{\lambda}(t) = -J\underline{\omega}(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (12)$$

and define

$$F \equiv \frac{1}{2} \sum [A_{i1}(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega})^2 + 2A_{i2}(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega})(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}_c) + A_{i3}(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}_c)^2], \quad (13)$$

a quadratic in the variables $\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}$ and $\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}_c$, where the constants A_{ij} ($j = 1, 2, 3$) are chosen such that $A_{i1} > 0$ and $A_{i1}A_{i3} - A_{i2}^2 > 0$ and where the summation is over the index i ($i = 1, 2, 3$). Substitution of Eqs. (12) and (13) into Eq. (11) yields

$$\begin{aligned} -J\dot{\underline{\omega}} = & \sum [A_{i1}(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}) + A_{i2}(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}_c)] \underline{3}_i - (J\underline{\omega}) \times \underline{\omega} \\ & - \sum H_i [2\underline{1} \times \underline{\omega} + (\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}) \partial \underline{a}_i / \partial \underline{\omega}]. \end{aligned} \quad (14)$$

Upon combining Eqs. (1) and (7), one may write

$$J\dot{\underline{\omega}} = (J\underline{\omega}) \times \underline{\omega} + \sum H_i [2\underline{1} \times \underline{\omega} - \dot{\underline{a}}_i \underline{3}_i]. \quad (15)$$

Therefore, adding Eqs. (14) and (15) leads to the partial differential equation

$$\begin{aligned} \sum [A_{i1}(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}) + A_{i2}(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}_c)] \underline{3}_i \\ - \sum H_i [(\underline{3}_i \cdot \underline{\omega}) \partial \underline{a}_i / \partial \underline{\omega} + \dot{\underline{a}}_i \underline{3}_i] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

which must be satisfied by the CMG commanded rates $\dot{\underline{a}}_i^*$.

A solution of Eq. (16) which permits the use of the inherent nonlinearity of the CMG actuator is given as

$$\dot{\underline{a}}_i^* = H_i \underline{3}_i \cdot (\underline{\omega} - \underline{\omega}_c) / d_i \quad (17)$$

where $A_{i1} \equiv 2H_i^2/d_i$, $A_{i2} \equiv -H_i^2/d_i$ and, for definiteness, $A_{i3} \equiv \frac{1}{2}A_{i1}$ ($i = 1, 2, 3$). A slight extension of the above results is obtained by replacing F by

$$F = \frac{1}{2} \sum [H_i \underline{3}_i \cdot (\underline{\omega} - \underline{\omega}_c)]^2 / d_i + \frac{1}{2} \sum [H_i \underline{3}_i \cdot \underline{\omega}]^2 / d_i + \frac{1}{2} k \|\underline{\omega}\|_J^2,$$

where k is a non-negative constant, and by assuming the solution

$$\underline{\lambda}(t) = p(t)J\underline{\omega}(t), \quad p(T) = -1.$$

It can be verified that, for this case, the optimal CMG gimbal rate commands are given as

$$\dot{\alpha}_i^* = H_i \underline{3}_i \cdot (\underline{\omega}_c - \underline{\omega}) / d_i p(t), \quad p(t) = -1 - k(T - t). \quad (18)$$

Before leaving this section, one must be concerned with the so-called CMG saturation problem. Recall that, upon combining Eqs. (1) and (7), one may write

$$\dot{\underline{\omega}} = J^{-1}[(J\underline{\omega}) \times \underline{\omega} + \Sigma H_i \underline{2}_i \times (\underline{\omega} + \dot{\alpha}_i \underline{1}_i)]$$

which is the equation that closely describes the motion of the spacecraft.

There arises the possibility wherein a realization of the above derived control law is not sufficient to guarantee the controllability of the spacecraft attitude and attitude rate. This is most conveniently demonstrated by considering the rank of the matrix W whose i, j -th element is $W_j^i = \underline{1}_i \cdot \underline{3}_j$ where $\underline{1}_i$ denotes a unit vector aligned along the vehicle x_i axis and $\underline{3}_j$ is the unit vector aligned along the output axis of the j -th CMG ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots$). If the spacecraft attitude and attitude rate is to be completely controlled, W must have maximal rank equal to 3.

Certain combinations of gimbal angles of CMG controllers exist such that the rank of W is less than maximal. For example, if the CMG controller structure as defined in Section II is considered, then

$$W = \begin{bmatrix} 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \\ -\sin \alpha_1 & 0 & \cos \alpha_3 \\ \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Thus, the vehicle is not completely controllable if $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 = 0$.

B. CMG Gimbal Control Torque Algorithms

Use shall now be made of the results obtained above. Recall that $\underline{T}_i$, given by Eq. (6), is the negative of the torque exerted on the vehicle by the i -th control moment gyroscope. Note that $\underline{T}_i \cdot \underline{1}_i = T_{m_i} - d_i \dot{\underline{a}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) is the equation describing the motion of the i -th CMG relative to vehicle-fixed axes [3-5] where T_{m_i} and d_i respectively denote the i -th gimbal control torque and the damping coefficient. Expanding the equation, one obtains

$$K_{i1}(\ddot{\underline{a}}_i + \dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{1}_i) = [H_i + (K_{i2} - K_{i3})(\dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{2}_i)](\dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{3}_i) - d_i \dot{\underline{a}}_i + T_{m_i} \quad (19)$$

as the i -th CMG gimbal equation of motion.

The method of steepest descents [7] shall be applied to synthesize the control torque, T_{m_i} . Consider now the minimization of the function

$$\psi \equiv \frac{1}{2}(\dot{\underline{a}}_i^* - \dot{\underline{a}}_i)^2. \quad (20)$$

The usual device employed is that of setting the time rate of change of $(\dot{\underline{a}}_i + \dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{1}_i)$ proportional to the gradient of ψ in the direction $-(\dot{\underline{a}}_i + \dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{1}_i)$. Defining $k_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) as proportionality scalars, one may write

$$\ddot{\underline{a}}_i + \dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{1}_i = -k_i \partial \psi / \partial (\dot{\underline{a}}_i + \dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{1}_i) = k_i(\dot{\underline{a}}_i^* - \dot{\underline{a}}_i). \quad (21)$$

A comparison of Eqs. (19) and (21), in view of Eq. (17), reveals the following. For simplicity, assume that $k_i = d_i/K_{i1}$ and also assume that $|(K_{i2} - K_{i3})(\dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{2}_i)|$ is negligible with respect to the CMG rotor angular momentum modulus, H_i . One deduces that the CMG control torque is

$$T_{m_i} = -H_i \dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{3}_i. \quad (22)$$

Thus, Eq. (22) is the control algorithm sought for the i -th CMG gimbal torquer designed to force the CMG gimbal to track the angular velocity of the "ideal" actuator, $\dot{\underline{a}}_i^*$. Note that, for the case where the commanded gimbal rate does not change too rapidly, the tracking is expected to be very satisfactory when $H_i/d_i \gg 1$ and $d_i/K_{i1} \gg 1$. Note also that, since

the constants H_1 and d_1 and $\max \|\underline{\omega}_c(t)\|$ are design parameters, it follows that

$$|T_{m_1}| \leq T_1 \equiv \max |T_{m_1}| = H_1 \max \|\underline{\omega}_c\|. \quad (23)$$

The speed of the gimbal rate tracking response may be increased if the gimbal tracker operates in a near "bang-bang" fashion. This observation leads to a modification of the CMG torquer control algorithm, given by Eq. (22), as follows:

$$T_{m_1} = -H_1 \underline{3}_1 \cdot \underline{\omega}_c (1 - |\text{sat}(\dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_1)|) + T_1 \text{sat}(\dot{\alpha}_1^* - \dot{\alpha}_1) \quad (24)$$

where $\text{sat} \xi_1 = \text{sign} \xi_1$ if $|\xi_1| \geq \mu_1 = \text{constant} > 0$ and $\text{sat} \xi_1 = \xi_1 / \mu_1$ otherwise.

Upon substituting Eq. (24) into Eq. (19), one obtains the simplified equations approximating the motion of the CMG gimbals:

$$\ddot{\beta}_1 = k_1 (\dot{\beta}_1^* - \dot{\beta}_1) + \eta_1 \text{sat}(\dot{\beta}_1^* - \dot{\beta}_1) \quad (25)$$

where

$$\dot{\beta}_1 \equiv \dot{\alpha}_1 + \underline{\omega} \cdot \underline{1}_1, \quad (26a)$$

$$\dot{\beta}_1^* \equiv \dot{\alpha}_1^* + \underline{\omega} \cdot \underline{1}_1, \quad (26b)$$

and

$$\eta_1 \equiv T_1 + H_1 \underline{3}_1 \cdot \underline{\omega}_c \text{sign}(\dot{\beta}_1^* - \dot{\beta}_1) \geq 0. \quad (26c)$$

IV. Generalization of the Results

The synthesis of the spacecraft attitude acquisition/reorientation/stabilization controller was based upon an a priori configuration of control moment gyros; namely, three control moment gyroscopes are arranged such that each CMG gimbal axis is orthogonal to the gimbal axes of the other two CMGs. At the present time, the author knows of no well-defined procedure existing in which an "optimum" CMG configuration is chosen; it appears that details of the particular controller application must be supplied in advance of the controller synthesis efforts if "optimal" configurations are to be found.

The generalization of the above synthesis results is motivated by the fact that particular mission details are not assumed given beforehand. Also, the number of CMGs to be employed in implementing the controller is assumed to be specified only after several candidate control moment gyro controllers are evaluated based upon the mission requirements, system constraints and so on. In addition, the reference position for each of the CMG axes is assumed in the following to be a parameter of choice in the construction of the controller candidates for a particular application. Thus, let the i -th CMG gimbal axis, $\underline{1}_i$, spin axis, $\underline{2}_i$, and $\underline{3}_i = \underline{1}_i \times \underline{2}_i$ be related to a vehicle-fixed triad of unit vectors, $(\underline{1}, \underline{2}, \underline{3})$, according to

$$\begin{bmatrix} \underline{1}_i \\ \underline{2}_i \\ \underline{3}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i^{11} & D_i^{12} & D_i^{13} \\ D_i^{21} & D_i^{22} & D_i^{23} \\ D_i^{31} & D_i^{32} & D_i^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \end{bmatrix} \quad (27)$$

where D_i is a direction cosine matrix with constant elements D_i^{jk} ($j, k = 1, 2, 3$).

Since $\underline{\omega} = \sum \omega_k \underline{k}$ and $\underline{\omega}_c = \sum \omega_{ck} \underline{k}$, $\underline{\epsilon} = \underline{\omega}_c - \underline{\omega}$ and $\underline{\omega}_c(t)$ appearing in Eqs. (15)-(17) and (22) may be replaced by

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon} = & (D_i^1 \cdot \underline{\epsilon}) \underline{1}_i + (D_i^2 \cdot \underline{\epsilon} \cos \alpha_i + D_i^3 \cdot \underline{\epsilon} \sin \alpha_i) \underline{2}_i \\ & + (-D_i^2 \cdot \underline{\epsilon} \sin \alpha_i + D_i^3 \cdot \underline{\epsilon} \cos \alpha_i) \underline{3}_i \end{aligned} \quad (28)$$

and

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_c = & (D_i^1 \cdot \underline{\omega}_c) \underline{1}_i + (D_i^2 \cdot \underline{\omega}_c \cos \alpha_i + D_i^3 \cdot \underline{\omega}_c \sin \alpha_i) \underline{2}_i \\ & + (-D_i^2 \cdot \underline{\omega}_c \sin \alpha_i + D_i^3 \cdot \underline{\omega}_c \cos \alpha_i) \underline{3}_i, \end{aligned} \quad (29)$$

respectively, where $D_i^j \equiv \sum D_i^{jk} \underline{k} = D_i^{j1} \underline{1}_i + D_i^{j2} \underline{2}_i + D_i^{j3} \underline{3}_i$ and, for any vector $\underline{v} \equiv \sum v_k \underline{k}$, $D_i^j \cdot \underline{v} \equiv \sum D_i^{jk} v_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$ independently). Thus, the orientation of each CMG is specified by the constant direction cosine matrices D_i and the number of CMGs comprising the controller is not specified until a particular controller is chosen. It follows that, for the general case, T_{m_i} ($i = 1, 2, \dots$) is given by Eq. (22) where $\underline{\omega}_c(t)$ and $\underline{\epsilon}(t)$ are given by Eqs. (28) and (29). Similar adjustments are applicable to the other equations appearing in the foregoing.

V. Simulation Technique and Results of Computer Analyses

A. Generation of Computer Algorithms

Let δt , a positive constant, denote the basic computation period of the digital simulation. Also, let $\underline{M}$, $\underline{M}_v$ and $\underline{M}_i$ respectively denote the total system angular momentum, the angular momentum of the vehicle, and the angular momentum of the i -th CMG; thus,

$$\underline{M} = \underline{M}_v + \sum \underline{M}_i \quad (30)$$

where $i = 1, 2, \dots$. According to Eq. (27), one may write the relation

$$\underline{v}_i = T_{a_i} \underline{v}$$

where $\underline{v}_i$ and $\underline{v}$ respectively denote a vector referred to the i -th CMG reference axes and also referred to the vehicle-fixed reference axes and T_{a_i} is the time-varying orthonormal coordinate transformation matrix defined by

$$T_{a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a_i & \sin a_i \\ 0 & -\sin a_i & \cos a_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i^{11} & D_i^{12} & D_i^{13} \\ D_i^{21} & D_i^{22} & D_i^{23} \\ D_i^{31} & D_i^{32} & D_i^{33} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Now let K_i denote the i -th CMG inertia matrix associated with the dyadic $\underline{K}_i$ given by Eq. (3). Employing vector-matrix notation, it follows that the i -th CMG angular momentum vector is referred along vehicle-fixed axes according to

$$\begin{aligned} \underline{M}_i &= \text{col}[\underline{M}_i \cdot 1, \underline{M}_i \cdot 2, \underline{M}_i \cdot 3] \\ &= T_{a_i}' K_i T_{a_i} \text{col}[\omega_1, \omega_2, \omega_3] + T_{a_i}' \text{col}[K_{i1} \dot{a}_i, H_i, 0]. \end{aligned} \quad (32)$$

Denoting the vehicle angular momentum by

$$\underline{M}_v = J \underline{\omega} \quad (33)$$

and substituting Eqs. (32) and (33) into Eq. (30), one obtains the total system angular momentum vector, referred along vehicle-fixed axes, as

$$\begin{aligned}\underline{M} &= \text{col}[M_1, M_2, M_3] \\ &= (J + \sum T_{a_i}' K_i T_{a_i}) \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \sum T_{a_i}' \begin{bmatrix} K_{i1} \dot{a}_i \\ H_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)\end{aligned}$$

In the digital simulation, $\underline{M}(t)$ is solved for at the discrete times $t = t_k = k\delta t$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) after $\underline{M}(t_0)$ is specified. Application of the Euler integration algorithm for simplicity yields the equations

$$\underline{M}(t_{k+1}) = \underline{M}(t_k) + \underline{T}(t_k)\delta t \quad (35)$$

where $\underline{T}(t) = \text{col}[T_1(t), T_2(t), T_3(t)]$ is regarded as a vector of vehicle disturbance torques. Assuming that the norm $\|\sum T_{a_i}' K_i T_{a_i}\|$ is negligible with respect to $\|J\|$, $\underline{M}(t_k)$ is closely approximated by

$$\underline{M}(t_k) = J \begin{bmatrix} \omega_1(t_k) \\ \omega_2(t_k) \\ \omega_3(t_k) \end{bmatrix} + \sum T_{a_i}'(t_k) \begin{bmatrix} K_{i1} \dot{a}_i(t_k) \\ H_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Combining Eqs. (32), (35) and (36), the algorithm

$$\begin{aligned}\underline{\omega}(t_{k+1}) &= \\ J^{-1} &\left\{ \underline{M}(t_k) + \underline{T}(t_k)\delta t - \sum \begin{bmatrix} D_i^{11} & D_i^{21} & D_i^{31} \\ D_i^{12} & D_i^{22} & D_i^{32} \\ D_i^{13} & D_i^{23} & D_i^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{i1} \dot{a}_i(t_{k+1}) \\ H_i \cos \hat{a}_i(t_k) \\ H_i \sin \hat{a}_i(t_k) \end{bmatrix} \right\} \quad (37)\end{aligned}$$

is obtained where $\hat{a}_i(t_k) \equiv a_i(t_k) + \dot{a}_i(t_k)\delta t$ serves to predict $a_i(t_{k+1})$ and where $\dot{a}_i(t_{k+1})$ is developed below.

The discrete time version of Eq. (19) may be written, according to the Euler integration algorithm, as

$$\begin{aligned} \dot{\underline{a}}_i(t_{k+1}) = \dot{\underline{a}}_i(t_k) + \{ [H_i + (K_{i2} - K_{i3}) \underline{\omega}(t_k) \cdot \underline{z}_i(t_k)] \underline{\omega}(t_k) \cdot \underline{z}_i(t_k) \\ - d_i \dot{\underline{a}}_i(t_k) + T_{m_i}(t_k) \} \delta t / K_{i1} + [\underline{\omega}(t_k) - \underline{\omega}(t_{k+1})] \cdot \underline{l}_i \end{aligned} \quad (38)$$

where it is noted that $\underline{l}_i$ is a constant of CMG motion relative to vehicle-fixed axes. The final digital computer algorithms for the motion of the vector $\underline{\omega}(t_{k+1})$ and the gimbal rates $\dot{\underline{a}}_i(t_{k+1})$ are obtained as the solution of Eqs. (37) and (38).

B. Discussion of Simulation Results

Figures 2 through 7 represent a typical computer simulation run where (1) computational algorithms noted above and (2) initialization and parameter data listed below were used. The pertinent data is given as:

$$J = \begin{bmatrix} 900 & -39 & -60 \\ -39 & 1500 & -73 \\ -60 & -73 & 1100 \end{bmatrix} \quad \text{slug-ft}^2$$

$$\theta_1(0) = 17.96, \theta_2(0) = 16.60, \theta_3(0) = 11.17 \text{ degrees}$$

$$\omega_1(0) = 0.25, \omega_2(0) = 0.15, \omega_3(0) = 0.35 \text{ degrees/second}$$

$$\tau_1 = 0.003, \tau_2 = 0.007, \tau_3 = 0.010 \text{ ft-lbs}$$

$$a_1(0) = 0.0, a_2(0) = 75.0, a_3(0) = 135.0 \text{ degrees, } \dot{a}_i(0) = 0.0 \text{ degs/sec}$$

$$\max \|\underline{\omega}_c\| = 2.0 \text{ degrees/second, } d_i = 2.0 \text{ ft-lb-sec}$$

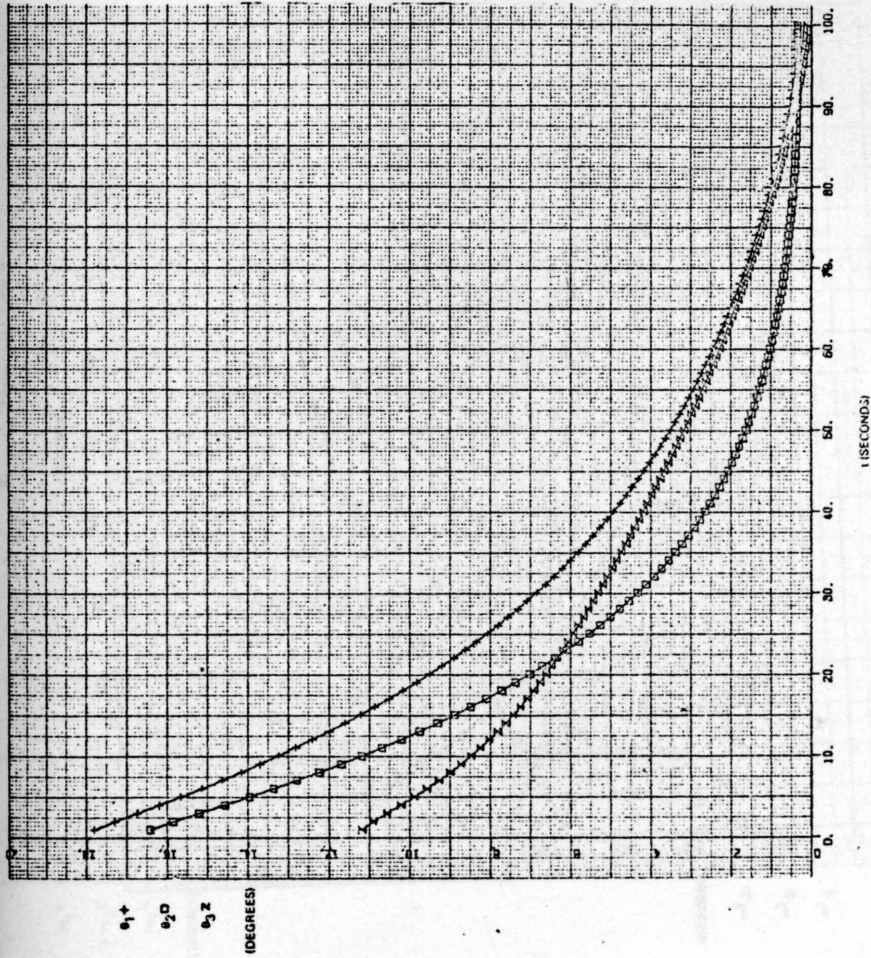
$$\Delta t = 1/64 \text{ seconds, } T_i = 1.7453279 \text{ ft-lbs}$$

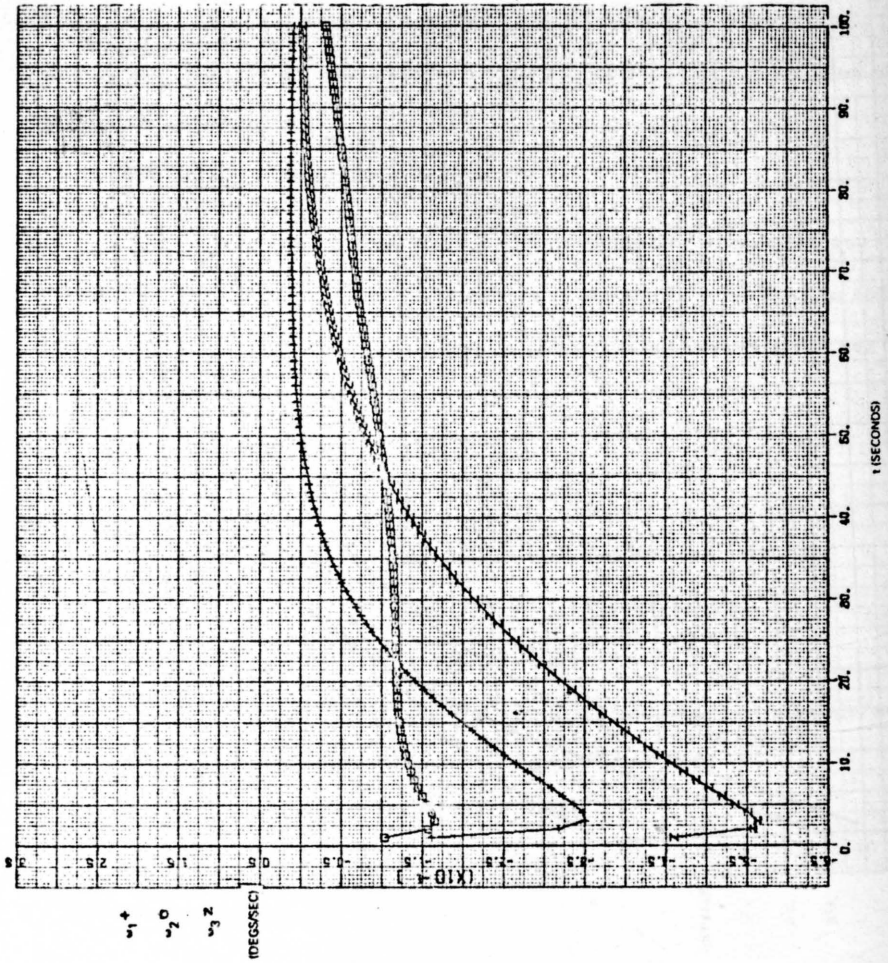
$$K_{11} = 0.05, K_{21} = 0.03, K_{31} = 0.04 \text{ slug-ft}^2$$

$$H_i = 50.0 \text{ ft-lb-sec}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_1 = 100 \text{ degs/second}$$

Figure 2. $\theta(t)$ versus t

Figure 3. $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ versus t

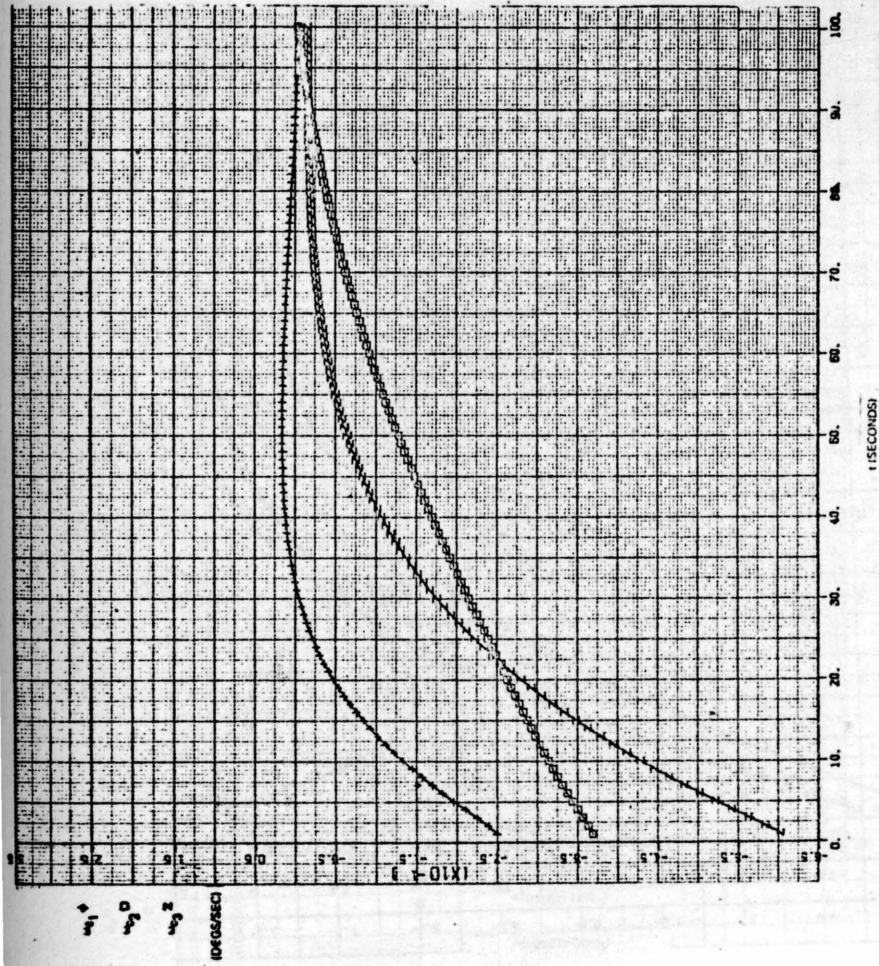
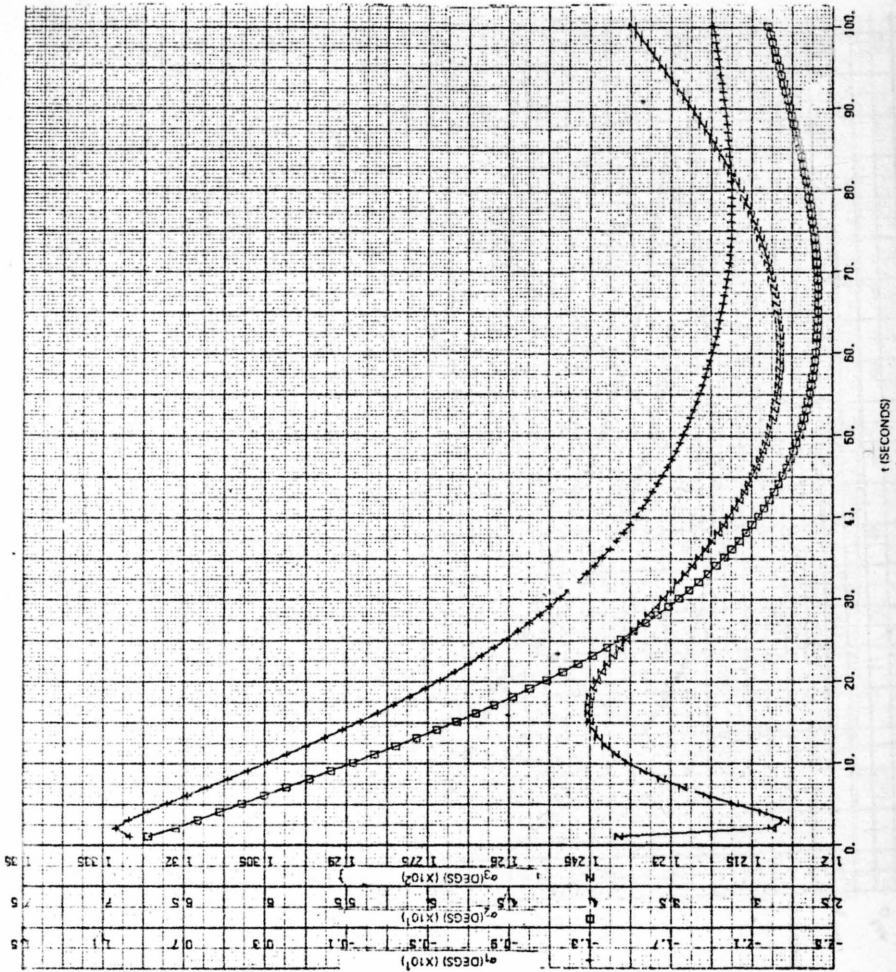


Figure 4. $\omega_{c1}(t)$, $\omega_{c2}(t)$, $\omega_{c3}(t)$ versus t

Figure 5. $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$ versus t

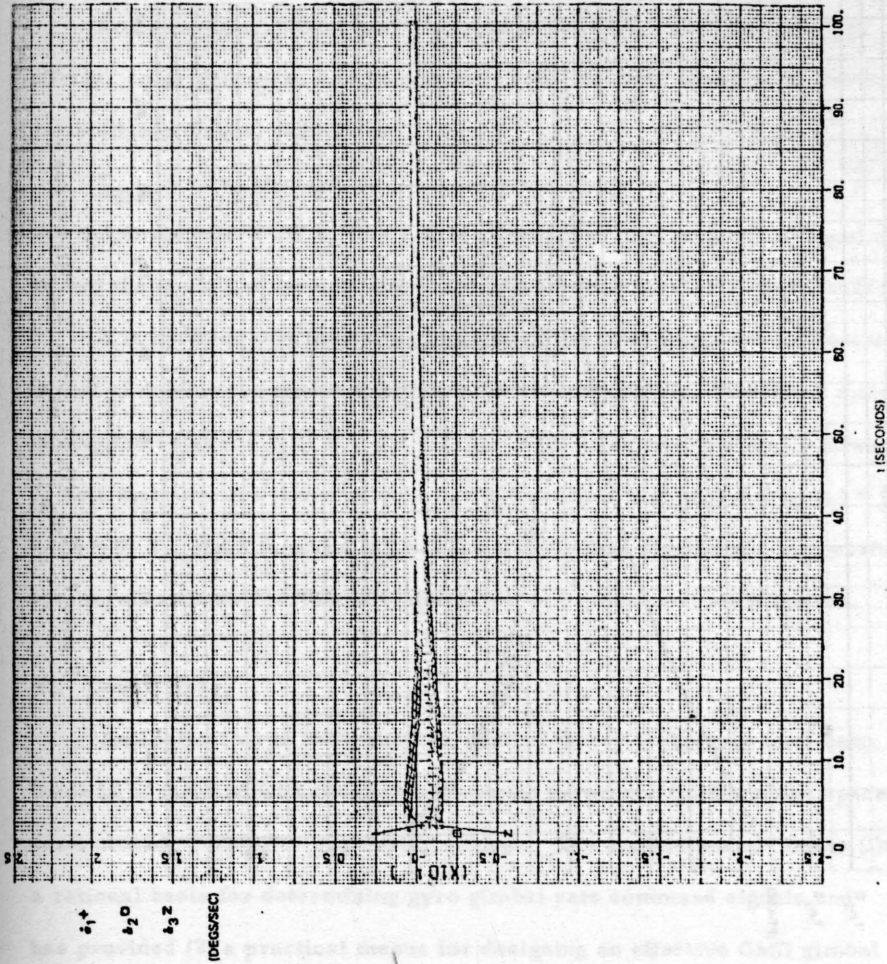


Figure 6. $\ddot{\alpha}_1(t)$, $\ddot{\alpha}_2(t)$, $\ddot{\alpha}_3(t)$ versus t

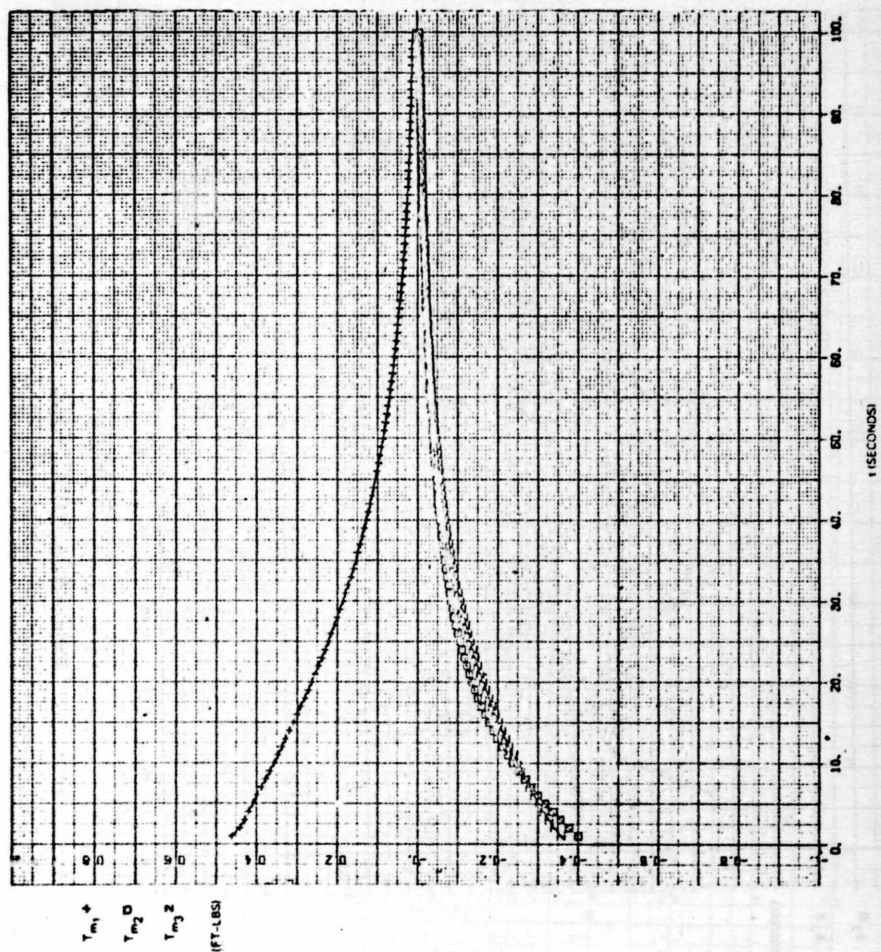


Figure 7. $T_{m1}(t)$, $T_{m2}(t)$, $T_{m3}(t)$ versus t

where $i = 1, 2, 3$ above. The initial values of the angles $\theta_i(t) \equiv \arcsin(\underline{i} \cdot \underline{I}_i)$ result via initial Euler angle rotations of 5.0, 10.0 and 15.0 degrees respectively about the x_1 -, intermediate x_2 - and final x_3 -axes.

For simplicity, disturbance torques arising from gravity gradient effects, solar pressure, and so on were not simulated. Instead, an arbitrary destabilizing torque, defined as

$$\underline{T}_{\text{dist}} \equiv -\Sigma \tau_k \text{sign } \epsilon_k(t) \underline{k}, \quad (39)$$

was employed where the τ_k ($k = 1, 2, 3$) given above are assumed to equal or exceed the moduli of torques due to the aforementioned disturbance sources.

It is recalled that the prime function of the CMG implemented controller is that of driving the angles $\theta_i(t)$ into zero simultaneously, thereafter maintaining the relations $\dot{\theta}_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2, 3$). With reference to Figs. 2 through 7, note that near the terminal time $t_f \approx 100$ seconds that $\underline{\omega}(t_f) \approx \underline{0}$, $\underline{\omega}_c(t_f) \approx \underline{0}$, $\theta_i(t_f) \approx 0$, $T_{m_i}(t_f) \approx 0$, and $\dot{\theta}_i(t_f) \approx 0$ ($i = 1, 2, 3$), thus signifying a successful spacecraft attitude reorientation maneuver and subsequent stabilization.

VI. Conclusions

An application of some modern control theory techniques have been made in connection with the control moment gyroscope implemented spacecraft attitude controller synthesis problem. The application has led to (1) a rational basis for determining gyro gimbal rate command signals and has provided (2) a practical means for designing an effective CMG gimbal torquer algorithm.

The results of a digital computer simulation demonstrated the feasibility of the selected controller synthesis techniques when applied to the spacecraft attitude controller design problem.

Appendix

An algorithm for the spacecraft commanded angular velocity, $\underline{\omega}_c$, is set forth in the following along with a brief analysis of system behavior when the relation $\underline{\omega}(t) \equiv \underline{\omega}_c(t)$ is valid. Consider the case where the spacecraft is to be maneuvered to minimize the attitude errors $|\underline{l}_i - \underline{I}_i(t)|$, $i = 1, 2, 3$. The motion of each reference vector, $\underline{I}_i(t)$, relative to vehicle-fixed axes, is governed by the vector equation [9]

$$\dot{\underline{I}}_i(t) = \underline{I}_i \times (\underline{\omega} - \underline{\Omega}) \quad (\text{A1})$$

where $\underline{\Omega}(t)$ denotes the angular velocity of the triad $(\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3)$ with respect to inertial space. Based upon the application of optimization techniques [10], one can derive the spacecraft commanded angular velocity algorithm as

$$\underline{\omega}_c \equiv \begin{cases} \underline{\Omega} + \kappa \frac{\sum \underline{I}_i \times \underline{I}_i}{\|\sum \underline{I}_i \times \underline{I}_i\|}, & -1 < \sum \underline{I}_i \cdot \underline{I}_i < \sigma < 3 \\ \underline{\Omega} + \kappa \frac{\sum \underline{I}_i \times \underline{I}_i}{\sqrt{3 + 2\sigma - \sigma^2}}, & \sigma \leq \sum \underline{I}_i \cdot \underline{I}_i \end{cases} \quad (\text{A2})$$

where $\kappa > 0$ and σ are constants of choice.

Upon assuming that $\underline{\omega}(t) \equiv \underline{\omega}_c(t)$ as given above, one can construct a matrix Riccati equation whose solution yields the motion of the unit vectors $\underline{I}_j(t)$ with respect to the vehicle-fixed unit vectors $\underline{I}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$). The matrix of interest is the direction cosine matrix $C(t)$ with elements defined as

$$C_j^i(t) \equiv \underline{I}_i \cdot \underline{I}_j(t). \quad (\text{A3})$$

From the aforementioned assumption, one has

$$\dot{C}_j^i(t) = \underline{I}_i \cdot \underline{I}_j \times \underline{\omega}_c(t). \quad (\text{A4})$$

Upon substitution of Eq. (A2) into Eq. (A4) and application of the method of

solution detailed in [11], with a bit of labor one obtains

$$C(t) = [E \tanh \Psi_k(t) + C(t_{k-1})][E + C(t_{k-1}) \tanh \Psi_k(t)]^{-1} \quad (A5)$$

where E is a 3×3 identity matrix, $\Psi_k(t)$ ($k = 1, 2$) is defined as

$$\Psi_1(t) \equiv \frac{1}{2} \log_e |\cot \frac{1}{2} \theta(t) / \cot \frac{1}{2} \theta(t_0)|, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (A6-1)$$

and

$$\Psi_2(t) \equiv \frac{1}{2} \kappa(t - t_1) / |\sin \theta(t_1)|, \quad t \in [t_1, T]. \quad (A6-2)$$

The angle $\theta(t)$ appearing in Eqs. (A6) is defined [9] by the relation

$$\Sigma C_i^1(t) = 1 + 2 \cos \theta(t). \quad (A7)$$

Under the above stated assumptions, one can show that

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta(t_0) - \kappa(t - t_0), & t \in [t_0, t_1] \\ \arcsin \tanh[\kappa(t - t_1) / |\sin \theta(t_1)| + \log_e |\cot \frac{1}{2} \theta(t_1)|], & t \in [t_1, T] \end{cases} \quad (A8)$$

where $t = t_1$ is given by the expression

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{\kappa} \left\{ \arcsin \frac{\Sigma C_i^1(t_0) - 1}{2} - \arcsin \frac{\sigma - 1}{2} \right\}. \quad (A9)$$

References

1. Sabroff, A. E., "Advanced Spacecraft Stabilization and Control Techniques," Preprints AIAA Paper No. 67-878, AIAA 4th Annual Meeting and Technical Display, Anaheim, Calif., Oct. 23-27, 1967.
2. Abzug, M. J., "Active Satellite Attitude Control, " Guidance and Control of Aerospace Vehicles, C. T. Leondes (ed.), McGraw-Hill, New York, 1963, pp. 331-425.
3. Liska, D. J. and Jacot, A. D., "Control Moment Gyros in Attitude Control," Tech. Report D2-90759-1, Boeing Company, Seattle, Wash.
4. Jacot, A. D. and Liska, D. J., "Control Moment Gyros in Attitude Control," J. Spacecraft and Rockets, Vol. 3, No. 9, Sept. 1966, pp. 1313-1320.
5. Kennedy, H. B., "Attitude Control of Space Vehicles Using Gyro Precession Torques, " Ballistic Missile and Space Electronics, Vol. II, C. T. Morrow, L. D. Ely, and M. R. Smith (eds.) Academic Press, New York, 1961, pp.153-183.
6. Havill, J. R. and Ratcliff, J. W., "A Twin-Gyro Attitude Control System for Space Vehicles, "NASA TN D-2419, Aug. 1964.
7. Leitmann, G., ed., Optimization Techniques - With Applications to Aerospace Systems, Academic Press, New York, 1962.
8. Denn, M. M., "The Optimality of an Easily Implementable Feedback Control System - An Inverse Problem in Optimal Control Theory," Preprints, Eighth J. A. C. C., Philadelphia, Pa., 1967 , pp. 308-316.

ON THE SYNTHESIS OF SUBOPTIMAL, INERTIA- -WHEEL ATTITUDE CONTROL SYSTEMS*

W. L. Garrard

Department of Aeronautics and Engineering Mechanics
University of Minnesota
Minneapolis, Minnesota, USA

L. G. Clark

Department of Engineering Mechanics
University of Texas
Austin, Texas, USA

1. Introduction

Many studies concerning the application of mathematical optimization techniques to the design of spacecraft attitude control systems have appeared in recent years. Most research in this area has been focused on time- and fuel-optimal, gas-jet control about a single axis.¹⁻⁴ Optimization of attitude control systems using inertia wheels as the source of control torque has been treated in considerably less detail. Flugge-Lotz and Marbach¹ and Schwartz⁵ have proposed minimum-time and minimum-energy systems for inertia-wheel control about a single axis. Kalman, Englar, and Bucy⁶ have presented a three-dimensional, inertia-wheel, attitude control system which approximately minimizes the integral of a quadratic function of system error and control effort, but an exceedingly large response time limits the usefulness of this system.

In the present study, two procedures are presented for the synthesis of suboptimal systems using motor-driven inertia wheels as the source of control torque for three-dimensional attitude control. These techniques approximately minimize the integral

* This work was partially supported by NASA Grant NAS8-18120 and NSF Grant GK-3273.

of a quadratic function of system error and control effort, and contrary to other treatments⁶⁻⁹, both procedures compensate for nonlinear, inter-axis coupling. The methods proposed are applicable to the design of attitude control systems which use inertia-wheels for the correction of small errors.

The procedures developed in this paper are applied to the design of an attitude control system for a typical artificial satellite, the Nimbus. In a computer simulation, systems designed on the basis of the procedures outlined in this study are shown to respond faster and more accurately than those designed by optimization procedures based on linearized approximations of the equations of motion.

2. Preliminary Considerations

Attitude control consists of applying torque to a spacecraft in such a way as to place and hold it in a specific angular orientation with respect to a three-dimensional frame of reference. In this study, the angular velocity and acceleration of the reference frame is assumed to be of an order of magnitude smaller than the expected angular position and velocity errors. The spacecraft is considered rigid, and control torque is available about the three principal axes. Since the control system is to be used to correct small attitude errors, the equations of motion may be simplified by use of standard small-angle assumptions, that is, terms of second order and higher involving the angular position and velocity errors may be neglected. Also it is assumed that the angular velocity of the inertia wheels relative to the spacecraft may be much larger than that of the spacecraft. Furthermore, it is not uncommon for the moments of inertia of the spacecraft to be more than a thousand times as large as those of the control wheels^{6,7}; consequently, the moments of inertia of the control wheels may be ignored when summed with the moments of inertia of the spacecraft. Many important attitude control situations fall within the context of the above restrictions. The simplified equations of motion are

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + C(y)x + Bu + Bg + Bh \\ \dot{y} &= -u\end{aligned}\quad (1)$$

where x is a vector representing the spacecraft attitude error (angular position and velocity); u is a vector representing the control torque available from the inertia wheels; y is a vector representing the angular momentum of the inertia wheels relative to the spacecraft; g and h are vectors representing the measurable and unmeasurable disturbance torques respectively; the elements of the matrix $C(y)$ are the angular momenta of the inertia wheels; and A and B are constant matrices. Typical forms for A , B and $C(y)$ are presented in Section 4; however, it should be noted that the functional form of the elements of $C(y)$ in terms of x and t is unknown.

The value of the integral of a quadratic function of the system error plus a quadratic function of the control effort has been widely used as a measure of control system performance. Such a performance index is often analytically attractive, and for inertia-wheel attitude control, a quadratic cost functional also makes sense from a physical standpoint.

The suboptimal systems developed in this study reduce the angular position and velocity errors to zero rapidly, and also approximately minimize,

$$J(x_0, y_0, u, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt \quad (2)$$

where Q and R are positive-definite, diagonal, constant matrices.* A small value of this integral indicates that both the error and control effort are kept small during most of the control interval.

3. Development of Suboptimal Techniques

The optimization problem considered is the determination of the control, u , which transfers any initial state, x_0 ,

* A prime denotes the transpose of a vector or matrix.

to the origin for the system governed by (1) and also minimizes the integral performance index J .

Three techniques for the solution of the above problem are the calculus of variations¹⁰, Pontryagin's maximum principle¹¹, and the Hamilton-Jacobi theory¹². Theoretically, each of these approaches gives enough information to determine the mathematically optimal control for the problem defined by (1) and (2); however, the Hamilton-Jacobi theory gives the most direct approach to the determination of both optimal and suboptimal control laws in feedback form. This approach depends upon the minimization with respect to u of a scalar function

$$H(x, y, u, t) = x'Qx + u'Ru + p'Ax + p'C(y)x + p'Bg(t) + p'Bh(t) + p'Bu \quad (3)$$

where $p(t)$ is a vector of the same dimensionality as x . The optimal control $u^0(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B'p$ minimizes H . A scalar function, called the Hamiltonian is obtained by substitution of u^0 into (3), and is given by

$$H^0 = x'Qx - \frac{1}{2}p'BR^{-1}B'p + p'Ax + p'C(y)x + p'Bg(t) + p'Bh(t) \quad (4)$$

In the Hamilton-Jacobi approach, the vector $p(t)$ is set equal to the gradient of a scalar function $V(x, y, t)$, (i.e. $p(t) = V_x(x, y, t)$), where V is a twice-continuously differentiable function satisfying the partial differential equation

$$V_t + H^0(x, y, V_x, t) = 0; \quad V(0, y, t) = 0 \quad (5)$$

Equation (5) is known as the Hamilton-Jacobi equation, and its solution, $V(x, y, t)$ evaluated at x_0, y_0 , and t_0 is the minimum value of the integral performance index J .

Method I. In the attitude control problem, the analytical solution of (5) appears impossible. Thus it is necessary to develop procedures for generating control laws which are suboptimal (approximately optimal). The first procedure for suboptimal control consists of using the control system to eliminate the most substantial nonlinear terms and the measurable disturbance torque. The resulting system is then

treated as linear for purposes of optimization. The control system must compensate for the unmeasurable disturbance torque indirectly by controlling the attitude errors created by this torque; consequently, in the sequel $h(t)$ is omitted from the equations of motion from which the control laws are derived.

A portion of the control, denoted by u_c is used to eliminate all nonlinear terms and the measurable disturbance torque in (1). From (1), $Bu_c = -C(y)x - g(t)$. The remainder of the control is denoted by u_L . Applying u_c to (1) yields $\dot{x} = Ax + Bu_L$.

The control u_L is to be selected in such a way as to

minimize $J = \int_{t_0}^{\infty} (x'Qx + u_L'Ru_L)dt$. Using u_c , the Hamilton-

Jacobi equation is

$$-\frac{1}{2} V_x' B R^{-1} B' V_x + V_x' A x + x' Q x = 0 \quad (6)$$

and $u_L = -\frac{1}{2} R^{-1} B' V_x$. Kalman¹² has demonstrated that the quadratic function, $V(x) = x' P x$, is a solution to (6) provided P is a symmetric, positive definite matrix such that

$$P A + A' P - P B R^{-1} B' P + Q = 0. \quad (7)$$

The control, u , is the sum of u_L and u_c .

The transient response of the system is determined by the values selected for the weighting matrices Q and R . In the remainder of this work it is assumed that identical response is desired about each axis of the spacecraft. The above assumption considerably simplifies algebraic manipulations, although it is not a condition which must be satisfied before the suboptimal procedures developed in this study can be applied.

Method II. The second method for suboptimal control is an extension of a technique developed by Garrard, McClamroch, and Clark¹³. The control, u , is divided into two components, u_d and u_s , where $Bu_d = -g(t)$. Using u_d , (1) reduces to $\dot{x} = Ax + C(y)x + Bu_s$.

The control u_s is chosen to approximately minimize

$J = \int_{t_0}^{\infty} (x'Qx + u_s' Ru_s) dt$. The Hamilton-Jacobi equation is

$$V_x' [Ax + C(y)x] - \frac{1}{2} V_x' BR^{-1} B' V_x + x' Q x = 0, \quad V(0, y) = 0. \quad (8)$$

An approximate solution to the above equation may be obtained by assuming $V(x, y)$ to be represented by a power series in ϵ of the form

$$V(x, y) = \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon^{(n-2)} V_n(x, y). \quad (9)$$

Substituting (9) into (8) and equating coefficients of powers of ϵ to zero gives

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2'}{\partial x} Ax - \frac{1}{2} \frac{\partial V_2'}{\partial x} BR^{-1} B' \frac{\partial V_2}{\partial x} + x' Q x &= 0, \\ \frac{\partial V_3'}{\partial x} Ax + \frac{\partial V_2'}{\partial x} Cx - \frac{1}{2} \frac{\partial V_2'}{\partial x} BR^{-1} B' \frac{\partial V_3}{\partial x} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial V_n'}{\partial x} Ax + \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial x} Cx - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{\partial V_k'}{\partial x} BR^{-1} B' \frac{\partial V_{n+2-k}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

In order to determine $V_2, V_3, \dots, V_n$, the above equations must be solved successively. The first equation of (10) is identical to (6). The remaining equations in (10) are linear, partial differential equations; solutions can be obtained by assuming $V_n = x' M_n(y) x$ for $n \geq 3$, where $M_n(y)$ is treated as a symmetric matrix. Substituting into (10) yields the following set of linear algebraic equations

$$\begin{aligned} M_3(A - BR^{-1}B'P) + (A' - PB'R^{-1}B)M_3 &= PC - C'P \\ &\vdots \\ M_n(A - BR^{-1}B'P) + (A' - PB'R^{-1}B)M_n &= \sum_{k=3}^n M_k BR^{-1}B' M_{n+2-k} - M_{n-1} C - C' M_{n-1} \end{aligned} \quad (11)$$

These equations may be solved for $M_n(y)$, and the control, u_s , is given as

$$u_s = -R^{-1}B' \left[P + \sum_{n=3}^{\infty} \epsilon^{(n-2)} M_n(y) \right] x. \quad (12)$$

The complete control, u , is the summation of its two components u_s and u_d .

If the nonlinear coupling terms, $C(y)x$, are ignored, minimization of J yields a control law, u , which is nearly identical to u_L . This procedure is called linearization in the sequel, and as demonstrated in the next section, a control designed on the basis of such a procedure may prove inadequate.

4. Suboptimal Control of a Non-Symmetric Satellite

The suboptimal control laws developed in the previous section are applied to the synthesis of an inertia-wheel control system for an artificial earth satellite. The nominal distance from the surface of the earth to the center of mass of the satellite is 500 nautical miles, and the orbital eccentricity is 50 nautical miles. The earth is assumed to be spherical. In Fig. 1, the set of orthogonal axes R_1 , R_2 , and R_3 are the reference axes with which the spacecraft is to be aligned. The R_3 axis is assumed to point toward the center of the earth, and the R_2 axis is perpendicular to the orbital plane; consequently, the angular velocity of the reference axes is $\Omega_R' = [0, \Omega_{R2}, 0]$, where Ω_{R2} is the angular velocity of a line connecting the center of mass of the satellite with the center of the earth. (nominally $\Omega_{R2} = 0.85 \times 10^{-3}$ rad/sec).

The set of orthogonal axes B_1 , B_2 , and B_3 are the principal axes of the spacecraft and are denoted as the roll, pitch, and yaw axes respectively. The components along the body axes of the angular velocity of the spacecraft relative to the reference axes are called the roll, pitch, and yaw rates, and the angular errors between the body and reference axes are the roll, pitch, and yaw angles.

The maximum expected values of the roll, pitch, and yaw angles are 0.175 rad, and the maximum expected angular velocity is 0.01 rad/sec about each axis. The control system must reduce the roll, pitch, and yaw angles to 0.0175 rad within four minutes. The moments of inertia of the spacecraft are 200 slug-ft² about the roll axis, 150 slug-ft² about the pitch

axis, and 100 slug-ft² about the yaw axis. The maximum allowable inertia-wheel angular momentum is 10 slug-ft²/sec about the roll axis, 7.5 slug-ft²/sec about the pitch axis, and 5 slug-ft²/sec about the yaw axis. The system characteristics and performance specifications outlined above are nearly identical to those for the Nimbus satellite⁶.

If x_1 = roll angle, x_2 = roll rate, x_3 = pitch angle, x_4 = pitch rate, x_5 = yaw angle, x_6 = yaw rate, and y_i = angular momentum relative to the spacecraft of the i -th inertia wheel, the elements of A are zero except $a_{12} = a_{34} = a_{56} = 1$, the elements of B are zero except $b_{21} = 1/I_1$, $b_{42} = 1/I_2$, $b_{63} = 1/I_3$ (I_i is the moment of inertia of the spacecraft about the i -th principal axis),

$$C(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_3/I_1 & 0 & y_2/I_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_3/I_2 & 0 & 0 & 0 & y_1/I_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y_2/I_3 & 0 & -y_1/I_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{and } g(t) = [y_3 \dot{\Omega}_{R2}, I_2 \dot{\Omega}_{R2}, -y_1 \dot{\Omega}_{R2}].$$

The inertia-wheel control logic is synthesized by linearization and the two suboptimal procedures developed in the previous section. The control obtained by linearization is

$$\begin{aligned} u_1 &= -I_1 p_{22} x_2 - I_2 p_{12} x_1 - y_3 \dot{\Omega}_{R2} \\ u_2 &= -I_2 p_{22} x_4 - I_2 p_{12} x_3 - I_2 \dot{\Omega}_{R2} \\ u_3 &= -I_3 p_{22} x_6 - I_3 p_{12} x_5 + y_1 \dot{\Omega}_{R2} \end{aligned} \quad (13)$$

If nonlinear coupling, $C(y)x$, were indeed negligible, values of $p_{12} = 3.5 \times 10^{-2}$ rad/sec and $p_{22} = 5.75 \times 10^{-4}$ rad/sec² would

yield adequate transient response. However, this is not the case as is demonstrated later.

Method I for suboptimal control yields

$$\begin{aligned} u_1 &= -I_1 p_{22} x_2 - I_1 p_{12} x_1 - y_3 \Omega_{R2} + y_3 x_4 - y_2 x_6 \\ u_2 &= -I_2 p_{22} x_4 - I_2 p_{12} x_3 - I_2 \Omega_{R2} - y_3 x_2 - y_1 x_6 \\ u_3 &= -I_3 p_{22} x_6 - I_3 p_{12} x_5 + y_1 \Omega_{R2} + y_2 x_2 + y_1 x_4 \end{aligned} \quad (14)$$

Using Method II, a two-term approximation of (12) is

$$\begin{aligned} u_{1s} &= -I_1 p_{22} x_2 - I_1 p_{12} x_1 - \frac{(I_1 - I_2)}{2I_2} y_3 x_4 - \frac{(I_1 - I_3)}{2I_3} y_2 x_6 \\ &\quad - \frac{p_{12}}{2p_{22}} \frac{(I_1 + I_2)}{I_2} y_3 x_3 - \frac{p_{12}}{2p_{22}} \frac{(I_1 + I_3)}{I_3} y_2 x_5 \\ u_{2s} &= -I_2 p_{22} x_4 - I_2 p_{12} x_3 + \frac{(I_1 - I_2)}{2I_1} y_3 x_2 - \frac{(I_3 - I_2)}{2I_3} y_1 x_6 \\ &\quad + \frac{p_{12}}{2p_{22}} \frac{(I_1 + I_2)}{I_1} y_3 x_1 + \frac{p_{12}}{2p_{22}} \frac{(I_2 + I_3)}{I_3} y_1 x_5 \\ u_{3s} &= -I_3 p_{22} x_6 - I_3 p_{12} x_5 + \frac{(I_1 - I_2)}{2I_1} y_2 x_2 + \frac{(I_3 - I_2)}{2I_2} y_1 x_4 \\ &\quad - \frac{p_{12}}{2p_{22}} \frac{(I_2 + I_3)}{I_2} y_1 x_3 + \frac{p_{12}}{2p_{22}} \frac{(I_1 + I_3)}{I_1} y_2 x_1 \end{aligned} \quad (15)$$

Stability of (1) under the action of control laws of the general form of (15) has been demonstrated by Garrard and Walker¹⁴.

A functional block diagram of the spacecraft and control system is illustrated in Fig. 2.

In simulating the characteristics of the spacecraft and the control system on a digital computer, control laws given by linearization and suboptimal Methods I and II were employed for several sets of initial conditions. Values of zero and 60 per cent of the maximum for the initial, inertia-wheel angular momentum were used for each set of initial conditions.

TABLE

Initial Conditions - Pitch, Yaw, and Roll Angles = 0.175 radians Pitch, Yaw, and Roll Rates = 0.01 radians/sec						
Method of control System Design	Linearization		Suboptimal: Method I		Suboptimal: Method II	
Initial Inertia- Wheel Angular Momentum (% of Maximum)	0	60	0	60	0	60
Response Time (Minutes)	4.0	15.0	3.0	3.2	3.7	3.2
Peak Torque (ft-lbs x 10^{-4})	4.501	5.083	4.501	6.583	4.501	13.952
Peak Power (ft-lbs/sec x 10^{-3})	92.69	611.42	91.32	789.9	126.0	3345.4
Energy Consumed (ft-lbs x 10^{-3})	107.7	1194.5	112.5	859.1	105.0	857.6
Quadratic Performance Index	9.170	13.060	8.930	12.190	10.310	9.641

The exact equations of motion were used in the simulation, and disturbance torques due to the gravity gradient were included. The results of a typical simulation are given in Table 1.

In all cases, the system designed on the basis of linearization failed to sufficiently reduce the angular error within the required time for an initial, inertia-wheel angular momentum of 60 per cent of the maximum expected value. Both suboptimal systems had adequate response times for all sets of initial conditions tested; however, the system designed on the basis of Method I appears to have smaller torque and power requirements than does the system designed on the basis of Method II.

The performance of the system designed by linearization approached the performance of the suboptimal systems for zero initial, inertia-wheel angular momentum. This was to be expected since all three control laws are nearly the same for small values of inertia-wheel angular momentum.

The response of the spacecraft is illustrated in Figs. 3 and 4 for a value of initial, inertia-wheel angular momentum of 60 per cent of the maximum, and the unacceptable response of the system designed on the basis of linearization is evident. Fig. 3 shows that the system synthesized by use of Method II gives less overshoot than the system designed by use of Method I. However, the suboptimal system based on Method II yields extremely oscillatory response; this is illustrated in both figures.

Kalman et al.⁶ synthesized a control system for the satellite considered in this example. In this design all linear, time-invariant terms in the equations of motion were retained, but all nonlinear terms were neglected. Optimization was performed with respect to a quadratic performance index; however, the best response time obtained was over two hours.

5. Conclusions

The suboptimal control techniques developed in this work appear to provide effective methods for synthesizing inertia-wheel attitude control systems. Both procedures take nonlinear

inter-axis coupling into account. As demonstrated in the example, unacceptable system response may result if such coupling is ignored. Both techniques yield controllaws in feedback form, and the suboptimal systems developed in this study give considerably more accurate control that is provided by systems based on linearized approximations of the equations of motion.

Results obtained from application of the two techniques of for suboptimal, inertia-wheel control indicate that Method I is slightly superior in the following ways:

- (1) The control system designed by use of Method I has lower torque and power requirements.
- (2) Method I yields more accurate response.
- (3) Method I is computationally easier to use and gives simpler control laws.

Better results might be obtained from Method II if more terms were used in the approximate solution of the Hamilton-Jacobi equation.

References

1. Flugge-Lotz I., and H. Marbach, "The Optimal Control of Some Attitude Control Systems for Different Performance Criteria" J. Basic Eng., vol. 85D, pp. 165-176, 1963.
2. Athans, M., "Minimum-fuel Feedback Control Systems: Second Order Case," AIEE Trans. Appl. Ind., vol. 82, pp. 8-17, 1963.
3. Foy, Jr. W. H., "Fuel Minimization in Flight Vehicle Attitude Control," IEEE Trans. Auto. Cont., vol. AC-8 pp. 84-88, April, 1963.
4. Meditch, J. S., "On Minimum-Fuel Satellite Attitude Control," AIEE Trans. Appl. Ind., vol. 84, pp. 120-128, March, 1964.
5. Schwartz, Lawrence, "On Minimum Energy Attitude Acquisition Using Reaction Wheel Control," AIAA Paper 65-434, 1965.
6. Kalman, R. E., J. S. Englar, and R. S. Bucy, Fundamental Study of Adaptive Control Systems, vol. II, ASD-TR-61-27, Air Force Systems Command, Wright-Patterson AFB, Ohio, Oct., 1965.
7. Cook, Jerome, M., and Ross Fleisig, "Initial Stabilization of the OAO Spacecraft," Cont. Elec. Session, IAS Meeting, Los Angeles, June, 1962.
8. Dertouzos, M. L., and J. K. Roberge, "High Capacity Reaction Wheel Attitude Control," AIEE Trans. Appl. Ind., pp. 99-104, vol. 84, March, 1964.
9. White, J. S., and Q. M. Hansen, Study of Systems Using Inertia Wheels for Precise Attitude Control of a Satellite, NASA TND-691, April, 1961.
10. Gelfand, I. M., and S. V. Fomin, Calculus of Variations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
11. Pontryagin, L. S., V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, and E. Mischenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York, 1962.
12. Kalman, R. E., "The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations," in R. Bellman (ed), Mathematical Optimization Techniques, U. of Cal. Press, Berkeley, pp. 309-331, 1963.
13. Garrard, W. L., N. H. McClamroch, and L. G. Clark, "An Approach to Sub-optimal Feedback Control of Non-linear Systems," Int. J. Cont., vol. 5, No. 5, pp. 425-435, 1967.
14. Garrard, W. L., and J. A. Walker, "Stability of a Class of Coupled Systems," IEEE Trans. Auto. Cont., Ac-12, pp. 786-787, Dec., 1967.

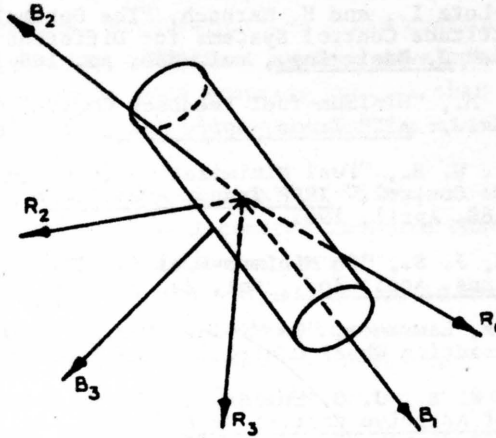


Fig. 1. Coordinate Axes

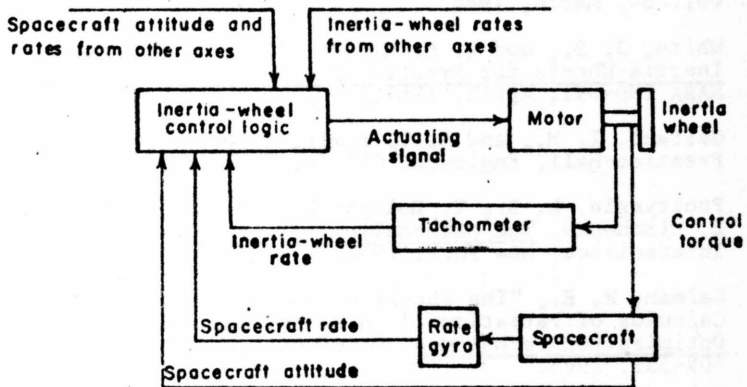


Fig. 2. Functional Block Diagram of Spacecraft and Inertia-Wheel Control System

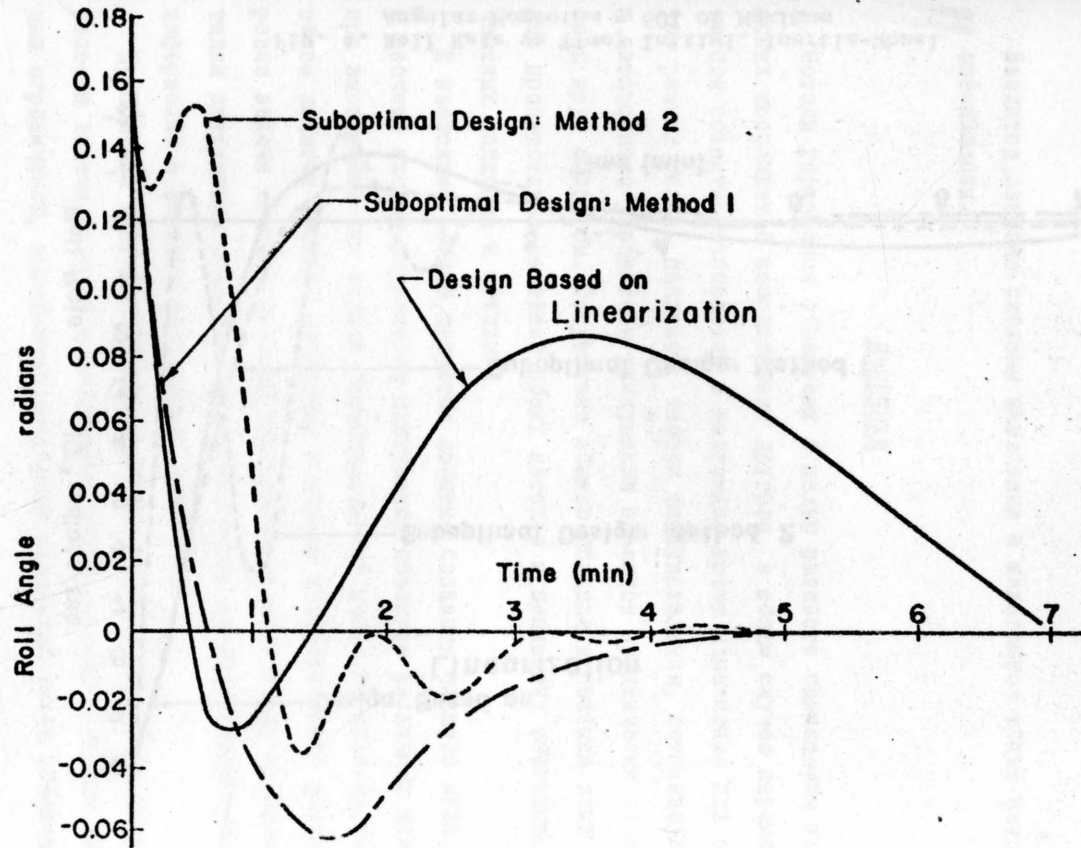


Fig. 3. Roll Angle vs Time; Initial, Inertia-Wheel Angular Momentum = 60% of Maximum

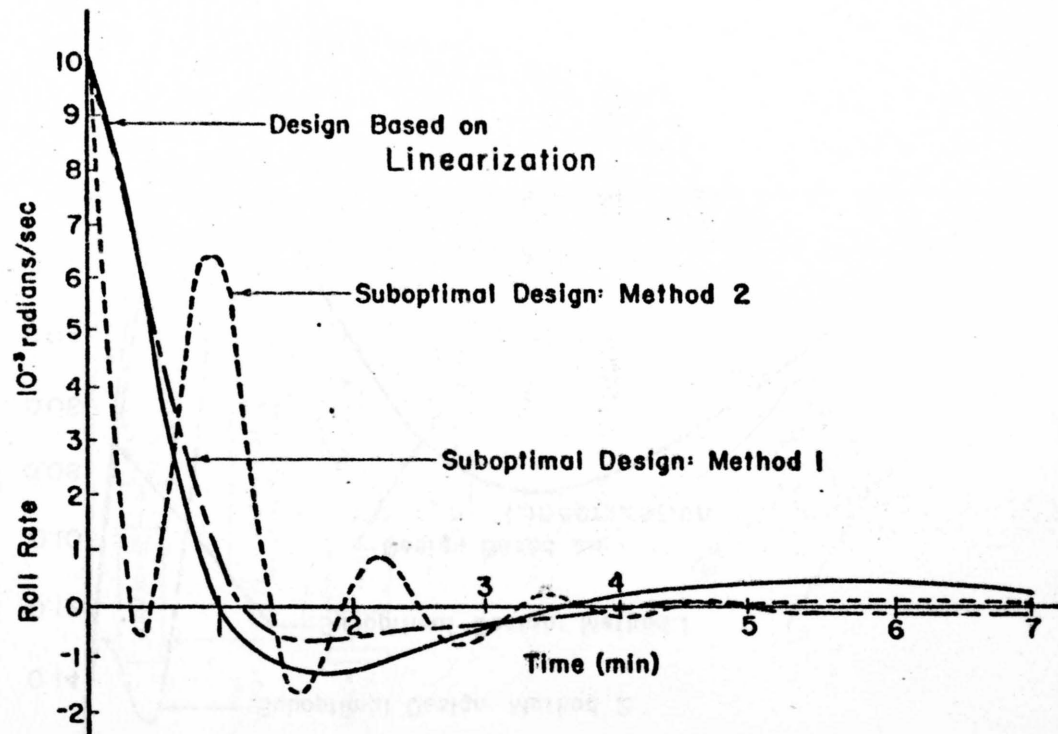


Fig. 4. Roll Rate vs Time; Initial, Inertia-Wheel Angular Momentum = 60% of Maximum

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НАВЕДЕНИЯ

Е.А.Федосов, А.М.Батков, В.Ф.Левитин, В.А.Скринкин
(Москва)

Вводится понятие системы наведения и излагаются общие методы оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

Методы управления объектами с целью разового совмещения их фазовых координат с координатами другого, в общем случае перемещающегося объекта развиваются в настоящее время независимо для объектов разных типов. Например, теории телеуправления, самонаведения и автономного управления движущихся объектов практически не связаны друг с другом. Отсутствие общего подхода к решению этих задач препятствует развитию общих методов и взаимному обогащению частных подходов и методик.

В настоящей работе делается попытка создания единого подхода к расчету систем управления движущихся объектов различных классов при выполнении ими задачи "преследования" цели. Он основан на общем понятии системы наведения и единой математической формулировке задачи синтеза системы управления применительно к различным типам движущихся объектов, характеристикам целей и используемой информации о фазовых координатах объектов.

Применение современных вариационных методов позволяет получить решение задачи синтеза в достаточно общих случаях с учетом возможных ограничений, выражающих специфику различных типов объектов управления.

§ 1. ПОНЯТИЕ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ

Пусть имеются два управляемых объекта, положение которых в пространстве фазовых координат изменяется во времени. Один из объектов назовем наводящимся, другой - целью.

Относительное положение этих объектов характеризуется некоторым функционалом $\underline{I}$ их фазовых координат. Простейшим случаем функционала $\underline{I}$ является расстояние (дальность) между наводящимся объектом и целью в трехмерном пространстве. Иногда их взаимное положение определяется также производными координат и угловыми положениями объектов.

Управление наводящимся объектом с целью изменения наименьшего значения $\underline{I}$ по крайней мере в один момент времени из конечного или бесконечного интервала $\underline{T}$ назовем наведением объекта на цель, а момент времени, в который достигается нижняя граница $\underline{I}(\underline{t})$, - моментом встречи $\underline{t}_g$. Момент встречи определяется условием

$$\underline{I}(\underline{t}_g) = \inf_{\underline{t} \in \underline{T}} \underline{I}(\underline{t}), \quad (1)$$

Система управления, обеспечивающая наведение объекта на цель в соответствии с его физическими возможностями и ограниченной информацией о фазовых координатах обоих объектов, называется системой наведения.

Существенное отличие системы наведения состоит в том, что цель управления достигается по крайней мере в один момент времени, который неизвестен в процессе управления и зависит от относительно-го положения объектов.

Основной характеристикой системы наведения является точность, определяемая наименьшей величиной функционала $\underline{I}(\underline{t})$ в процессе

наведения или, другими словами, его значением в момент встречи $I(\bar{t}_g)$.

Для управления наводящимся объектом важно определить текущую меру $I(\bar{t}_g)$ как функцию $\bar{\chi}(\bar{t})$ вектора фазовых координат объекта управления и цели в произвольный момент $\bar{t} < \bar{t}_g$ интервала наведения T при известном законе изменения фазовых координат обоих объектов на интервале $(\bar{t}, \bar{t}_g)$. Рациональные текущие меры должны удовлетворять условиям:

$$1) \bar{\chi}(\bar{t}_g) = I(\bar{t}_g).$$

2) Для каждого момента $\bar{t}$ интервала наведения текущая мера $\bar{\chi}(\bar{t})$ является монотонной, неубывающей, нечетной функцией $I(\bar{t}_g)$.

3) В условиях располагаемой информации об относительных координатах и $\bar{\chi}(\bar{t}) = 0$ условие $I(\bar{t}_g) = 0$ обеспечивается при наименьших (или равных нулю) значениях управления на интервале $\bar{t}, \bar{t}_g$.

Если $I(\bar{t}_g)$ характеризует расстояние между объектами, то в качестве $\bar{\chi}(\bar{t})$ удобно использовать вектор пролета $\bar{h}(\bar{t})$, характеризующий расстояние между целью и относительной траекторией, построенной в предположении, что движущийся объект и цель в относительном движении перемещаются прямолинейно. Пролет связан с вектором дальности $\bar{R}$ и относительной скорости $\bar{V}$ формулой

$$\bar{h} = \bar{R} - \bar{V}(\bar{R} \cdot \bar{V}),$$

здесь индексом "0" обозначены единичные векторы.

Дифференцированием пролета можно получить соотношение для скорости изменения модуля пролета

$$\dot{\bar{h}} = \dot{\bar{R}} \cdot \bar{t}_g$$

и угловой скорости вектора $\bar{h}$ в плоскости, перпендикулярной вектору относительной скорости

$$\underline{\underline{R}} = \frac{\underline{\underline{J}}_R}{\kappa} \underline{\underline{t}}_y$$

Здесь $\underline{\underline{J}}_R$ - проекция полного вектора относительно ускорения $\underline{\underline{J}}$ на направление пролета;
 $\underline{\underline{J}}_R$ - проекция полного вектора относительного ускорения на направление, перпендикулярное пролету и относительной скорости;

$$\underline{\underline{t}}_y = - \frac{R(\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{V}})}{\underline{\underline{V}}}$$

- время, оставшееся до встречи при текущих дальности и относительной скорости.

Проекция вектора относительного ускорения на направление относительной скорости, равная $\underline{\underline{V}}$, влияет на пролет только через величину $\underline{\underline{t}}_y$.

Из сказанного следует, что наибольшей скорости изменения пролета движущийся объект и цель могут достичь, направив свои векторы ускорения коллинеарно пролету.

Специфика различных систем наведения определяется информационными и энергетическими ограничениями, которые описываются необратимыми, нелинейными преобразованиями, не имеющими обратных. Информационные ограничения связаны с особенностями характеристик датчиков информации и их положением в пространстве фазовых координат, а также невозможностью измерения некоторых фазовых координат объектов и ошибками измерений.

Энергетические ограничения определяются типами объектов, средой, в которой осуществляется процесс наведения, запасом энергии, расходуемой на управление, и диапазоном изменения управляющих воз-

действий. Далее предположим, что известны дифференциальные уравнения, описывающие относительное движение объектов в процессе наведения:

$$\dot{\bar{X}} = \underline{F}(\bar{X}, \underline{U}, \underline{f}_u, \bar{\xi}, \bar{\epsilon}). \quad (2)$$

Вектор $\bar{X}$ включает в общем случае координаты наводящегося объекта и цели, а также текущую меру точности наведения, поэтому уравнение (2) обычно называют уравнением связи. Управления $\underline{U}$ и $\underline{f}_u$ определяют движения объектов и зависят в общем случае от измеренных значений $\underline{Y}$ фазовых координат $\bar{X}$.

$\bar{\xi}(\bar{\epsilon})$ — случайная функция, включающая ошибки реализации управления и отражающая неполноту информации об объектах.

Энергетические ограничения системы наведения определяют существенные нелинейности функции $\underline{F}$, а также дополнительные условия, при которых решается уравнение (2).

Информационные ограничения определяют зависимость вектора $\underline{Y}$ от $\bar{X}$:

$$\underline{Y} = \underline{G}[\underline{H}\bar{X} + \bar{D}]. \quad (3)$$

Матрица $\underline{H}$ позволяет выделить измеряемые компоненты вектора $\bar{X}$, а функция $\underline{G}$ — нелинейности датчиков и перерывы информации.

Структурная схема системы наведения представлена на рис. I.

§ 2. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ

Задача оптимизации системы наведения состоит в определении вектора управления $\underline{U}$, зависящего от вектора $\underline{Y}(\bar{\epsilon})$, из условия

$$\min_{\underline{U}(\bar{\epsilon})} M\{\Phi[\underline{I}(\bar{\epsilon}_0)]\}, \quad (4)$$

где M — операция математического ожидания, Φ — функция от

ошибки системы наведения, момент встречи $\bar{t}_g$ определяется условием (I). Наличие энергетических ограничений приводит к необходимости учета при минимизации (4) условий типа

$$\bar{u}(t) \in U, \quad (5)$$

где U - замкнутая область изопериметрических ограничений

$$\int_{t_0}^{\bar{t}_g} F(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}) d\bar{t} \leq c \quad (6)$$

либо математических ожиданий от условий (4) / $\bar{t}_0$ - момент начала наведения/.

При этом управление должно быть физически реализуемым, т.е. должно зависеть только от прошлых значений наблюдаемой реализации процесса y , определяемого выражением (3).

Существенная особенность рассматриваемой вариационной задачи определяется условием (I). В детерминированном случае и при $\Phi = I$ она сводится к вариационной задаче с параметром.

Если предположить, что момент встречи $\bar{t}_g$ определяется условием

$$g[x(t_g), u, \dot{x}_g] = 0, \quad (7)$$

необходимые условия оптимальности управления могут быть записаны с помощью принципа максимума в виде [I]

$$\max_{u \in U} M[H(\psi, \bar{x}, u, \dot{x}_g, \bar{t}) / y], \quad (8)$$

где

$$H(\psi, \bar{x}, u, \dot{x}_g, \bar{t}) = \psi^T \cdot F(\bar{x}, u, \bar{t}); \quad (9)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad (10)$$

$$\bar{\psi}_0(\bar{t}_0) = -1, \quad \bar{\psi}_i(\bar{t}_0) = -\frac{\partial \Phi[\bar{x}(\bar{t}_0)]}{\partial \bar{x}_i(\bar{t}_0)} \quad (11)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n).$$

Условия (6) учитываются путем расширения вектора фазовых координат $\bar{x}$, а момент $\bar{t}_0$ определяется из условия (7).

Если цель также осуществляет оптимальное управление, максимизирующее ошибки наведения, условие (8) может быть переписано в виде, обобщающем результаты [2]

$$\max_{\bar{y} \in Y} \min_{\bar{u} \in U} M[H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{t}_0, \bar{t})/y] \quad (12)$$

или

$$\min_{\bar{u} \in U} \max_{\bar{y} \in Y} M[H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}, \bar{t}_0, \bar{t})/y] \quad (13)$$

в зависимости от степени взаимной информированности цели и наводящегося объекта о стратегиях друг друга. Предполагается, что в процессе наведения цель также использует для управления вектор $\bar{y}$ или некоторые его компоненты.

Из условий оптимальности следует, что управление $\bar{u}(t)$ в момент $\bar{t}$ определяется функцией от математического ожидания ошибки в момент встречи $\bar{t}_0$ при известной реализации вектора $\bar{y}$ на интервале $(\bar{t}_0, \bar{t})$.

В частном случае

$$\Phi[\bar{I}(\bar{t}_0)] = \bar{x}^T(\bar{t}_0) Q \bar{x}(\bar{t}_0) \quad (14)$$

ограничения

$$M\left[\int_{t_0}^{t_0} \bar{u}^T P \bar{u} dt\right] = c. \quad (15)$$

для линейного уравнения связи

$$\bar{\dot{x}} = A\bar{x} + G\bar{u} + L(t)\bar{y}(t), \quad (16)$$

$$\bar{x}(\bar{t}_0) = \bar{x}_0$$

необходимые условия оптимальности сводятся к нелинейному интегральному уравнению специального вида

$$\bar{u}(t) = -Sg P^{-1} G^T K^T(\bar{t}_0, \bar{t}) G M \left[\bar{x}(\bar{t}_0) / y(t), \bar{t} \leq \bar{t} \right], \quad (17)$$

где A - положительная, а P - определенно-положительные матрицы,

P^{-1} - обратная P матрица,

$K(t_0, t)$ - матрица весовых функций уравнения (16)

$$Sg \bar{z} = \begin{cases} \bar{z} & \bar{z} \in U, \\ 1 & \bar{z} \notin U. \end{cases} \quad (18)$$

определяется решением уравнения (16) в момент $\bar{t}_0$.

В настоящее время наиболее полно разработаны методы расчета линейных оптимальных систем из условия минимума среднего квадрата пролета в фиксированный момент времени $\bar{t}_1$. Изложим вкратце имеющиеся здесь результаты.

Предположим, что вектор фазовых координат объекта управления удовлетворяет системе уравнений (16). Результат измерения координат объекта информационными устройствами описывается P -мерным вектором

$$\underset{(\bar{p}_{11})}{y}(t) = \underset{(\bar{p}_{11})}{H}(t) \underset{(\bar{p}_{11})}{\bar{x}}(t) + \underset{(\bar{p}_{11})}{\bar{v}}(t) \quad (19)$$

Ради простоты считаем, что векторы $\bar{x}_0$, $\bar{u}(t)$, $\bar{v}(t)$ независимы при $\bar{t} \geq \bar{t}_0$ и

$$\begin{aligned} M[\bar{u}(t) \bar{u}^T(\bar{t})] &= \underline{Q}(t) \delta(t - \bar{t}), \\ M[\bar{v}(t) \bar{v}^T(\bar{t})] &= \underline{R}(t) \delta(t - \bar{t}). \end{aligned} \quad (20)$$

Определим систему управления движущегося объекта, которая на основе линейной обработки результатов измерений определяет значение заданной линейной формы $\bar{x}^T \bar{x}(t_f)$ в момент времени $\bar{t} = \bar{t}_f$, $(t, \bar{t}) \in (t_0, T)$

$(\bar{t}_f \leq \bar{t}_0)$ с минимальной среднеквадратической ошибкой. Такие системы могут быть представлены матрицей весовых функций $\underline{K}(\bar{t}, \bar{t})$, $(\bar{t}, \bar{t}) \in (t_0, T)$

Ошибку системы $\bar{e}(\bar{t}_f)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{e}(\bar{t}_f) &= \int_{t_0}^{\bar{t}_f} \bar{x}^T \underline{K}(\bar{t}_f, \bar{t}) \underline{H}(\bar{t}) \bar{x}(\bar{t}) d\bar{t} + \\ &+ \int_{t_0}^{\bar{t}_f} \bar{x}^T \underline{K}(\bar{t}_f, \bar{t}) \bar{v}(\bar{t}) d\bar{t} - \bar{x}^T \bar{x}(\bar{t}_f). \end{aligned} \quad (21)$$

Рассматриваемой системе соответствует структурная схема рис.2.

Используя свойство сопряженных систем [2], выражение (21) для ошибки преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \bar{e}(\bar{t}_f) &= \bar{c}_0^T \bar{x}(\bar{t}_0) + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} \bar{x}^T(\bar{t}) \underline{L}(\bar{t}) \dot{\bar{x}}(\bar{t}) d\bar{t} + \\ &+ \int_{t_0}^{\bar{t}_f} \bar{x}^T(\bar{t}) \underline{G}(\bar{t}) \bar{u}(\bar{t}) d\bar{t} + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} \bar{x}^T \underline{K}(\bar{t}_f, \bar{t}) \bar{v}(\bar{t}) d\bar{t}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\bar{x}(\bar{t})$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = -\underline{A}^T(\bar{t}) \bar{x}(\bar{t}) - \underline{H}^T(\bar{t}) \underline{K}(\bar{t}_f, \bar{t}) \bar{x}, \\ \bar{x}(\bar{t}_f) = -\bar{x}. \end{cases} \quad (23)$$

Проводя операцию усреднения, получим

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}^2(\bar{t}_1) = & \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{z}^T(\bar{t}) \underline{G}(\bar{t}) \underline{Q}(\bar{t}) \underline{G}^T(\bar{t}) \bar{z}(\bar{t}) d\bar{t} + \\
& + \left\{ \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{z}^T(\bar{t}) \underline{L}(\bar{t}) \underline{f}_{12}(\bar{t}) d\bar{t} \right\}^2 + \bar{z}^T(\bar{t}_0) \bar{C}_0^T \bar{C}_0^T \bar{z}(\bar{t}_0) + \\
& + \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{x}^T K(\bar{t}_1, \bar{t}) R(\bar{t}) K^T(\bar{t}_1, \bar{t}) \bar{z} d\bar{t}.
\end{aligned} \quad (24)$$

Если ввести новые переменные, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{aligned}
\bar{z}_{n+1} &= \bar{z}^T(\bar{t}) \underline{L}(\bar{t}) \underline{f}_{12}(\bar{t}), & \bar{z}_{n+1}(\bar{t}_0) &= 0; \\
\bar{z}_{n+2} &= \bar{z}^T(\bar{t}) \underline{G}(\bar{t}) \underline{Q}(\bar{t}) \underline{G}^T(\bar{t}) \bar{z}(\bar{t}), & \bar{z}_{n+2}(\bar{t}_0) &= 0; \\
\bar{z}_{n+3} &= \bar{x}^T K(\bar{t}_1, \bar{t}) R(\bar{t}) K^T(\bar{t}_1, \bar{t}) \bar{z}, & \bar{z}_{n+3}(\bar{t}_0) &= 0,
\end{aligned} \quad (25)$$

то окончательно задача синтеза может быть сформулирована следующим образом:

Задана система дифференциальных уравнений (23) и (25), требуется выбрать матрицу $K(\bar{t}_1, \bar{t})$, которая при выполнении необходимых краевых условий минимизировала бы средний квадрат ошибки

$$\bar{\varepsilon}^2(\bar{t}_1) = \bar{z}_{n+1}^2(\bar{t}_1) + \bar{z}_{n+2}^2(\bar{t}_1) + \bar{z}_{n+3}^2(\bar{t}_1) + \bar{z}^T(\bar{t}_0) \bar{C}_0^T \bar{C}_0^T \bar{z}(\bar{t}_0). \quad (26)$$

Отметим, что если вектор $\bar{z}$ может принимать произвольные значения, то приходим к задаче фильтрации.

Применяя для решения задачи принцип максимума Л.С.Понтрягина, приходим к тому, что решение задачи синтеза сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\bar{\dot{x}} = -A^T \bar{x} - H^T(\bar{t}) K^T(\bar{t}_p, \bar{t}) \bar{x},$$

$$\bar{x}(\bar{t}_p) = -\bar{x};$$

$$\bar{\dot{x}}_{n+1} = \bar{x}^T(\bar{t}) L(\bar{t}) \bar{f}_p(\bar{t}),$$

$$\bar{x}_{n+1}(\bar{t}_p) = 0;$$

$$\bar{\dot{x}}_{n+2} = \bar{x}^T(\bar{t}) G G^T \bar{x}(\bar{t}),$$

$$\bar{x}_{n+2}(\bar{t}_p) = 0;$$

$$\bar{\dot{x}}_{n+3} = \bar{x}^T K(\bar{t}_p, \bar{t}) R(\bar{t}) K^T(\bar{t}_p, \bar{t}) \bar{x},$$

$$\bar{x}_{n+3}(\bar{t}_p) = 0;$$

$$\bar{\dot{\psi}} = A(\bar{t}) \bar{\psi} - 2 \bar{x}_{n+1}(\bar{t}_p) L(\bar{t}) \bar{f}_p(\bar{t}) + 2 G G^T \bar{x},$$

(27)

$$K(\bar{t}_p, \bar{t}) \bar{x}^T = -\frac{1}{2} R^{-1}(\bar{t}) H(\bar{t}) \bar{\psi}(\bar{t}),$$

$$\bar{\psi}(\bar{t}_p) = 2 \bar{C}_p^T \bar{C}_p^T \bar{x}(\bar{t}_p).$$

$$\bar{\dot{x}}^2(\bar{t}_p) = -\frac{1}{2} \bar{x}^T \bar{\psi}(\bar{t}_p),$$

Уравнения (27) позволяют определить оптимальную весовую функцию системы не только при заданном $\bar{f}_p(\bar{t})$, но и при наихудшем поведении противника. В этом случае система наведения может быть определена из условий [2]:

$$I \max_{\bar{f}_p \in U} \min_{\bar{x}} \bar{\dot{x}}^2[K(\bar{t}_p, \bar{t}), \bar{f}_p(\bar{t})]; \quad (28)$$

$$II \min_{\bar{x}} \max_{\bar{f}_p \in U} \bar{\dot{x}}^2[K(\bar{t}_p, \bar{t}), \bar{f}_p(\bar{t})]. \quad (29)$$

Решение задачи I требует проведения операции максимизации по $\bar{f}_p \in U$ для системы (27); решение задачи II приводит к изменению уравнения (9) только для $\bar{x}_{n+1}$ и $\bar{\psi}$, которые запишутся следующим образом:

$$\bar{z}_{n+1} = \max_{\bar{u} \in U} \bar{z}^T(\bar{t}) \underline{L}(\bar{t}) \bar{J}_2(\bar{t}),$$

$$\bar{\Psi} = \underline{A}(\bar{t}) \bar{\Psi} - \bar{\Psi}_{n+1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^T} [\max_{\bar{u}} \bar{z}^T \underline{L}(\bar{t}) \bar{J}_2(\bar{t})]. \quad (30)$$

Если предположить, что все воздействия, приложенные к системе управления, и ошибки измерения являются случайными с нулевым математическим ожиданием, вектор $\bar{x}$ — произвольным, то замена в (27)

$$\bar{\Psi}(\bar{t}) = \underline{P}(\bar{t}) \bar{z}(\bar{t}),$$

$$\underline{P}(\bar{t}_0) = \underline{z}_0 \underline{z}_0^T \quad (31)$$

приводит к известному уравнению, которому должна удовлетворить дисперсионная матрица оптимальной системы и оптимальная оценка фазовых координат

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = -\underline{P}\underline{A}^T + \underline{A}\underline{P} - \underline{P}\underline{H}^T \underline{R}^{-1} \underline{H}\underline{P} + \underline{G}\underline{Q}\underline{G}^T, \quad (32)$$

$$\underline{P}(\bar{t}_0) = \underline{z}_0 \underline{z}_0^T,$$

$$\frac{d\hat{x}(\bar{t})}{dt} = [\underline{A}(\bar{t}) - \underline{K}(\bar{t}, \bar{t}) \underline{H}(\bar{t})] \hat{x}(\bar{t}) + \underline{K}(\bar{t}, \bar{t}) [\underline{H} \hat{x}(\bar{t}) + \bar{v}].$$

Если отсутствуют случайные воздействия, приложенные к объекту $\bar{u}(\bar{t}) = 0$, уравнения для определения сечений оптимальных функций веса могут быть записаны в виде:

$$\dot{\bar{x}} = -\underline{A}^T \bar{x} - \underline{H}^T \underline{K}^T(\bar{t}_1, \bar{t}) \bar{x},$$

$$\bar{x}(\bar{t}_1) = -\bar{x}, \quad (33)$$

$$\bar{\Psi} = \underline{A}(\bar{t}) \bar{\Psi}, \quad \bar{\Psi}(\bar{t}_0) = \underline{z}_0 \underline{z}_0^T \bar{x}(\bar{t}_0).$$

$$\underline{\dot{x}}^T(t_n, \bar{t}) \underline{\bar{x}} = -\frac{1}{2} \underline{R}^{-1}(\bar{t}) \underline{H}(\bar{t}) \underline{\bar{\varphi}}(\bar{t}),$$

$$\underline{\bar{E}}^2(\bar{t}) = -\frac{1}{2} \underline{\bar{x}}^T \underline{\bar{\varphi}}(\bar{t}_n).$$

Ее решение имеет вид

$$\underline{\bar{x}}^T \underline{\kappa}(\bar{t}_n, \bar{t}) = \underline{\bar{x}}^T \underline{\varphi}(\bar{t}_n, \bar{t}_0) [\underline{E} + \underline{\bar{C}}_0^T \underline{\bar{C}}_0^T \underline{D}]^{-1} \underline{\bar{C}}_0^T \underline{\bar{C}}_0^T \underline{\varphi}^T(\bar{t}, \bar{t}_0) \underline{H}^T \underline{R}^{-1}(\bar{t}). \quad (34)$$

$$\underline{\bar{E}}^2(\bar{t}) = \underline{\bar{x}}^T \underline{\varphi}(\bar{t}, \bar{t}_0) [\underline{E} + \underline{\bar{C}}_0^T \underline{\bar{C}}_0^T \underline{D}]^{-1} \underline{\bar{C}}_0^T \underline{\bar{C}}_0^T \underline{\varphi}^T(\bar{t}, \bar{t}_0) \underline{\bar{x}}, \quad (35)$$

где $\underline{\varphi}(\bar{t}, \bar{t}_0)$ - переходная матрица объекта

$$\underline{D} = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_n} \underline{\varphi}^T(\bar{\mu}, \bar{t}_0) \underline{H}^T(\bar{\mu}) \underline{R}^{-1}(\bar{\mu}) \underline{H}(\bar{\mu}) \underline{\varphi}(\bar{\mu}, \bar{t}_0) d\bar{\mu}. \quad (36)$$

Вопросы реализации оптимальных систем управления с помощью простых корректирующих устройств в настоящее время еще недостаточно исследованы. Алгоритмы обработки информации, получаемые с учетом дополнительных ограничений на управления, могут быть практически реализованы только с применением вычислительных машин, и, кроме того, оптимальные системы иногда критичны к воздействиям, отличным от расчетных.

Однако системы наведения, оптимальные по точности в фиксированный момент времени, могут быть реализованы с помощью стационарных корректирующих устройств.

Действительно, рассмотрим, например, структурную схему системы наведения, представленной в виде рис.3, на котором

$\underline{W}_0(\bar{t}, \bar{t}_0)$ - известная функция веса общей части; $\underline{M}_0(\bar{t}, \bar{t}_0)$; $\underline{P}_0(\bar{t}, \bar{t}_0)$
 $\underline{R}_0(\bar{t}, \bar{t}_0)$ - весовые функции заданных звеньев; $\underline{Q}_0(\bar{t}, \bar{t}_0)$ - функции веса корректирующих звеньев.

Предположим, что в результате решения оптимальной по точности задачи в фиксированный момент времени найдены сечения весовых функций $\underline{a}_{\bar{q}}(\bar{t}, \bar{\tau})$ ($\bar{t} = 1, \dots, n$), связывающих входы в точках $\bar{a}_{\bar{q}}(\bar{t} = 1, \dots, n)$ с выходом в точке C и определенных на интервале $(-\infty \leq \bar{\tau} \leq \bar{t}_1)$. Можно показать, что интегральные уравнения, связывающие функции веса замкнутой системы и отдельных звеньев, приводятся к виду

$$\underline{a}_{\bar{q}}(\bar{t}, \bar{\tau}) = \underline{W} \circ \underline{\Phi} \circ \underline{P} \circ \underline{M}_{\bar{q}} - \sum_{\bar{q}=1}^n \underline{a}_{\bar{q}} \circ \underline{M}_{\bar{q}}^{-1} \circ \underline{R}_{\bar{q}} \circ \underline{W} \circ \underline{\Phi} \circ \underline{P} \circ \underline{M}_{\bar{q}} \quad (37)$$

где $A \circ B = \int_0^1 A(t, \bar{x}) B(\bar{x}, \tau) d\bar{x}$

Преобразование Лапласа по переменной $\bar{t}, -\bar{\tau}$ от обеих частей (37) в случае стационарных корректирующих фильтров $\underline{\Phi}_{\bar{q}}(\bar{t} - \bar{\tau})$ приводит к следующему соотношению для определения $\underline{\Phi}_{\bar{q}}(\bar{s})$:

$$\underline{\Phi}_{\bar{q}}(\bar{s}) = \frac{\underline{L}[\underline{a}_{\bar{q}} \circ \underline{M}_{\bar{q}}^{-1} \circ \underline{P} \circ \underline{W}]}{\underline{W}(\bar{s}, \bar{t}_1) - \sum_{\bar{q}=1}^n \underline{L}[\underline{a}_{\bar{q}} \circ \underline{M}_{\bar{q}}^{-1} \circ \underline{R}_{\bar{q}} \circ \underline{W}]} \quad (38)$$

Приведенные методы синтеза являются общими для таких, на первый взгляд, различных систем наведения, как системы самонаведения, телеуправления и автономные системы.

На рис. 4 показаны примеры структурных схем систем самонаведения, телеуправления и автономного управления.

Всем системам наведения обычно свойственно измерение координат движущегося объекта (КДО) непосредственно на бортах движущегося объекта (ДО).

Система самонаведения отличается тем, что в ней на движущемся объекте осуществляется измерение относительных координат (ЛК).

Система телеуправления отличается тем, что в ней измерение абсолютных или относительных координат цели и движущегося объекта производится в третьей точке (подвижной или неподвижной).

Сформулированные команды передаются на борт по линии связи (ЛС).

Системы автономного управления отличаются тем, что в них заранее определенные координаты цели запоминаются на борту движущегося объекта и на основании вычисленных относительных координат вырабатываются команды управления.

На структурных схемах:

КС - кинематические соотношения, связывающие координаты цели и движущегося объекта с непосредственно измеряемыми величинами.

ОИ - ошибки измерения;

КФ - корректирующие фильтры;

В - возмущения, действующие на движущийся объект.

§ 3. ПРИМЕР СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ТОЧНОСТИ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ (СИСТЕМА САМОНАВЕДЕНИЯ)

Рассмотрим пример синтеза оптимальной системы самонаведения в плоскости.

Примем, что звено кинематических связей, в предположении постоянства скорости сближения $\dot{\omega}$ объектов, описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\omega}_A = \frac{2}{\tau_A^2} \bar{\omega}_A + \frac{\dot{J}_A - \dot{J}_C}{\tau_A(\tau_A - 1)}, \quad (39)$$

где τ_A - время самонаведения;

$\bar{\omega}_A$ - угловая скорость линии визирования;

$\dot{J}_A, \dot{J}_C$ - соответственно нормальные к линии визирования ускорения цели и наводящегося объекта.

Учтем следующие воздействия:

1. Начальную ошибку наведения. Мгновенные значения угловой скорости линии визирования и пролета связаны соотношением

$$\bar{h}(t) = \frac{\sigma^2(t)}{|\underline{D}|} \bar{\omega}_A(t) = |\underline{B}|(\bar{t}_0 - t)^2 \bar{\omega}_A \quad (40)$$

Примем, что начальная ошибка является случайной величиной с заданной дисперсией $\bar{\omega}_{A0}^2$; $M[\bar{\omega}_{A0}] = 0$.

2. Маневр цели. Рассмотрим его как случайную величину, характеризующую ее дисперсией $\bar{J}_{\bar{A}}^2$, $M[\bar{J}_{\bar{A}}] = 0$, постоянную в течение всего времени, на которое рассчитывается оптимальная система.

3. Постоянную ошибку измерения, характеризующую дисперсией $\bar{\delta}_{\bar{A}}^2$, $M[\bar{\delta}_{\bar{A}}] = 0$ и представляющую дополнительную ложную угловую скорость линии визирования.

4. Помеху, возникающую при измерении угловой скорости линии визирования. Предполагается, что помеха является аддитивным сигналом по углу линии визирования с корреляционной функцией

$$R_{\bar{p}}(\bar{t}, \bar{t}) = G_p \bar{\delta}(\bar{t} - \bar{t}) + \frac{G_p \bar{\delta}(\bar{t} - \bar{t})}{|\underline{D}|^2 (\bar{t}_0 - \bar{t})^2} \quad (41)$$

5. Возмущения, действующие на движущийся объект, учитывать не будем. В связи с этим измеритель собственных координат движущегося объекта будем считать отсутствующим. Такое упрощение допустимо, если при расчете учитывается маневр цели.

С учетом сделанных предположений о входных сигналах для задачи синтеза системы самонаведения уравнения объекта запишем в виде:

$$\begin{cases} \bar{\dot{x}}_1 = \frac{R}{\bar{t}_0 - t} \bar{x}_1 + \frac{\bar{x}_0}{|\underline{D}|(\bar{t}_0 - \bar{t})}, \\ \bar{\dot{x}}_2 = \bar{\dot{x}}_1, \\ \bar{\dot{x}}_3 = 0, \\ \bar{\dot{x}}_4 = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Измеряется величина

$$\underline{y} = \bar{x}_2 + \bar{z}\bar{x}_3 + \bar{\sigma}(\bar{t}), \quad (43)$$

$$\underline{H}(\bar{t}) = \|0, 1, t, 0\|. \quad (44)$$

Переходная матрица системы (42) легко определяется и может быть представлена в виде

$$\underline{\Phi}(\bar{t}, \bar{t}) = \begin{vmatrix} \frac{(\bar{t}_0 - \bar{t})^2}{(\bar{t}_0 - \bar{t})^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2|\underline{H}|} \left[\frac{(\bar{t}_0 - \bar{t})^2}{(\bar{t}_0 - \bar{t})^2} - 1 \right] \\ \frac{(\bar{t}_0 - \bar{t})(\bar{t} - \bar{t})}{\bar{t}_0 - \bar{t}} & 1 & 0 & \frac{(\bar{t} - \bar{t})^2}{2|\underline{H}|(\bar{t}_0 - \bar{t})} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (45)$$

Будем отыскивать сечение функции веса, связывающей измеряемый угол линии визирования $\underline{y}(\bar{t})$ с пролетом, из условия минимума среднего квадрата пролета в момент $\bar{t}_1$ за некоторое время $\bar{\Delta} = \bar{t}_0 - \bar{t}_1$ от момента встречи.

Поскольку пролет связан с координатой $\bar{x}_2 = \bar{w}$, соотношением (40), то в качестве вектора $\bar{x}$ следует принять

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} |\underline{H}| \bar{\Delta}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (46)$$

и

$$\bar{x}^T \underline{K}(\bar{t}_1, \bar{t}) = |\underline{H}| \bar{\Delta}^2 \underline{K}_1(\bar{t}_1, \bar{t}). \quad (47)$$

В предположении некоррелированности начальной ошибки маневра цели и ошибки измерения ω_A дисперсионная матрица начальных условий запишется так:

$$\overline{\vec{c}_0 \vec{c}_0^T} = \begin{vmatrix} \overline{\omega_A^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\delta_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\tilde{\tau}_0^2} \end{vmatrix} \quad (48)$$

Подставляя выражения (44)–(48) в (33) и производя некоторые преобразования для определения функции веса $K_H(t, \bar{c})$, связывающей $y(t)$ с угловой скоростью линии визирования, получим уравнение

$$\begin{aligned} |\underline{\Delta}| \bar{\Delta}^2 K_H(\bar{t}, \bar{c}) &= \frac{1}{\underline{\epsilon}_A + \sigma_A^2 / |\underline{\Delta}|^2 (\underline{t}_A - \bar{c})} \left\{ \frac{|\underline{\Delta}| \bar{t}_A^3}{\underline{t}_A - \bar{c}} \overline{\omega_A^2} + \right. \\ &+ \frac{\bar{c}^2 (\underline{t}_A - \bar{c})}{4 |\underline{\Delta}| (\underline{t}_A - \bar{c})} \int_{\underline{t}_A}^{\bar{t}} |\underline{\Delta}| \bar{\Delta}^2 K_H(\bar{t}, \bar{\mu}) \frac{\bar{t}_A \bar{\mu}}{\underline{t}_A - \bar{\mu}} d\bar{\mu} \frac{\overline{\omega_A^2} \bar{c}^2}{\underline{t}_A - \bar{c}} - \\ &- \int_0^{\bar{t}} |\underline{\Delta}| \bar{\Delta}^2 K_H(\bar{t}, \bar{\mu}) \frac{\bar{\mu}^2}{4 |\underline{\Delta}| (\underline{t}_A - \bar{\mu})} d\bar{\mu} \frac{\bar{c}^2}{(\underline{t}_A - \bar{c})} \int_{\underline{t}_A}^{\bar{t}} - \\ &- \left. \int_0^{\bar{t}} |\underline{\Delta}| \bar{\Delta}^2 K_H(\bar{t}, \bar{\mu}) \bar{c}^2 \bar{\mu} d\bar{\mu} \bar{c} \right\} \quad (0 \leq \bar{c} \leq \bar{t}_1) \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь принято, что система самонаведения включается в момент времени $\bar{t}_0 = 0$.

Для упрощения записи уравнения оптимальности (49) произведем следующие операции: разделим обе части уравнения на $\frac{|\underline{\Delta}| \bar{\Delta}}{\underline{t}_A - \bar{c}}$; обозначим $\bar{\Delta}^2 = \bar{c}^2 \overline{\omega_A^2}$; $\bar{\Delta}^2 = \int_{\underline{t}_A}^{\bar{t}} / |\underline{\Delta}|^2$, сделаем заме-

ну

$$\underline{w}_r(\bar{t}, \bar{c}) = \frac{\Delta}{\underline{t}_A - \bar{c}} K_H(\bar{t}, \bar{c}). \quad (50)$$

функция веса $W_q(t_p, \bar{r})$ связывает величину $\frac{e}{|\dot{\omega}|}$ - линейное рассогласование, деленное на модуль скорости сближения с угловой скоростью линии визирования, умноженной на время

$\bar{\Delta} = t_p - t_n$, оставшееся до встречи ЛА с целью.

С учетом введенных обозначений уравнений (13) перепишем в виде

$$\begin{aligned} W_q(t_p, \bar{r}) + \frac{1}{\bar{\Delta}_q(\bar{r}_p - \bar{r})^2 + \frac{\bar{e}^2}{|\dot{\omega}|^2}} \left\{ \bar{\Delta}_q^2 \bar{r} \int_0^{\bar{\Delta}_q} W_q(\bar{t}_n, \bar{\mu}) d\bar{\mu} + \right. \\ \left. + \bar{\Delta}_q^2 \frac{\bar{r}^2}{4} \int_0^{\bar{\Delta}_q} W_q(\bar{t}_n, \bar{\mu}) \bar{\mu}^2 d\bar{\mu} + \bar{\Delta}_q^2 \bar{r}(\bar{t}_p - \bar{r}) \int_0^{\bar{\Delta}_q} W_q(\bar{t}_n, \bar{\mu}) (\bar{t}_p - \bar{\mu}) \bar{\mu} d\bar{\mu} \right\} = \\ = \frac{1}{\bar{\Delta}_q(\bar{r}_p - \bar{r})^2 + \frac{\bar{e}^2}{|\dot{\omega}|^2}} \left\{ \bar{\Delta}_q^2 \frac{\bar{r}_p \bar{r}}{\bar{t}_p - \bar{r}} + \bar{\Delta}_q^2 \frac{\bar{r}^2}{4} \frac{2\bar{t}_p - \bar{t}_n}{\bar{t}_p - \bar{r}} \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Решение уравнения (51) или, что то же самое, уравнения (49) дается формулами (34)-(36).

Дисперсия оптимальной системы может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2(\bar{t}_p) = \bar{\omega}_{\bar{r}}^2 \bar{t}_p^2 |\dot{\omega}|^2 \left[\bar{t}_p^2 - \bar{\Delta}^2 \right] \int_0^{\bar{\Delta}} W_q(\bar{t}_n, \bar{\mu}) \bar{\mu} d\bar{\mu} + \\ + \bar{\omega}_{\bar{r}}^2 \frac{\bar{t}_p^2 - \bar{\Delta}^2}{4} \left[(\bar{t}_p^2 - \bar{\Delta}^2) - \int_0^{\bar{\Delta}} W_q(\bar{t}_n, \bar{\mu}) \bar{\mu}^2 d\bar{\mu} \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НАВЕДЕНИЯ

В настоящее время расчет систем наведения проводится в два этапа. На первом этапе кинематического исследования выбирается закон наведения, определяющий связь фазовых координат наводящегося объекта и цели в идеальных условиях без учета ошибок информационных элементов, некоторых энергетических ограничений и при заданном законе движения цели. На втором, динамическом этапе лишь уточняются параметры сглаживающих фильтров.

Изложенный в докладе метод позволяет решить данную задачу с одновременным учетом кинематических и динамических вопросов. При этом учет ошибок измерения фазовых координат и энергетических ограничений определяет структуру закона наведения, а не только его параметры. Без учета случайных ошибок существует бесчисленное множество законов наведения, а при их учете задача оптимизации имеет единственное решение. Известные в настоящее время законы наведения представляют, на наш взгляд, лишь удачные частные решения общей задачи. Исследование этой задачи может явиться предметом дальнейшего развития теории наведения.

Как показывает исследование рассмотренных задач, гипотеза о движении цели существенно влияет на структуру системы наведения и характеристики ее ошибок. В настоящее время предположения о характере движения цели основаны на типовых законах изменения ее фазовых координат. Более правомерным с точки зрения рассмотренных методов является определение гипотезы о движении цели в зависимости от степени ее информированности в фазовых координатах наводящегося объекта и его системы управления. Решение этой задачи может быть основано на методах теории игр и их развитии применительно к вопросам оптимального управления при наличии случайных возмущений.

С одной стороны, точность оптимальных систем наведения, рассчитанных без учета информационных и энергетических ограничений, достаточно высока и существенно уменьшается при учете ограничений, с другой — учет ограничений существенно усложняет системы наведения и повышает их критичность к предположениям об условиях функционирования систем. Системы наведения при этом описываются нелинейными операторами даже в случае гауссовых воздействий. В то же время инженерные методы решения задач управления с учетом ограничений и простоты реализации еще не получили необходимого развития

Отсутствуют приближенные общие методы синтеза корректирующих устройств в нелинейных САУ и при случайных воздействиях.

Попытка объединить существующие различные методики расчета систем наведения встречается с серьезными трудностями в связи с отсутствием методов оптимизации САУ при ограничениях их структуры. К этим задачам относятся, например, задачи оптимизации нестационарных систем с помощью стационарных корректирующих устройств или нелинейных систем с помощью линейных звеньев. К решению указанных задач часто сводятся требования простоты и надежности САУ.

В решении этих вопросов — одна из основных проблем теории наведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Современные методы проектирования САУ. Анализ и синтез. М., Изд-во "Машиностроение", 1967.
2. АЛЕКСАНДРОВ В.М. Минимаксный подход к решению задачи обработки информации, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1966, № 5.

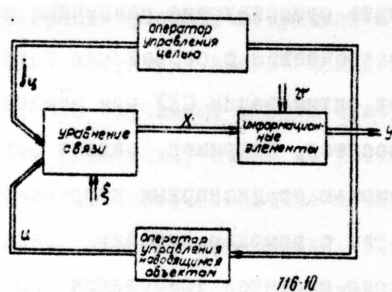


Рис. 1

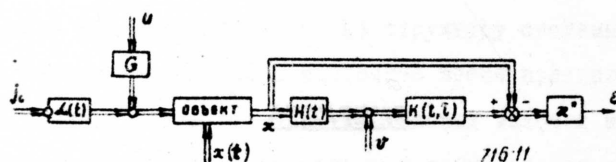


Рис. 2

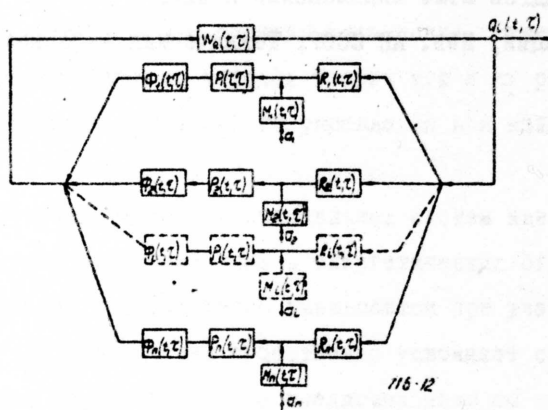


Рис. 3

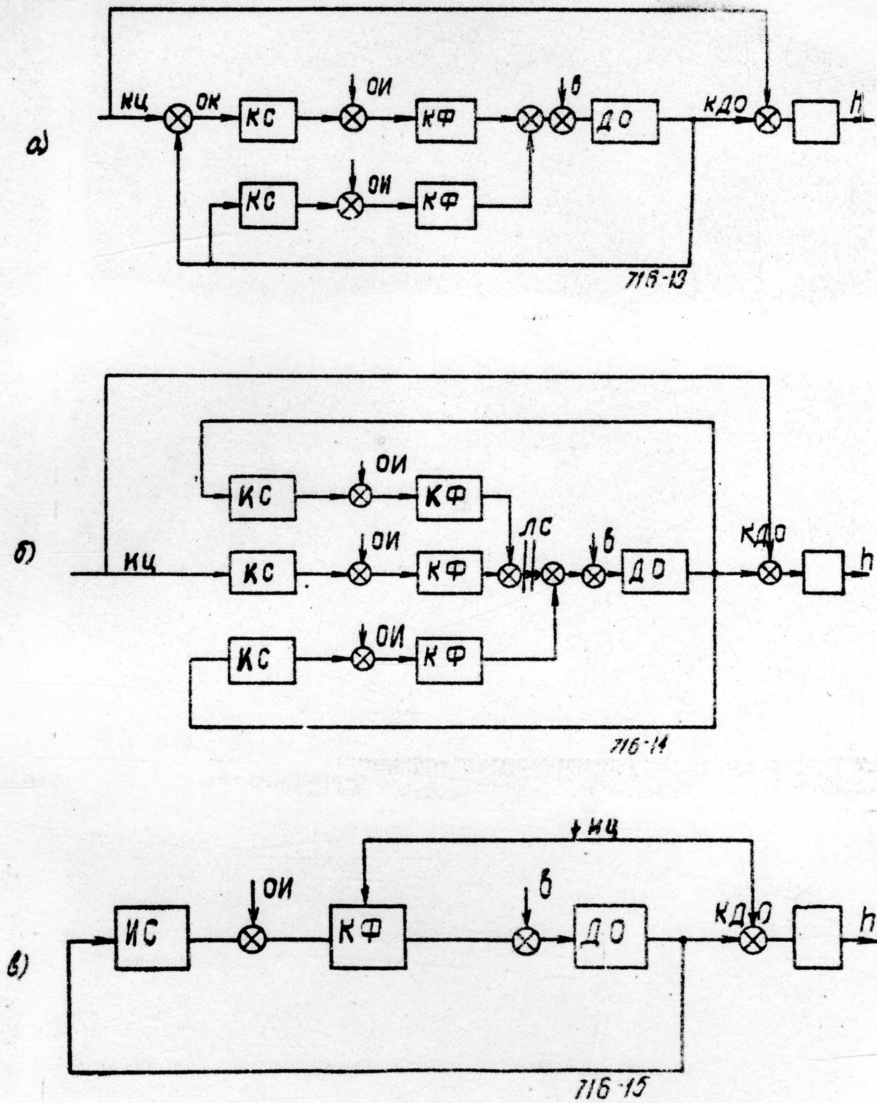


Рис. 4

