

# IFAC



WARSZAWA 1969

INTERNATIONAL FEDERATION  
OF AUTOMATIC CONTROL

## Multivariable Systems

Fourth Congress of the International  
Federation of Automatic Control  
Warszawa 16–21 June 1969

TECHNICAL  
SESSION

# 48



Organized by  
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce

INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL

# Multivariable Systems

TECHNICAL SESSION No 48

FOURTH CONGRESS OF THE INTERNATIONAL  
FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL  
WARSZAWA 16 – 21 JUNE 1969



Organized by  
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce



K-1317

Biblioteka  
Politechniki Białostockiej



1181076

### Contents

| Paper No. |                                                                                                                                                         | Page |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 48.1      | SU - S. V. Emelianov, N. E. Kostyleva, V. I. Utkin - Systems with Changable Structure in Identification Question and Multimeasured Objects Control..... | 3    |
| 48.2      | YU - M. Vukobratović, R. S. Rutman - Structural Properties of Dynamic Systems.....                                                                      | 21   |
| 48.3      | RA - A. Phagouapé - New Developments in the T.C.F. Method for Multivariable Control Systems.....                                                        | 41   |
| 48.4      | SU - V. V. Vielitchenko - Problem of Invariable System Synthesis.....                                                                                   | 53   |
| 48.5      | A - F. E. Thau - Optimum Control of a Class of Randomly-Excited Distributed-Parameter Systems.....                                                      | 65   |

Wydawnictwa Czasopism Technicznych NOT  
Warszawa, ul. Czackiego 3/5 — Polska



# СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

С.В.Емельянов, Н.Е.Костылева, В.И.Уткин

Институт автоматики и телемеханики

Москва  
СССР

При рассмотрении различных задач синтеза в классе систем с переменной структурой в большинстве случаев предполагалось [1-7], что в системе имеется одна управляемая величина и одно управляющее воздействие (или в многосвязных системах число управляемых величин равно числу управляющих воздействий), а само управляющее воздействие формируется из величины ошибки и ее производных. С практической точки зрения такой подход может натолкнуться на существенные технические трудности, связанные с получением производных. В то же время во многих случаях имеется возможность для измерения не только величины ошибки, но и каких-либо дополнительных координат, характеризующих состояние системы. Этой возможностью целесообразно воспользоваться при формировании функции управления. Другая особенность, которая зачастую присуща системам автоматического управления, заключается в том, что управляющие воздействия могут быть приложены к различным точкам объекта, т.е. управление является векторной величиной.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть возможности управления в классе систем с переменной структурой для общего случая, когда функция управления формируется с использованием информации в виде каких-либо координат системы, вообще говоря не являющихся ошибкой и ее производными, а сама функция управления является векторной величиной. Движение такой системы при отсутствии внешних возмущающих сил описывается дифференциальным уравнением



$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (I)$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$  -  $n$ -мерный вектор, характеризующий состояние системы,

$u = (u_1, \dots, u_m)$  -  $m$ -мерный вектор управления,

$A - n \times n$  - мерная матрица с постоянными элементами  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ),  $B - n \times m$  - мерная матрица с постоянными элементами  $b_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ ). Относительно управления  $u$  предполагается, что каждая из его компонент  $u_1, \dots, u_m$  является суммой воздействий по каким-либо координатам системы, причем коэффициенты воздействий являются кусочно-постоянными функциями и их изменение осуществляется в зависимости от состояния системы. Именно в этом и заключается переменность структуры рассматриваемой системы.

Предположим, что пространство координат системы с помощью некоторой совокупности гиперплоскостей разбито на области, в каждой из которых система обладает той или иной линейной структурой. На границах областей происходит изменение структуры, в результате чего функция управления может претерпевать разрывы. В таких системах при выполнении определенных условий возникает скользящий режим, характеризуемый тем, что траектория изображающей точки принадлежит границе разрыва [8]. Если динамические показатели движения в скользящем режиме удовлетворяют каким-либо требованиям, предъявляемым к системе автоматического управления, то целесообразно такое управление, при котором в любой точке границы разрыва выполняются условия существования скользящего режима. Тогда после попадания изображающей точки на границу разрыва в системе возникнет и не прекратится движение в скользящем режиме<sup>\*</sup>. Такой метод синтеза и использовался в работах [1-7] для случая, когда управление является скалярной функцией координаты ошибки и ее про-

---

<sup>\*</sup> Вопрос о попадании изображающей точки на границу разрыва заслуживает специального изучения и в настоящей работе не рассматривается.

изводных, а скользящий режим организуется на некоторой гиперплоскости в пространстве этих координат.

В настоящей работе описанный подход будет использован для систем с переменной структурой более общего вида (I) в предположении, что каждая из компонент вектора управления является воздействием по управляемой величине (пусть этой величиной будет координата  $x_1$ ) со скачкообразно изменяющимся коэффициентом воздействия. Как будет показано ниже, в этом случае для формирования закона изменения структуры необходимо иметь информацию о параметрах объекта. Если эти параметры заранее неизвестны, то возникает задача идентификации линейного объекта, возможности решения которой будут также рассмотрены с помощью методов теории систем с переменной структурой. В заключение приводится алгоритм, с помощью которого осуществляется идентификация линейной динамической системы второго порядка.

### I. Выбор управления

Рассмотрим случай, когда управление является векторной величиной и движение системы описывается уравнением (I). Предположим, что изменение структуры системы и, как следствие, скачкообразное изменение управления  $u$  будет иметь место, если в пространстве  $(x_1, \dots, x_n)$  изображающая точка попадет на некоторую гиперплоскость  $S$ , заданную уравнением

$$s = (c, x) = 0, \quad (I.1)$$

где  $c = (c_1, \dots, c_n)$ ,  $c_1, \dots, c_n - \text{const}$ ,  $c_n = 1$ .

Как уже отмечалось, в такой динамической системе может возникнуть скользящий режим и для его возникновения в окрестности гиперплоскости  $S$  должно выполняться неравенство [2]

$$s\dot{s} < 0 \quad \left( \dot{s} = \frac{ds}{dt} \right). \quad (I.2)$$

С геометрической точки зрения условие (I.2) означает, что в окрестности границы разрыва  $S$  фазовые траектории обеих

структур направлены встречно и после попадания на  $S$  изображающая точка продолжает свое движение в скользящем режиме по траекториям, принадлежащим этой гиперплоскости. Согласно данному в [8] доопределению в течение этого вида движения вектор фазовой скорости направлен вдоль гиперплоскости  $S$ , и, следовательно, в скользящем режиме справедливы соотношения

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{j} = 0. \quad (I.3)$$

Выясним, какими дифференциальными уравнениями описываются различные виды скользящих режимов, которые могут иметь место в рассматриваемом классе систем, если каждая из компонент  $u_1, \dots, u_m$  вектора  $U$  претерпевает разрывы при попадании изображающей точки на соответствующую гиперплоскость в пространстве  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Пусть скалярная функция  $u_m$  претерпевает разрывы на некоторой гиперплоскости  $S^1$ , заданной в пространстве  $(x_1, \dots, x_n)$  уравнением

$$s^1 = (c^1, x) = 0, \text{ где вектор } c^1 = (c_1^1, \dots, c_n^1), c_1^1, \dots, c_n^1 = \text{const}, \quad (I.4)$$

$$c_n^1 = 1.$$

При выполнении условия (I.2) на гиперплоскости  $S^1$  возникает скользящий режим. Получим уравнения движения изображающей точки в скользящем режиме по траекториям, принадлежащим  $S^1$ .

Как уже отмечалось, в скользящем режиме имеют место равенства (I.3). Из условий  $\dot{s}^1 = 0$ ,  $\dot{j}^1 = 0$  и уравнения движения (I) находим

$$x_n = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i^1 x_i,$$

$$u_m = - \frac{1}{(b_m, c^1)} \sum_{j=1}^{m-1} (b_j, c^1) u_j - \frac{1}{(b_m, c^1)} \sum_{j=1}^{n-1} [(a_j, c^1) - c_j^1 (a_m, c^1)] x_j. \quad (I.5)$$

В (I.5)  $a_j$  ( $j=1, \dots, n$ ),  $b_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) - столбцы матриц  $A$  и  $B$ ,  $(b_m, c^1) \neq 0$ . В результате подстановки полученных значений  $x_n$  и  $u_m$  в (I) определим дифференциальное уравнение  $n-1$ -го порядка относительно  $x_1, \dots, x_{n-1}$  с  $m-1$ -мер-



ным управлением, описывающее движение системы в скользящем режиме

$$\frac{dx^1}{dt} = A^1 x^1 + B^1 u^1, \quad (I.6)$$

где вектор  $x^1 = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , вектор  $u^1 = (u_1, \dots, u_{m-1})$ ,  $A^1$  и  $B^1$  соответственно  $(n-1) \times (n-1)$  и  $(n-1) \times (m-1)$  - мерные матрицы с элементами  $a'_{ij} (i, j = 1, \dots, n-1)$  и  $b'_{ij} (i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, m-1)$

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{in} c_j^1 - \frac{b_{im}}{(b_m, c^1)} [(a_j, c^1) - c_j^1 (a_n, c^1)],$$

$$b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{im}}{(b_m, c^1)} (b_j, c^1). \quad (I.7)$$

Решение уравнения (I.6) является проекцией решения исходной системы в скользящем режиме на подпространство  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ . В этом подпространстве можно также выбрать гиперплоскость  $S^2$ , заданную уравнением  $s^2 = (c^2, x^1) = 0$ ,  $c^2 = (c_1^2, \dots, c_{n-1}^2)$ ,  $c_{n-1}^2 = 1$  и за счет разрывного управления  $u_{m-1}$  обеспечить возникновение скользящего режима на  $S^2$ . Очевидно, что движение в скользящем режиме по линейному многообразию  $(n-2)$ -го порядка, определяемому в пространстве  $(x_1, \dots, x_n)$  пересечением  $S^1$  и  $S^2$ , будет описываться дифференциальным уравнением  $(n-2)$ -го порядка относительно  $x^2 = (x_1, \dots, x_{n-2})$  с  $(m-2)$ -мерным управлением  $u^2 = (u_1, \dots, u_{m-2})$ .

Повторяя проведенные рассуждения на  $K$ -ом шаге получим движение в скользящем режиме  $(n-K)$ -го порядка по пересечению гиперплоскостей  $S^1, \dots, S^K$ , заданных уравнениями

$$s^i = (c^i, x^{i-1}) = 0, \quad (I.8)$$

где вектор  $c^i = (c_1^i, \dots, c_{n-i+1}^i)$ ,  $c_{n-i+1}^i = 1$ , вектор  $x^i = (x_1, \dots, x_{n-i})$ ,  $i = 1, \dots, K$ ,  $1 \leq K \leq m$ ,  $x^0 = x$ .

Уравнение этого движения относительно координат  $x_1, \dots, x_{n-k}$  имеет вид

$$\frac{dx^k}{dt} = A^k x^k + B^k u^k, \quad (I.9)$$

где  $A^k$  и  $B^k$  - матрицы с размерностями соответственно  $(n-k) \times (n-k)$  и  $(n-k) \times (m-k)$ , с элементами  $a_{ij}^k$  и  $b_{ij}^k$ , вектор  $u^k = (u_1, \dots, u_{m-k})$ .

Элементы  $a_{ij}^k$  и  $b_{ij}^k$  матриц  $A^k$  и  $B^k$  определяются рекуррентными соотношениями

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{i, n-k+1}^{k-1} c_j^k - \frac{b_{i, m-k+1}^{k-1}}{(b_{m-k+1, 1}^{k-1}, c^k)} [(a_{j, 1}^{k-1}, c^k) - c_j^k (a_{n-k+1, 1}^{k-1}, c^k)], \quad (I.10)$$

$$b_{ij}^k = b_{ij}^{k-1} - \frac{b_{i, m-k+1}^{k-1}}{(b_{m-k+1, 1}^{k-1}, c^k)} (b_{j, 1}^{k-1}, c^k),$$

$$k = 1, \dots, m, \quad a_{ij}^0 = a_{ij}, \quad b_{ij}^0 = b_{ij}.$$

Верхний индекс для  $a$  и  $b$  указывает на то, элементом какой матрицы является данная величина, двойной нижний индекс - на номер строки и столбца, одиночный нижний индекс указывает на то, что данный элемент является вектором-столбцом и на его номер. Предполагается, что в (I.10)  $(b_{m-k+1, 1}^{k-1}, c^k) \neq 0$  для любого  $k$ .

Для случая, когда  $k=m$ , получаем линейное однородное дифференциальное уравнение  $(n-m)$ -го порядка

$$\frac{dx^m}{dt} = A^m x^m. \quad (I.11)$$

Как видно из (I.10), (I.11), при одновременном возникновении скользящего режима на всех гиперплоскостях  $S_1', \dots, S_m'$  движение в системе описывается уравнением с меньшей, чем у исходного размерностью и зависит от всех коэффициентов  $c_2^k$

$$(k=1, \dots, m; \quad z=1, \dots, n-k+1).$$

Если за счет соответствующего выбора коэффициентов  $C_z^k$  удастся наделить это движение требуемыми динамическими свойствами, то каждую из гиперплоскостей  $S^k$  в пространстве  $(x_1, \dots, x_{n-k+1})$  целесообразно сделать гиперплоскостью скольжения. Тогда в результате последовательного понижения порядка дифференциального уравнения движения в скользящем режиме финальная стадия процесса управления будет описываться уравнением (I.II). Попробуем решить поставленную задачу в классе систем с переменной структурой.

Выберем скалярную функцию  $U_{m-k+1}$  таким образом, чтобы для системы, описываемой уравнением

$$\frac{dx^{k-1}}{dt} = A^{k-1} x^{k-1} + B^{k-1} U^{k-1}, \quad (I.I2)$$

условия существования скользящего режима (I.2) выполнялись в любой точке гиперплоскости  $S^k$ , заданной в пространстве  $(x_1, \dots, x_{n-k+1})$  уравнением

$$S^k = (C^k, x^{k-1}) = 0. \quad (I.I3)$$

Будем считать, что каждая из компонент вектора управления является воздействием по какой-либо одной координате, например по  $x_1$ , со скачкообразно меняющимся коэффициентом

$$U_i = \psi^i x_1, \quad \psi^i = \begin{cases} \alpha^i & \text{при } S^{m-i+1} x_1 > 0 \\ \beta^i & \text{при } S^{m-i+1} x_1 < 0 \end{cases} \quad i=1, \dots, m, \quad (I.I4)$$

где  $\alpha^i, \beta^i - \text{const}$ . (Заметим, что аналогичный алгоритм управления рассматривался в [2]).

Определим величину  $j^k$  на гиперплоскости  $S^k$  из (I.I2-I.I4)

$$j^k = \sum_{j=2}^{n-k} [(a_j^{k-1}, c^k) - c_j^k (a_{n-k+1}^{k-1}, c^k)] x_j - [(a_1^{k-1}, c^k) - \quad (I.I5)$$

$$-c_1^k(a_{n-k+1}^{k-1}, c^k) - \sum_{j=1}^{m-k} (\beta_j^{k-1}, c^k) \psi_j^1 - (\beta_{m-k+1}^{k-1}, c^k) \psi^{m-k+1} \Big] x_1.$$

Отметим, что согласно (I.14) величина  $\psi^{m-k+1}$  скачкообразно изменяется на гиперплоскости  $S^k$ . Из (I.2) и (I.15) получаем необходимые и достаточные условия существования скользящего режима в любой точки гиперплоскости

$$\begin{aligned} (\beta_{m-k+1}^{k-1}, c^k) \beta^{m-k+1} &> (a_1^{k-1}, c^k) - c_1^k(a_{n-k+1}^{k-1}, c^k) - \min_{\psi_1, \dots, \psi^{m-k}} \sum_{j=k}^{m-k} (\beta_j^{k-1}, c^k) \psi_j^j, \\ (\beta_{m-k+1}^{k-1}, c^k) \beta^{m-k+1} &< (a_1^{k-1}, c^k) - c_1^k(a_{n-k+1}^{k-1}, c^k) - \max_{\psi_1, \dots, \psi^{m-k}} \sum_{j=k}^{m-k} (\beta_j^{k-1}, c^k) \psi_j^j, \\ \frac{(a_j^{k-1}, c^k)}{c_j^k} &= (a_{n-k+1}^{k-1}, c^k), \quad j=2, \dots, n-k. \end{aligned} \quad (I.16)$$

Если условия (I.16) выполнены для  $k=1, \dots, m$ , то каждая из гиперплоскостей  $S_1^1, \dots, S_m^m$  будет гиперплоскостью скольжения.

Замечание. При синтезе управления выбор коэффициентов  $\alpha^k$  и  $\beta^k$  следует начать с  $\alpha^1$  и  $\beta^1$ , так как согласно (I.16) все последующие значения этих коэффициентов зависят от предыдущих.

Для рассматриваемого закона управления (I.14) все  $c_2^k$  должны удовлетворять второй группе условий в (I.16). Очевидно, что описанным алгоритмом целесообразно пользоваться, если в рамках этих ограничений движение системы в скользящем режиме, описываемое уравнением (I.11) удастся наделить требуемыми динамическими свойствами.

## 2. Методы систем с переменной структурой в задаче идентификации линейного объекта

Реализация полученного выше алгоритма управления требует информации о параметрах  $a_{ij}$  управляемого объекта. Однако в ряде случаев точные значения этих постоянных пара-



метров могут оказаться заранее неизвестными, например, они могут меняться при переходе от объекта к объекту, или в том случае, когда регулятор предназначается для управления различными видами объектов. Наконец, может оказаться, что параметры объекта меняются, но настолько медленно, что в пределах одного процесса управления этим изменением можно пренебречь. Во всех этих случаях возникает задача идентификации, которая сводится к определению параметров линейного объекта известной структуры. Рассмотрим возможность решения этой задачи методами систем с переменной структурой.

С этой целью рассмотрим предварительно следующую вспомогательную задачу. Пусть некоторое динамическое звено первого порядка описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = (a, f(t)), \quad (2.1)$$

где векторы  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ ,  $a_i - \text{const}$ ,  $f_i(t)$  - произвольные линейно независимые функции времени,  $(a, f(t))$  - скалярное произведение. Предполагается, что выходная величина  $x$  и функции  $f_i(t)$  известны. Задача состоит в определении неизвестных коэффициентов  $a_i$ .

Для решения задачи построим модель с переменной структурой, описываемую уравнением

$$\frac{dy}{dt} = u, \quad \text{управление } u = (\psi, f), \quad (2.2)$$

где вектор  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ ,

$$\psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } f_i \geq 0 \\ \beta_i & \text{при } f_i < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\alpha_i, \beta_i - \text{const}, \quad \beta_i \leq a_i \leq \alpha_i, \quad (2.4)$$

(возможный диапазон значений коэффициентов  $a_i$  будем считать известным),

$$\beta = x - y. \quad (2.5)$$

Как видно из (2.2) - (2.5), структура модели меняется в зависимости от рассогласования выходных величин идентифицируемого звена  $x$  и модели  $y$ .

Для исследования возможных видов движения в этой системе из (2.1), (2.2) и (2.5) определим величину  $\dot{f}$

$$\dot{f} = (\alpha - \psi), f). \quad (2.6)$$

Согласно (2.3) - (2.6) функции  $f$  и  $\dot{f}$  имеют разные знаки. Поэтому изображающая точка на плоскости  $(x, y)$  всегда попадает на прямую  $S (f=0)$  и после попадания движется по  $S$  с нулевым рассогласованием в скользящем режиме.

При работе системы в скользящем режиме управление меняется с бесконечно большой частотой. Согласно доопределению А.Ф.Филиппова [8] в скользящем режиме  $\dot{f}=0$  и

$$u = (\alpha, f). \quad (2.7)$$

Управление  $u$  "заставляет" изображающую точку двигаться по прямой  $S$ , причем  $u$ , как это видно из (2.7), зависит от параметров  $\alpha_i$ . Однако, реализуется управляющее воздействие без измерения этих параметров за счет скользящего режима. Необходимо отметить, что согласно (2.7) оно является непрерывной функцией. Это происходит потому, что введенное доопределение усредняет в каждый момент времени меняющееся с бесконечно большой частотой управление. Определим далее среднее значение каждого из  $\psi_i$ . Для этого закон (2.3) изменения  $\psi_i$  удобнее представить в форме

$$\psi_i = \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + \frac{\alpha_i - \beta_i}{2} \operatorname{sign} f_i s. \quad (2.8)$$

Пусть в течении малого интервала времени  $\Delta t$  движение в системе происходит следующим образом: время  $\Delta t_1$  движение соответствует структурам  $f > 0$ , время  $\Delta t_2$  движение соответствует структурам  $f < 0$ , причем  $\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t$ .

Тогда

$$\psi_{i\text{cp}} = \gamma \left( \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + \frac{\alpha_i - \beta_i}{2} \operatorname{sign} f_i \right) + (1 - \gamma) \left( \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} - \frac{\alpha_i - \beta_i}{2} \operatorname{sign} f_i \right), \quad (2.9)$$

где  $\gamma = \frac{\delta t_1}{\Delta t}$ .

Из условия  $\dot{s} = 0$  найдем значение  $\gamma$ .

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^n \left( -\alpha_i - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + \frac{\alpha_i - \beta_i}{2} \operatorname{sign} f_i \right) f_i}{\sum_{i=1}^n \left[ (\alpha_i - \beta_i) \operatorname{sign} f_i \right] f_i} \quad (2.10)$$

Очевидно  $\gamma = \text{const}$ , если отношение коэффициентов линейных форм постоянно, т.е.

$$\frac{-\alpha_i - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} + \frac{\alpha_i - \beta_i}{2} \operatorname{sign} f_i}{(\alpha_i - \beta_i) \operatorname{sign} f_i} = \frac{-\alpha_n - \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} + \frac{\alpha_n - \beta_n}{2} \operatorname{sign} f_n}{(\alpha_n - \beta_n) \operatorname{sign} f_n} \quad (2.11)$$

Из (2.11) получаем значение  $\beta_i$ , при котором величина  $\gamma$  не меняется во времени

$$\beta_i = \beta_{i0} = \frac{\left( -\alpha_i - \frac{\alpha_i}{2} \right) (\alpha_n - \beta_n) \operatorname{sign} f_n - \alpha_i \left( -\alpha_n - \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \right) \operatorname{sign} f_i}{\frac{\alpha_n - \beta_n}{2} \operatorname{sign} f_n - \left( -\alpha_n - \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \right) \operatorname{sign} f_i} \quad (2.12)$$

Если все  $\beta_i$  удовлетворяют условию (2.12), то  $\gamma = \text{const}$  и в силу (2.9)  $\psi_{i\text{cp}} = \text{const}$ . Согласно доопределению скользящего режима  $\dot{s} = 0$ , поэтому в силу линейной независимости функций  $f_i$  из (2.6) следует

$$\psi_{\text{cp}} = a \quad \text{или} \quad \psi_{i\text{cp}} = \alpha_i. \quad (2.13)$$

Таким образом, если  $\gamma = \text{const}$ , то измерив среднее значение  $\psi_{i \text{ ср}}$ , получим значение  $a_i$ \*/. Отсюда возникает мысль: после того как величина  $\gamma$  станет равной нулю, полагая коэффициент  $\beta_n$  постоянным, так менять каждую из фиксированных линейных структур модели за счет  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ , чтобы поддерживать значение  $\gamma$  постоянным. Наметим один из возможных подходов к решению этой задачи. Имея в виду, что в искомой точке  $\gamma^{(i)} = 0, i = 1, \dots, n-1$ , получаем систему  $(n-1)$  уравнений с  $n-1$  неизвестными  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ . Решить эту систему можно, например, минимизируя функцию  $\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma^{(i)}|$  одним из известных методов поиска экстремума. Если при требуемых значениях  $\beta_i$  экстремум единственный, то параметры  $a_i$  будут определены при любых начальных рассогласованиях величин  $a_i$  и  $\psi_{i \text{ ср}}$ ; если же экстремумов несколько, то существуют ограничения на допустимые начальные рассогласования. Подробно вопросы, связанные с поиском требуемых значений коэффициентов  $\beta_i$ , будут рассмотрены ниже для системы с двумя неизвестными параметрами.

Из изложенного вытекает способ определения параметров управляемого объекта. Действительно, имея в виду тот факт, что идентифицируемый объект описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.14)$$

\*/ Для измерения  $\gamma$  и  $\psi_{i \text{ ср}}$  можно воспользоваться релейным элементом, входная и выходная величины которого связаны соотношением

$$u_{\text{вых}} = \begin{cases} A_1 & \text{при } u_{\text{вх}} > 0 \\ A_2 & \text{при } u_{\text{вх}} < 0, \end{cases} \quad A_1, A_2 - \text{const.}$$

Среднее значение выходной величины в скользящем режиме равно

$$u_{\text{вых. ср.}} = A_1 \gamma + A_2 (1 - \gamma).$$

Отсюда вытекает, что для нахождения  $\gamma$  следует принять

$$u_{\text{вх}} = \text{sign } \gamma, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad \text{а для } \psi_{i \text{ ср}} - u_{\text{вх}} = \text{sign } f_i \gamma, \quad A_1 = f_i, \quad A_2 = \beta_i.$$

Среднее значение можно получить, если выходную величину релейного элемента пропустить через инерционное звено с малой, но достаточной для фильтрации высокочастотной составляющей постоянной времени.



где  $n$  - мерный вектор  $x$  и  $n \times n$  - мерная матрица  $A$  заданы согласно (I), построим модель с переменной структурой, движение которой описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = u, \quad u = \psi x, \quad (2.15)$$

где  $\psi$  -  $n \times n$  - мерная матрица с элементами  $\psi_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$ ,

$$\psi_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{при } f_i x_j > 0 \\ \beta_{ij} & \text{при } f_i x_j < 0, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.16)$$

$$\alpha_{ij}, \beta_{ij} - \text{const}, \quad \beta_{ij} \leq \alpha_{ij} \leq \alpha_{ij}, \quad (2.17)$$

$$f_i = x_i - y_i. \quad (2.18)$$

В дальнейшем будем считать, что компоненты  $x_1, \dots, x_n$  вектора  $x$ , характеризующего состояние системы, являются линейно независимыми функциями времени. (Если, например, начальные условия таковы, что эти величины являются линейно зависимыми функциями, то по координатам  $x_1, \dots, x_n$  невозможно однозначно определить параметры объекта).

Тогда, как следует из рассмотренной выше вспомогательной задачи, если удастся найти такие фиксированные значения  $\beta_{ij}$ , что величины  $f_i$ , характеризующие движение в скользящем режиме по  $f_i = 0$ , являются постоянными, то

$$\psi_{cr} = A \quad \text{или} \quad \psi_{ijcr} = \alpha_{ij}. \quad (2.19)$$

Итак, при определенным образом настраиваемых параметрах модели с переменной структурой по характеристикам скользящего режима и модели можно однозначно найти параметры идентифицируемого объекта. Имея информацию о коэффициентах  $\alpha_{ij}$  уравнения управляемого объекта, можно осуществлять управление с помощью полученного выше алгоритма (I.14), (I.16).

Проиллюстрируем более подробно предлагаемый метод определения параметров на примере системы второго порядка, опи -



связанной уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -a_2 x_2 - a_1 x_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  - постоянные параметры, подлежащие определению.

Вообще говоря, в модели с переменной структурой следует скачкообразно менять четыре коэффициента. Но так как одно из двух уравнений, описывающих идентифицируемый объект, известно, то модель выбираем в виде звена первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2, \quad (2.21)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  определяются согласно (2.16).

Не нарушая общности рассуждений, можно ограничиться рассмотрением процесса идентификации при  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ . Тогда, согласно (2.10) для  $n = 2$  имеем

$$\gamma = \frac{(a_1 - \beta_1)x_1 + (a_2 - \beta_2)x_2}{(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2} \quad (2.22)$$

Требуемое значение  $\beta_1 = \beta_{10}$ , при котором  $\gamma$  равняется постоянной величине и  $\psi_{1cp} = a_1$ ,  $\psi_{2cp} = a_2$  находится из (2.12)

$$\beta_{10} = \frac{a_1 \alpha_2 - a_1 \beta_2 - \alpha_1 a_2 + \alpha_1 \beta_2}{(\alpha_2 - a_2)} \quad (2.23)$$

Полагая  $\beta_1 = \text{const}$  и  $\beta_2 = \text{const}$ , из (2.22) определяем величину  $\gamma$

$$\gamma = \frac{[-(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) + (\alpha_2 - \beta_2)(\alpha_1 - \beta_1)][x_2^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2]}{[(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2]^2} \quad (2.24)$$

Следует сказать несколько слов о полученном соотношении. Если квадратичная форма  $P(x) = x_2^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 = 0$ , то процесс идентификации неосуществим. Поясним сущность этого

явления для случая постоянных  $a_1$  и  $a_2$ . Для действительных корней характеристического уравнения идентифицируемого объекта его выходная величина является суммой двух экспонент, и если одно из слагаемых отсутствует, то  $P(x) \equiv 0$ . В этом случае по величине  $x_1$  невозможно получить информации о параметрах объекта, так как существует бесчисленное множество линейных систем второго порядка с таким частным решением. При любых других начальных условиях, а также для комплексных корней характеристического уравнения величина  $P(x) = 0$  лишь при  $x_1 = x_2 = 0$ .

Итак, в дальнейшем будем считать, что квадратичная форма знакоопределенна. Зависимость  $\delta(\beta_1)$  представлена на рис. I.

Опишем один из возможных алгоритмов поиска величины  $\beta_{10}$ , если после возникновения скользящего режима величина  $\beta_1$  удовлетворяет неравенству

$$\beta_{12} < \beta_1 < \alpha_1, \quad (2.25)$$

где  $\beta_{12}$  - точка экстремума функции  $\delta(\beta_1)$ .

Функцию  $\delta(\beta_1)$  на интервале  $(\beta_{12}, \alpha_1)$ , можно представить в виде

$$\delta(\beta_1) = f(\beta_1) (\beta_1 - \beta_{10}), \quad (2.26)$$

где функция  $f(\beta_1)$  удовлетворяет соотношениям

$$0 < |f(\beta_1)| \leq A, \quad (2.27)$$

$A$  - постоянная величина, не зависящая от  $x_1$ ,  $x_2$ ,

$$\text{sign } f(\beta_1) = \text{sign } \frac{\partial \delta}{\partial \beta_1}. \quad (2.28)$$

Будем изменять  $\beta_1$  дискретно в соответствии с алгоритмом

$$\beta_1(t+1) = \beta_1(t) - \kappa \frac{\Delta \dot{Y}}{\Delta \beta_1}(t) \dot{Y}(t). \quad (2.29)$$

Из (2.26) и (2.29) имеем

$$\beta_1(t+1) = \beta_1(t) - \kappa \frac{\Delta \dot{Y}}{\Delta \beta_1}(t) f[\beta_1(t)] [\beta_1(t) - \beta_{10}]. \quad (2.30)$$

В силу (2.27), (2.28) всегда существует такое  $\kappa$ , при котором  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_1(t) = \beta_{10}$ , что и решает поставленную задачу.

Приведенный алгоритм получен в предположении, что функция  $\dot{Y}(\beta_1)$  не меняется во времени. В действительности кривая, изображенная на рис. 1, будет смещаться за счет изменения  $x_1$  и  $x_2$ . Поэтому величина шага в (2.30) следует выбрать такую, чтобы за время поиска требуемого значения  $\beta_1$  этим изменением можно было пренебречь.



Цитированная литература

1. Емельянов С.В., О высокочастотном управлении некоторыми нелинейными объектами с переменными параметрами. Изв. АН СССР, Энергетика и Автоматика, № 4, 1962.
2. Емельянов С.В., Таран В.А., Об одном классе систем автоматического регулирования с переменной структурой. Изв. АН СССР, Энергетика и Автоматика, № 3, 1962.
3. Бермант М.А., Емельянов С.В., Об одном способе управления некоторым классом объектов с изменяющимися параметрами. Автоматика и Телемеханика, т. 24, № 5, 1963.
4. Емельянов С.В., Уткин В.И., Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах. ДАН СССР, т. 152, № 2, 1963.
5. Уткин В.И., Квазиинвариантное управление вынужденным движением линейных объектов с переменными параметрами. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 1966.
6. Петров Б.Н., Емельянов С.В., Костылева Н.Е., Об управлении линейными объектами с переменными параметрами, ДАН СССР, т. 155, № 1, 1964.
7. Петров Б.Н., Емельянов С.В., Гриценко М.Б., Автономность в многосвязных системах автоматического управления с переменной структурой. ДАН СССР, т. 169, № 1, 1966.
8. Филиппов А.Ф., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Математический сборник, т. 51, № 1, 1960.

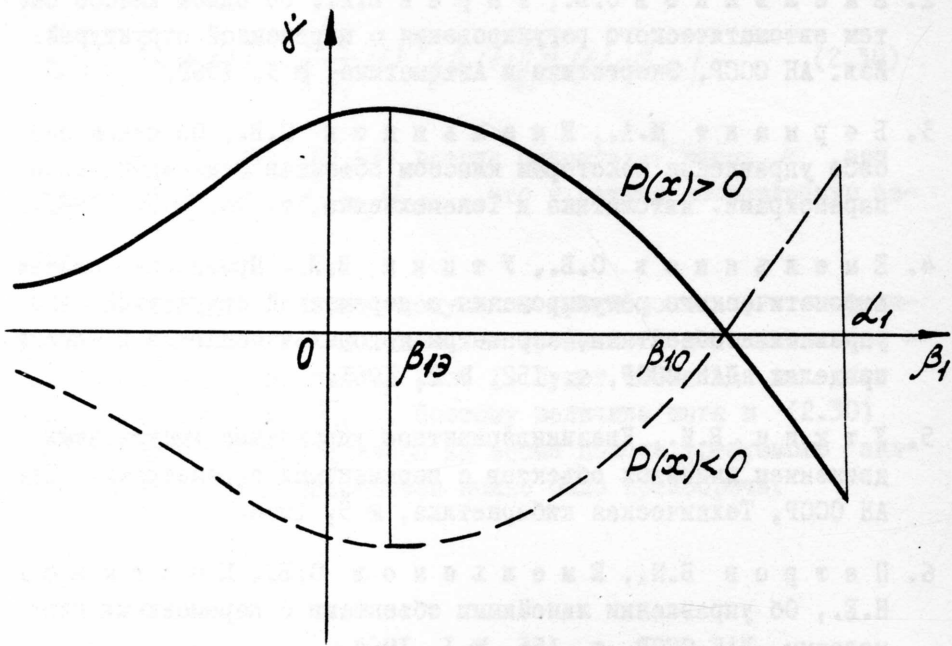


Рис. 1

# STRUCTURAL PROPERTIES OF DYNAMIC SYSTEMS

Dr. Miodir Vukobratović\*

and

kand. tehn. nauk R. S. Rutman\*\*

## Introduction

Dynamic systems may be considered from two different points of view. One approach deals with the system behaviour in the time domain, while the other is concerned with the system structure and its behaviour in parameter space. The second approach considers the following properties: sensitivity, adaptivity, invariancy, parametric compensation, controllability and observability.

## Parametric Invariancy and

### Zero Sensitivity

Perturbed motion can be represented in the form

$$\Delta x = U(x, p) \Delta p + \omega(\Delta p) \quad (1)$$

where  $\Delta p$  is the parameter variation

$U(x, p)$  - sensitivity operator at the point  $(x, p)$

$\omega(\Delta p)$  - lower order terms with respect to  $\Delta p$

Parametric invariancy [8]  $\Delta x(t) \equiv 0 \quad \forall t$  imposes rigorous constraints on system properties. There are few cases of practical interest where this property can be realized for arbitrarily large changes of system parameters.

Zero sensitivity, which is defined as no variance of the linear term of the characteristic coordinate when the parameters are perturbed, offers greater possibilities.

The linear part of the perturbed motion is

$$\delta x = U(x, p) \Delta p \quad (2)$$

\* Institut Mihailo Pupin, Belgrade.

\*\* Institut Mashinovedenia, Moskva

This means the sensitivity operator  $U(x, p)$  is identically zero for arbitrary  $\Delta p$ .

When the system behaviour is described by the state vector  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , and the parameter vector  $p = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ , the sensitivity operator is the matrix

$$U = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right\|$$

where

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

All attempts to obtain zero sensitivity  $U \equiv 0$  are based on two physical principles:

- a) include the perturbed element in a loop with infinite gain /1/,
- b) compensation of perturbations by parallel signal paths /2/.

Both methods are derived from the requirement of zero sensitivity. The basic task is to set up simple rules to select for the given structure such values of transfer functions of the additional paths to ensure zero sensitivity with respect to the desired parameter.

As an intermediate result, the topological sensitivity expression has obtained which corresponds to the linear graph of the arbitrary structure, that represent the generalization of the result given in the reference /3/,

$$S_p^T = \sum_{i=1}^n \beta_i S_p^{T_i} \quad (3)$$

where  $S_p^{T_i}$  are sensitivity dipoles /4/,  $\beta_i$  is the weight of the  $i$ -th transmittance for three characteristic positions of the varied branch with respect to the  $i$ -th direct path,  $\beta_i = \frac{T_i}{T} = \frac{P_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n P_i \Delta_i}$ , and  $n$  is the number of direct paths of the graph.

Zero sensitivity

$$\sum_{i=1}^n \beta_i S_p^{T_i} = 0 \quad (4)$$



can be realized by compensating one dipole by another. The necessary conditions of zero sensitivity for the graph not containing the perturbed contours which do not touch any of the direct paths are:

- a) the existence of at least two direct paths,
- b) the existence of at least two not coinciding positions of the perturbed path.

These requirements determine the structure of the graph having zero sensitivity. They also permit the elimination of structures in which it is not possible to satisfy the condition  $S_p^r = 0$ . The equation

$$\sum_{i=l+1}^m \beta_i + \sum_{i=m+1}^n \beta_i S_{add,i} = S_{dir} \quad (5)$$

for the selection of parameters resulting in zero sensitivity was also derived. This equation gives the necessary and sufficient conditions for zero sensitivity.

In this manner the topological approach to zero sensitivity is generalized. It is supposed that for the first  $l$  direct paths the varied branch has position I, for the next  $(l+1)$  to  $m$  paths position II, and for the remaining  $(m+1)$  to  $n$  position III [4].

Transfer of the direct dipole is denoted by  $S_{dir}$ , transfer of the inverse dipole inserted in the varied branch of  $G$  by  $S_{inv}$ , and transfer of the additional sensitivity sub-graph for position III by  $S_{add,i}$ .

Relation (5) reduces for the graph not containing the contour in contact with the direct path to

$$\sum_{i=l+1}^n \beta_i = S_{dir} \quad (6)$$

In the simplest case  $n = 2$ ,  $l = 1$

$$\beta_2 = S_{dir} \quad (7)$$

This condition allows the construction of a system with zero

sensitivity  $S_a^T$ . It can be done by using the graph with two direct paths between the nodes 1 and 2 (Fig. 1). In this case

$$S_{dir} = 1/(1-abc) \quad , \quad \beta_2 = eb/(dab+eb)$$

According to (4) one obtains the known relation for "conditional feedback" [2]

$$eab = -d$$

It is clear that no choice of parameters can guarantee  $S_b^T = 0$  or  $S_c^T = 0$ . It is also impossible to have  $S_d^T = 0, S_e^T = 0$ .

A more complex example is the graph in Figure 2. Starting from it, the system with zero sensitivity with respect to  $e$  will be derived.

The graph in Figure 2 contains two direct paths  $abch$  and  $ag$ . However, the branch  $e$  has the same position II with respect to two direct paths. Therefore the additional branch  $k$  (Fig. 3) is introduced so that the new direct path  $aekch$  shows up with respect to the branch  $e$ . It has the position I [4].

Now the conditions for zero sensitivity are fulfilled. The transfer function of the additional branch is given by condition (6) which results in

$$\frac{P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3}{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3} = \frac{\Delta_{dir}}{\Delta} \quad (8)$$

or

$$\frac{abch + ag(1-cd)}{aekch + abch + ag(1-cd)} = \frac{1-cd-abchf}{1-ae-cd-abchf-aekchf+aeed} \quad (9)$$

Putting  $c = a, e \neq 0$ , one obtains

$$k = \frac{a^2 d^2 g - a^2 b d h + a b h - 2 a d g + g}{a^2 d f g - a b g + a d h - h} \quad (10)$$

This example explains fully the synthesis of systems for zero sensitivity. The main points are summarized as follows:

- a) the graph of the initial system is analyzed from the

point of view of zero sensitivity,

- b) correction paths are added so that the graph satisfies the conditions for zero sensitivity,
- c) the parameters of the correction path are selected.

There is another approach to the synthesis of systems having zero sensitivity. The Laplace Transform and the system of linear second order equations are used

$$[A]\{\bar{x}\} = \{\bar{X}\} \quad (11)$$

where  $\bar{x}, \bar{X}$  are the transforms of generalized coordinates and inputs.

The general element of A is

$$A_{ij} = a_{ij}s^2 + b_{ij}s + c_{ij}$$

where  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  are the coefficients of inertial, damped and elastic members of the dynamic system. In the general case, all the coefficients of A depend on the parameter vector p.

The matrix sensitivity equation is obtained by differentiating (11) with respect to  $p_j$

$$\{\bar{u}\} = -[A]^{-1}[A^{(n)}]\{\bar{x}\} \quad (12)$$

where  $[A^{(n)}]$  is the matrix of the derivatives of  $[A]$ .

Using (12), the zero sensitivity of outputs is given as /5/

$$\{u\} \equiv 0 \quad (13)$$

or

$$\frac{1}{\Delta(s)} \sum_{k=1}^N K_{ki} \frac{\partial A_{ki}}{\partial p} \equiv 0 \quad (14)$$

where

$K_{ik}$  - algebraic compliments of  $[A]$ ,

$\Delta(s)$  - characteristic polynomial of the system.

In addition to zero sensitivity of outputs, the zero sensitivity of the stability index was also defined /6/ as

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p} = \frac{\left(\frac{\partial a_1}{\partial p} - \frac{\partial \xi}{\partial p}\right) \frac{\partial \eta}{\partial \omega_n} - \left(\frac{\partial a_0}{\partial p} - \frac{\partial \eta}{\partial p}\right) \frac{\partial \xi}{\partial \omega_n}}{\frac{\partial \xi}{\partial \gamma} \frac{\partial \eta}{\partial \omega_n} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \omega_n}} \equiv 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial p} = \frac{\left(\frac{\partial a_1}{\partial p} - \frac{\partial \eta}{\partial p}\right) \frac{\partial \xi}{\partial \omega_n} - \left(\frac{\partial a_0}{\partial p} - \frac{\partial \xi}{\partial p}\right) \frac{\partial \eta}{\partial \omega_n}}{\frac{\partial \xi}{\partial \gamma} \frac{\partial \eta}{\partial \omega_n} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \omega_n}} \equiv 0 \quad (16)$$

under the condition

$$\frac{\partial \xi}{\partial \gamma} \frac{\partial \eta}{\partial \omega_n} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \omega_n} \neq 0$$

Zero sensitivity of outputs covers zeros and poles of system transfer function, while zero sensitivity of the stability index deals only with zeros of the transfer function. Therefore zero sensitivity of the stability index gives only necessary conditions of insensitivity of outputs. If the parameter involved in the nonsensitivity of the system is not contained in the corresponding algebraic complement of (14) the conditions for zero sensitivity of outputs and the stability index coincide.

#### Relation between Zero Sensitivity and Parametric Invariancy

Zero sensitivity is evidently the necessary condition for parametric invariancy and parametric invariancy is a sufficient condition for zero sensitivity. For the class of systems considered above the relation between these concepts gives necessary and sufficient conditions.

Let us represent the transfer function of the graph in Mason's formula as

$$T = \frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{\Sigma^p + p \tau_z^p}{\Delta^p + p \tau_\Delta^p} \quad (17)$$

where  $\Delta^p, \Sigma^p, \tau_\Delta^p, \tau_z^p$  do not depend on  $p$ . By logarithmic differentiation we have (Lynch formula)

$$S_p^T = \frac{\Delta^p}{\Delta} - \frac{\Sigma^p}{\Sigma} \quad (18)$$

Equating the right side to zero one obtains the condition for zero sensitivity

$$\frac{\tau_\Delta^p}{\Delta^p} = \frac{\tau_z^p}{\Sigma^p} \quad (19)$$

Using (19) the expression (17) reads

$$T = \frac{\Sigma^p}{\Delta^p} = \frac{1 + \frac{p \tau_z^p}{\Sigma^p}}{1 + \frac{p \tau_\Delta^p}{\Delta^p}} \frac{\Sigma^p}{\Delta^p} \quad (20)$$

Equation (20) implies that the system transfer function in the case of zero sensitivity does not depend on the perturbed parameter. Therefore for linear time-invariant systems having a transfer function of the form (17), zero sensitivity and parametric invariancy are identical concepts.

This fact is also evident if a recurrent relation for higher order sensitivity of the linear time-invariant system is written [7]

$$\begin{aligned} \{\bar{u}^{(z)}\} = & - \binom{z}{0} [A]^{-1} [A^{(z)}] \{\bar{x}\} - \binom{z}{1} [A]^{-1} [A^{(z-1)}] \{\bar{u}^{(1)}\} - \\ & - \binom{z}{2} [A]^{-1} [A^{(z-2)}] \{\bar{u}^{(2)}\} - \dots - \binom{z}{z-1} [A]^{-1} [A^{(1)}] \{\bar{u}^{(z-1)}\} \quad (21) \end{aligned}$$

where  $z$  is the order of the sensitivity function ( $u^{(z)} = \frac{\partial^z x}{\partial p^z}$ ),



while the same index in A means the corresponding derivative. The condition for identically zero sensitivity and parametric invariancy requires the parameter to be linear in form. Under the same conditions, the identity of two properties is guaranteed for the stability index.

For the sake of illustration, consider the graph in Fig. 3. Let the transfer function  $a = c$  correspond to integration  $D^{-1}$ , and the other transfer functions be numerical coefficients:

$$e = a_{11}, f = a_{12}, b + eK = a_{21}, d = a_{22}, c_1 = g, c_2 = h$$

Then the graph corresponds to equations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= c'x\end{aligned}\quad (22)$$

If  $K = -\frac{c_1}{c_2}$ , the parametric invariancy with respect to  $y$  [8] is

$$c_1 c_2 a_{11} + c_2^2 a_{21} = c_1^2 a_{12} + c_1 c_2 a_{22} = \text{const} \quad (23)$$

This is valid for any  $e$  and has the form

$$b = \frac{c_1^2}{c_2^2} a_{12} + \frac{c_1}{c_2} \quad (24)$$

Relation (24) makes (23) an identity. For  $a = c = D^{-1}$  and  $b$  given by (24), the choice of  $K = -\frac{c_1}{c_2}$  guarantees not only zero sensitivity with respect to  $e$ , but parameter invariancy as well.

### Synthesis of Parametrically Invariant Systems

In order to avoid the measurement of system perturbations in case of parametric outputs (22) it is necessary to introduce additional linear relations. This procedure will be explained using the second order system of Fig. 4.

The conditions for parametric invariancy are /8/

$$c_1 c_2 \tilde{a}_{11} + c_2^2 \tilde{a}_{21} = c_1^2 \tilde{a}_{12} + c_1 c_2 \tilde{a}_{22} \quad (25)$$

where  $\tilde{a}_{ij}$  are the perturbed values of the coefficients. As seen, the invariancy of the "measured" sum of the column elements of A in (22) assures the invariancy of  $y(t)$ . Fig. 5 shows the graphs with additional relations assuring output invariancy with the perturbed elements drawn with heavier lines.

The synthesis algorithm of the second order invariant system is following/9/:

1. A unit branch is inserted between the end of the perturbed branch and the node  $\dot{x}_1$ .
2. The end of the perturbed branch is the origin of the additional branch ending in the node  $\dot{x}_{i+1}$ .
3. The transfer function of the added branch d is equal to  $-\frac{C_i}{C_{i+1}}$ .
4. The branch  $a_{i+1,j}$  is replaced by f having the transfer function

$$\frac{C_i^2}{C_{j+1}^2} a_{j,j+1} + \frac{C_j}{C_{j+1}} a_{j+1,j+1}$$

Introducing two additional relations one can realize invariant systems with respect to two coefficients  $a_{ij}$  simultaneously. However, they cannot belong to the same column of A. Fig. 6 shows the graphs of such systems.

Fig. 6a corresponds to perturbed coefficients in the main diagonal, Fig. 6b on the other diagonal, Fig. 6c in the first row and Fig. 6d in the second row of A.

A third order system is given in Fig. 7a. The corrected graph assuring output invariancy with respect to  $a_{22}$  is given in Fig. 7b. In this case, the following relations hold

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\alpha}{c_1 c_3^2} \\
 d &= -\frac{c_2}{c_3} \\
 \alpha &= c_2 c_3 (c_1 a_{11} + c_2 a_{21}) = c_1 c_2 (c_1 a_{13} + c_3 a_{33})
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

In an analogous way the synthesis of higher order invariant systems can be done.

### Zero Sensitivity and Unobservability

From the relation (20) another conclusion may be drawn: zero sensitivity is related to the partial compensation of zeros and poles of the graph. This implies unobservability of part of the system.

Zero sensitivity and unobservability can be made explicit by transforming the basis in the state space [10]. This transformation leaves the output invariant. For the system (22) and  $c_1=c_2=1$  the required transformation is  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . The system (22) becomes

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}^* & 0 \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \\
 y &= x_1^*
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

where

$$\begin{aligned}
 a_{11}^* &= a_{11} + a_{21}, \quad a_{21}^* = \frac{1}{2} (a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}) \\
 a_{22}^* &= \frac{1}{2} (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22})
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Equation (27) corresponds to the structure of Fig. 8.

Now, differing from the untransformed structure (Fig. 4), the coordinate  $x_2^*$  does not affect the output  $y$  either directly

or via  $x_1^*$ . This structure is called degenerate. According to [3], if  $a_{11}^*$  in (28) is constant, parameters belonging to  $a_{21}^*$ , and  $a_{22}^*$  have no effect on the output.

There are two cases:

- a) zero sensitivity leads to a degenerated structure without the transformation of the basis
- b) a system with zero sensitivity is not degenerate; degeneration is the result of the transformation of the basis.

The first case is trivial; the second possibility isolates the nontrivial solutions to be used for the synthesis.

The conditions of zero sensitivity eliminate the degenerate cases ( $l_1=0$  for position I). For the direct path, i.e. one not touching the perturbed contour, the cases a) and b) are possible. We shall illustrate using the graphs of Figures 9 and 10.

For the graph of Fig. 9 where

$$l_1 = abcd, \quad l_2 = cqe, \quad l_3 = abcqf$$

condition (5) is

$$(1-l_1)l_2 = 1(l_2+l_3) \quad (29)$$

so that

$$l_3 + l_1 l_2 = 0 \quad (30)$$

$$\text{or} \quad cde + 1 = 0 \quad (31)$$

$$T = \frac{gah(1-l_2)}{1-l_1-l_2-l_3} = gah \frac{1}{1-l_1} \quad (32)$$

For the graph in Fig. 10 where

$$l_1 = bdef, \quad l_2 = eghi, \quad l_3 = hq$$

the condition for zero sensitivity (5)

$$-(1-l_1-l_2)h = -(1-l_2)h(1-l_1) \quad (33)$$

gives  $l_1 l_2 = 0$  or  $h=0$ . In other words one of the transfer functions  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  or  $h$  must be zero which results in the degeneration.

Zero sensitivity based on algebraic parameter relations is related with system decomposition. This approach is essentially different from the previous synthesis procedures requiring additional paths. The relations between output insensitivity, stability index, and decomposition will be considered on the simplified model of a railway vehicle (Fig. 11),

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + 2(c_1+c_2+c_3)x_1 + 2[(c_1+c_2+c_3)a - c_2l_1 - c_3(l_1+l_2)]x_2 &= Q_1 \\ J\ddot{x}_2 + 2[c_1a - c_2(l_1-a) - c_3(l_1+l_2-a)]x_1 + 2[c_1a^2 + \\ + c_2(l_1-a)^2 + c_3(l_1+l_2-a)^2]x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

where

$x_1$  - is translational oscillation in the vertical direction

$x_2$  - is rotational oscillation around the center of gravity

$c_1, c_2, c_3$  are rigidity coefficients of the suspension system.

Conditions (14), (15), and (16) for invariancy of  $x_2$ , i.e.  $\int$  and  $Q_n$ , with respect to  $c_2$  are

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{l_2}{l_1} \quad (35)$$

This relation assures the decomposition of the system (34)



into separate vertical oscillations and oscillations about the center of gravity.

### Controllability

This approach is based on the assumption that the plant is known. The constraints on the variables are also removed so that controllability in the structural sense is considered [11/.

This implies the following model

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{36}$$

Elements of A, B and C are integrable functions on  $[t_0, t_f]$ .

The perturbed solution with respect to  $p=(p_1, \dots, p_n)$ , is

$$\delta x(t_f) = U(t_f) \delta p\tag{37}$$

$$\delta y(t_f) = C(t_f) [U(t_f) \delta p]\tag{38}$$

Elements of U are solutions of the sensitivity equations

$$\dot{U}_j = AU_j + \partial f / \partial p_j \quad j = 1, \dots, J$$

where

$$f \equiv Ax + Bu\tag{39}$$

$$U_j = \frac{\partial x}{\partial p_j} \quad - \text{ sensitivity vector with respect to } p_j$$

If some or all components of  $y(t_f)$  are zero, the system is partially or completely insensitive. Therefore a close relationship between controllability and parametric invariancy exists. If the matrix is in quadratic form ( $N=J$ ) controllability

requires  $U$  to be nonsingular. The controllability criterion based on  $U$  is more general since it does not depend on mathematical models but on the perturbation responses of real systems. Hence the verification of controllability can be extended to large systems which are practically impossible to describe by means of state equations.

The structural approach to controllability yields some further information about system structures which lead to uncontrollability. The system (36) is completely controllable if it is not algebraically equivalent to a system of the type

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= A^{11} x^1 + A^{12} x^2 + B^1 u \\ \dot{x}^2 &= A^{22} x^2\end{aligned}\quad (40)$$

Thus non-equivalence of the model of a dynamic system to the model (40) represents a criterion of controllability. Considering the physical relationship between controllability and parameter compensation, this may also be expressed in the following way:

Completely controllable systems cannot be parameter compensated.

#### Acknowledgement

The authors thank Prof. R. Tomović for his scientific contribution in the preparation of this report. The authors also wish to express thanks to Prof. A. Frank for his technical support.

## R E F E R E N C E

- /1/ Meerov, M.V. "Syntz Struktur Sistem Avtomatičeskovo Regulirovania Vysokoi Tochnosti" (Russian), Fizmatgiz, Moscow, 1959.
- /2/ Lang, G. and Ham J.M., "Conditional Feedback Systems - A New Approach to Feedback Control", AIEE Trans., p.2, 1955.
- /3/ Kokotović P., Rutman S., "Matrisa čuvstvitel'nosti i eë modelirovanie, Avtomatika No 6, 1966, Moskva.
- /4/ Sedlar, M., "Sensitivity Dipole and the Sensitivity Points Method, "Sensitivity Methods in Control Theory, Pergamon Press, London, 1966.
- /5/ Vukobratović, M., "Invariantnost' i čuvstvitel'nost' dinamicheskikh system", Avtomatika, No 4, Kiev, 1968.
- /6/ Vukobratović, M., "A Note on Parameter Invariance with Respect to the Index of Stability, "Trans. IEEE, Feb, 1968, Vol. AC-13.
- /7/ Vukobratović, M., and Juričić, D., "Application de l'analyse de sensibilité aux systèmes dynamiques à variable multiples de la mécanique technique, "Revue Roumaine des Sciences Techniques, Mecanique Appliquée, Tome 11, No 6, Bukurest, 1966.
- /8/ Rutman, R.S., and Epelman, N.S., "Parametricheskaja invariantnost' lineinykh dinamicheskikh sistem", Doklady Akademii nauk SSSR, Tom 159, No 4.
- /9/ Rutman R.S., O sintezi parametarski invarijantnih sistema, Avtomatika, 1969 /in press/.
- /10/ Kalman, R.E., "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems," J. SIAM Control, Ser. A, Vol. 1, No 2, pp 152-192, 1963.
- /11/ Tomović, R., "A Note on Controllability", Proceedings of the IEEE, Vol. 56, No 1, pp. 86-87, Jan. 1968.

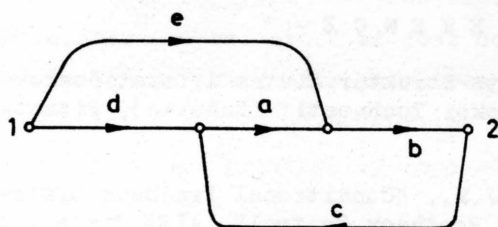


Fig. 1. Graph with two direct paths

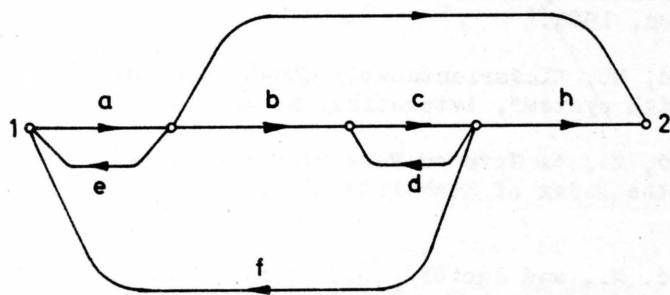


Fig. 2. Graph with two direct paths

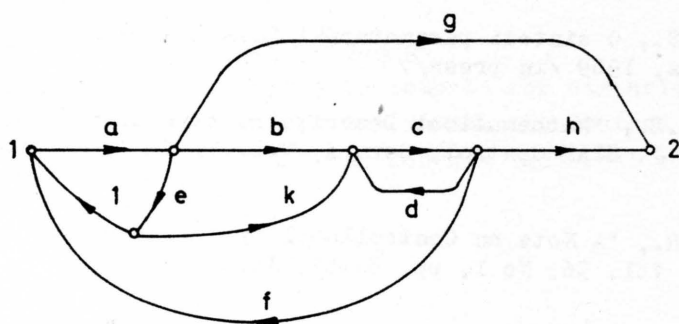


Fig. 3. Expanded graph with two direct paths

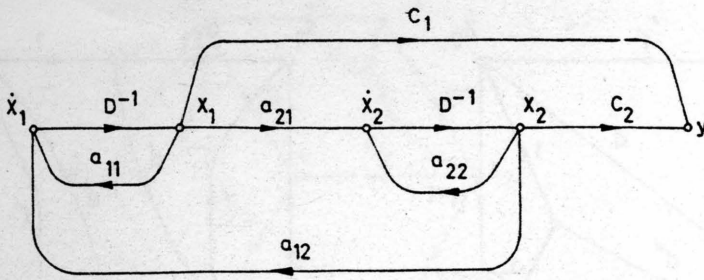


Fig. 4. Graph of second order system

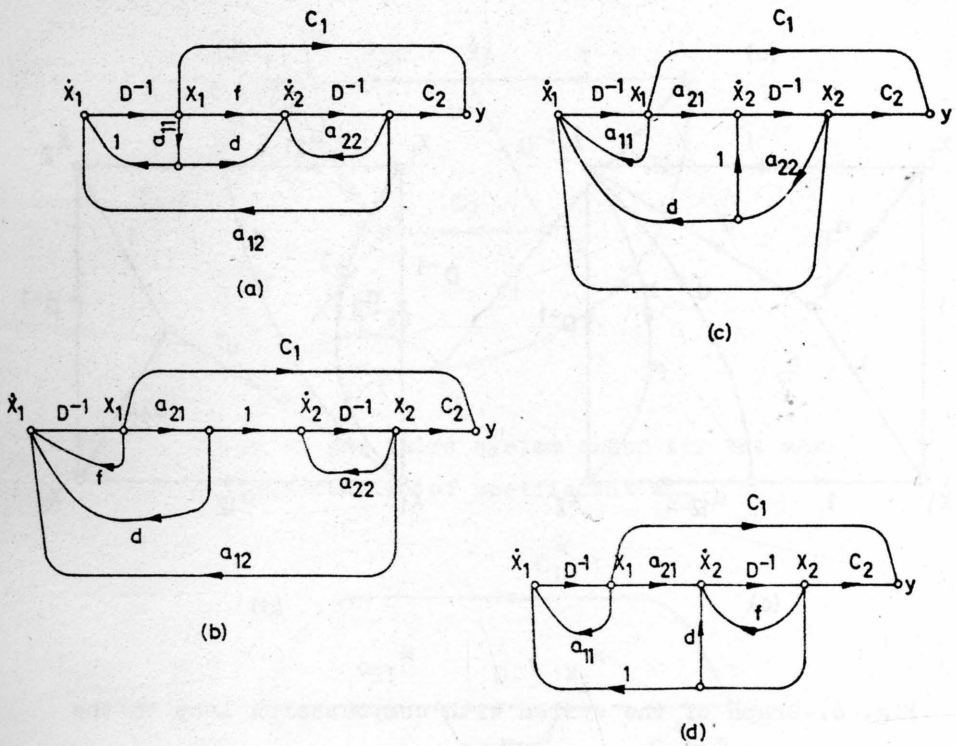
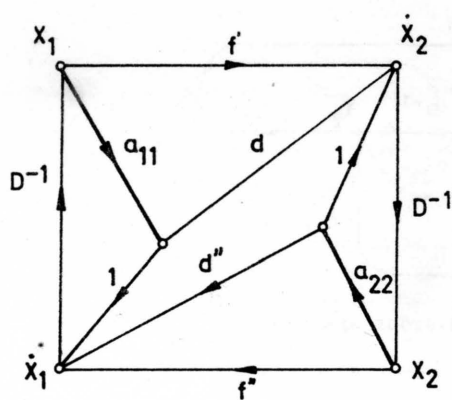


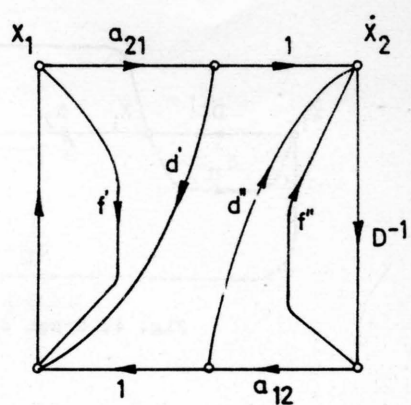
Fig. 5. Graph of the system with compensation loop in the case of one parameter change

Fig. 5.

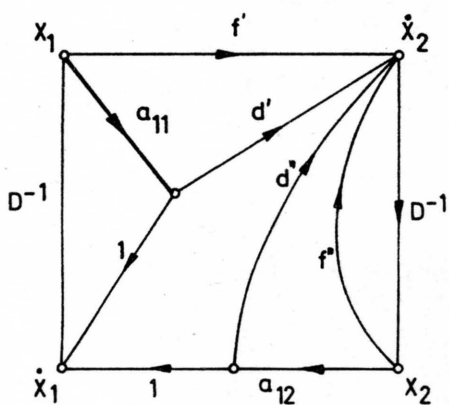




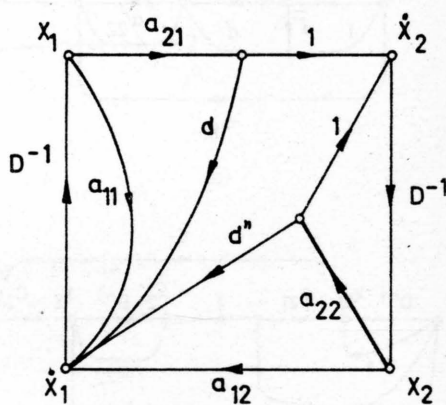
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 6. Graph of the system with compensation loop in the case of two parameters change

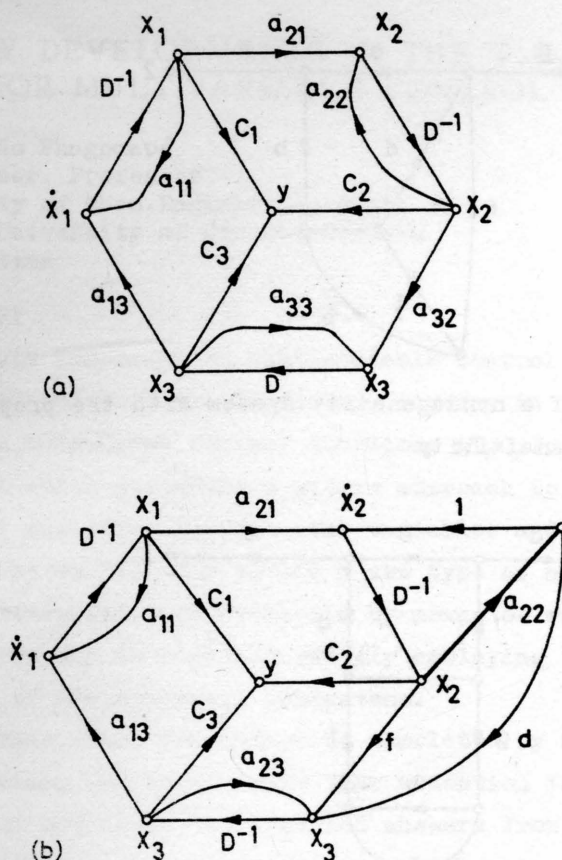


Fig. 7. Graph of the third system order for the case of compensation of coefficient  $a_{22}$

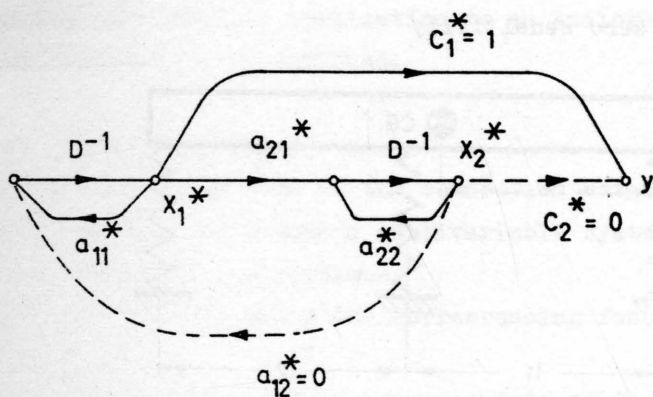


Fig. 8. Graph of the transformed structure with compensation loop for system in Fig. 4.

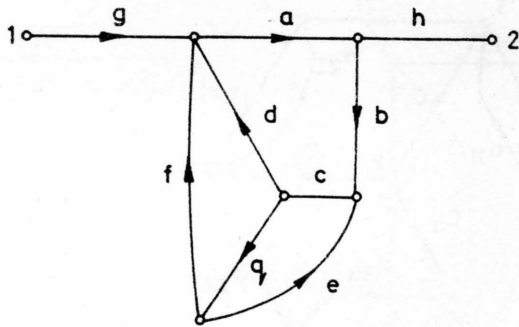


Fig. 9. Example of a nondegenerate system with the property of zero sensitivity

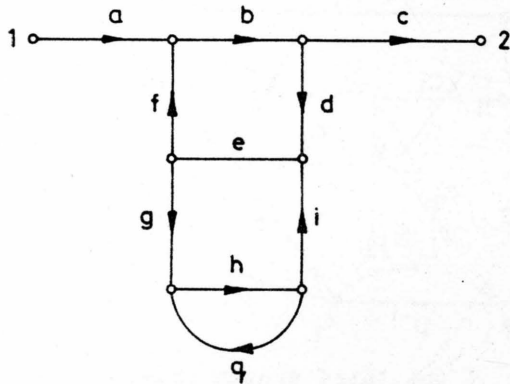


Fig.10. Example of a degenerate system with the property of zero sensitivity

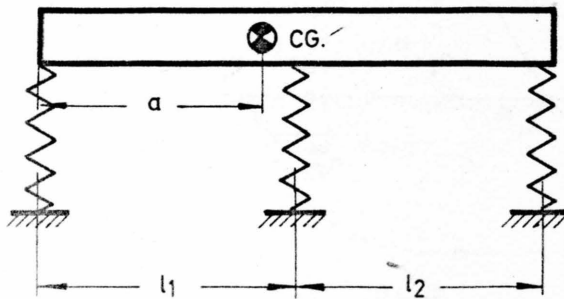


Fig.11. Mechanical model of a three-ahle railroad car

## NEW DEVELOPMENTS IN THE T.C.F. METHOD FOR MULTIVARIABLE CONTROL SYSTEMS

Armando Phagouapé  
Engineer, Professor  
Faculty of Chem.Engineering-Santa Fé  
IMAF-University of Córdoba-Córdoba  
Argentina

### SUMMARY

At the Symposium on Multivariable Control Systems sponsored by IFAC and held at Düsseldorf, Germany in October 1968 a paper on Tetra-transfer Control Functions (T.C.F. Method) was presented which describes a matrix approach to obtain the functional relation between input variables and output variables of a system. In that method a new type of matrices, called selfstructured, was developed by means of which the desired relation can be obtained quickly employing the transfer functions of the component subsystems.

In this paper the method is completed by means of new developments and at the same time attention is paid to the question of obtaining the required answers from a system by the adequate use of control vectors which act on the system together with the normal inputs of the controlled system which are generally considered as perturbations.

Finally the possible application to an Analog-Digital system of computation is outlined.

### 1.0.0. RECAPITULATION

Fig. 1 shows the form of the connection between  $n$  simple feedback systems to obtain a multivariable system quite frequent in practical applications.

(1), (3) and (4) shows the corresponding functional relations.

(1) is a  $2n$  order selfstructured matrix of the type indicated in (2).

$$\begin{bmatrix} x_{h1} \\ \vdots \\ x_{hn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} [I] & \\ & [H^{1-n}] \end{bmatrix}}_n \underbrace{\begin{bmatrix} [G^{1-n}] \\ [I] + [H^{1-n}] \cdot [G^{1-n}] \end{bmatrix}}_n \begin{bmatrix} x_{g1} \\ \vdots \\ x_{gn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

[I] unitary matrix  
of n order

$$[G^{1-n}] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{G_1} & -\frac{1}{G_2} & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\frac{1}{G_n} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[H^{1-n}] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_1} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\frac{1}{H_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$(2) \begin{bmatrix} [I] & [A] \\ [B] & [I] + [B] \cdot [A] \end{bmatrix}$$

$\Delta = 1$

(3) and (4) in their turn show the structure of the fundamental blocks of (1). The corresponding demonstrations are found in Reference<sup>1</sup>.

In Fig. 1 we observe that the outputs of  $G_i$  and  $H_i$  act directly on the algebraic summing points A and B without any transformation. The connection carried out between the subsystems is also direct, although in many cases in practical applications there appear transfer intermediate functions in the connection. An example was shown in the Distillation Tower<sup>1</sup>. Therefore we generalize now the method for cases as shown in Fig. 2.



## 2.0.0

Every subsystem in this figure is now provided with the intermediate  $G_{ci}$  and  $H_{si}$ .

$L_{Hi}$  and  $L_{Gi}$  also appear between the laterally connected subsystems. We slightly changed the nomenclature to make easier to work with  $2n$  order matrices.

## 2.1.0 CONNECTIVE JORDAN MATRICES

Now, in the matrices we must face two facts: First,  $G_{ci} = H_{si} = 1$ ; Second,  $X_{hi} \frac{L_{Hi}}{H_{ci}}$  must be subtracted from

$X_{h(i+1)}$  instead of  $X_{hi} \frac{1}{H_{ci}}$ , as was done in the matrices corresponding to Fig. 1, and in the same way  $Y_{g(i+1)} \frac{L_{Gi}}{G_{s(i+1)}}$  must be subtracted from  $X_{gi}$ .

Therefore in the Jordan matrices corresponding to the lateral connection, as shown in (3) and (4), the elements of the second diagonals will not be umbers  $\underline{1}$  any more, but the new connective transfer functions  $L_{Hi}$  and  $L_{Gi}$ .

(5) and (6) are obtained in this manner, which will form the structure of (1).

$$\begin{array}{c} \text{Jordan} \\ \left[ G_S^{1-n} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & L_{G_1} & 0 \\ & 1 & L_{G_2} \\ & & \ddots & \ddots \\ & 0 & & L_{G_{n-1}} \\ & & & & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} -\frac{1}{G_{s_1}} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & -\frac{1}{G_{s_n}} \end{array} \right] \quad (5) \\ \text{JL}_G \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left[ H_C^{1-n} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ -L_{H_1} & 1 & \\ & -L_{H_2} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -L_{H_{n-1}} & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} -\frac{1}{H_{c_1}} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & -\frac{1}{H_{c_n}} \end{array} \right] \quad (6) \\ \text{JL}_H \end{array}$$

## 2.2.0 MODIFIED TETRANSFER SYSTEMS

Let us consider now that  $L_{G_i} = L_{H_i} = 1$  and, on the other hand, that  $G_{c_i}$  and  $H_{s_i}$  are different from 1. In order to use the T.C.F. Method the total system of Fig. 2 is transformed in the equivalent one shown in Fig. 3. We have then the matrix relation (7) whose matrix is selfstructured.

As we only look for the relation between the variables  $X_h$ ,  $Y_h$ ,  $X_g$  and  $Y_g$ ,  $H_{s_i}$  and  $G_{c_i}$  must be eliminated from the vectors of both members of (7). For this purpose the operation indicated in (8) will be carried out.

$$\begin{bmatrix} Y_{h_1} \cdot H_{s_1} \\ \vdots \\ Y_{h_n} \cdot H_{s_n} \\ \hline X_{h_1} \\ \vdots \\ X_{h_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [G_s^{1-n}] \cdot [G_c^{1-n}] \\ \hline [H_c^{1-n}] [H_s^{1-n}] & [I] + [H_c^{1-n}] [H_s^{1-n}] [G_s^{1-n}] [G_c^{1-n}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{g_1} \\ \vdots \\ X_{g_n} \\ \hline Y_{g_1} \cdot G_{c_1} \\ \vdots \\ Y_{g_n} \cdot G_{c_n} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{h_1} \\ \vdots \\ Y_{h_n} \\ \hline X_{h_1} \\ \vdots \\ X_{h_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_{s_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{H_{s_n}} \\ \hline & & 1 \\ & & \vdots \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{MATRIX} \\ \text{OF} \\ (7) \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{g_1} \\ \vdots \\ X_{g_n} \\ \hline Y_{g_1} \\ \vdots \\ Y_{g_n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

The matrix of (7) is a block matrix with two rows and two columns. The top-left block is the identity matrix  $[I]$ . The top-right block is  $[G_s^{1-n}] \cdot [G_c^{1-n}]$ . The bottom-left block is  $[H_c^{1-n}] [H_s^{1-n}]$ . The bottom-right block is  $[I] + [H_c^{1-n}] [H_s^{1-n}] [G_s^{1-n}] [G_c^{1-n}]$ .

Taking into account (9) , (10) , (11) and (12) in (7)

$$(9) \begin{bmatrix} G_{c1} & 0 \\ 0 & G_{cn} \end{bmatrix} = [G_c^{1-n}]^{-1} \quad (10) \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{c1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{cn}} \end{bmatrix} = [G_c^{1-n}]$$

$$(11) \begin{bmatrix} H_{s1} & 0 \\ 0 & H_{sn} \end{bmatrix} = [H_s^{1-n}]^{-1} \quad (12) \begin{bmatrix} \frac{1}{H_{s1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_{sn}} \end{bmatrix} = [H_s^{1-n}]$$

and multiplying the matrices (8) block by block, we will have the following two successive steps

$$(13) \left[ \begin{array}{c|c} [H_s^{1-n}] & [0] \\ \hline [0] & [I] \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} [I] & [G_s^{1-n}] \\ \hline [H_c^{1-n}][H_s^{1-n}] & [G_c^{1-n}]^{-1} + [H_c^{1-n}][H_s^{1-n}][G_s^{1-n}] \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} y_{h1} \\ \vdots \\ y_{hn} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} [H_s^{1-n}] & [H_s^{1-n}][G_s^{1-n}] \\ \hline [H_c^{1-n}][H_s^{1-n}] & [G_c^{1-n}]^{-1} + [H_c^{1-n}][H_s^{1-n}][G_s^{1-n}] \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_{g1} \\ \vdots \\ x_{gn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

(14) is the functional relation in this case, but its matrix is not selfstructured.

$\begin{bmatrix} G_5^{1-n} \end{bmatrix}$  and  $\begin{bmatrix} H_c^{1-n} \end{bmatrix}$  are obtained by means of the corresponding Jordan matrices in (5) and (6).

In the more general case  $L_{G_1}$  and  $L_{H_1}$  will be different from 0 and 1 in (5) and (6) (Cf Fig.2).

On the other hand, if  $L_{G_1} = L_{H_1} = 0$ , the subsystems are independent from each other (Without connection).

If  $L_{G_1} = L_{H_1} = 1$  we have the direct connection corresponding to Fig. 1 .

The more general matrix is then (15) which is the functional relation corresponding to Fig. 2.

(15)

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{H_{s_1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{H_{s_n}} \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{H_{s_1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{H_{s_n}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} 1 \quad L_{G_1} \\ \vdots \quad \vdots \\ 1 \quad L_{G_{n-1}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{G_{s_1}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{G_{s_n}} \end{array} \right] \end{array} \right] \\ \hline \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ -L_{H_{n-1}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{H_{c_1}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{H_{c_n}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{H_{s_1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{H_{s_n}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{G_{c_1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{G_{c_n}} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ -L_{H_{n-1}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{H_{c_1}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{H_{c_n}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{H_{s_1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{H_{s_n}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} 1 \quad L_{G_1} \\ \vdots \quad \vdots \\ 1 \quad L_{G_{n-1}} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{G_{s_1}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{G_{s_n}} \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Therefore this general connective system with  $4n$  variables is equivalent to the system of Fig. 4 with transfer matrices (5) , (6) , (10) and (12) and the input and output vectors

$$\begin{bmatrix} X_g \\ \vdots \\ X_{g_n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Y_g \\ \vdots \\ Y_{g_n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Y_h \\ \vdots \\ Y_{h_n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_h \\ \vdots \\ X_{h_n} \end{bmatrix} \quad (16)$$

related by means of the total transfer matrix (15) .

It is a structure of four blocks, each obtained by simple algebraic operations between diagonal or quasi-diagonal matrices of the order  $n$ .

The selfstructured matrices are a special case of (15), and because of their properties constitute in this way the algorithmic tool of the method.

### 3.0.0 THE CONTROL VECTOR $[X_h]$ .

The use and design of a control system of any process requires the manipulation of variables  $[X_h]$  which permit its control, so that the values of output  $[X_g]$  follow a certain evolution in time. As there are also normal inputs  $[X_g]$  in the system we deduce that it is important and also very useful to obtain the relation which determines these controlling variables  $[X_h]$  in function of  $[X_g]$  and  $[Y_g]$ . It is just the T.C.F. method which gives this relation directly.

From (15) we then obtain (17) whose vectors are those indicated in (16).

FIELD 5

(17)

$$[X_h] = [H_c^{1-n}] [H_s^{1-n}] [X_g] + \left[ [G_c^{1-n}]^{-1} + [H_c^{1-n}] [H_s^{1-n}] [G_s^{1-n}] \right] [Y_g]$$

The  $X_{hi}(t)$  can thus be obtained in function of the desired  $Y_{gi}(t)$  and the acting  $X_{gi}(t)$ .

### 4.0.0 COMPUTING AIDS

With the help of an Analog-Digital Computing System the control can be arranged in such a manner that programming as data the desired predetermined output functions  $[Y_g(t)]$  and receiving continuously the values for the input perturbations  $[X_g(t)]$  it computes the values for  $X_{hi}(t)$  which, introduced through the analogous part in the control system, will make



the total system carry out the desired performance (Fig.5).

### 5.0.0 EXAMPLE

Fig. 6 indicates lateral connection between two tetrafer systems in which the differential and integral functions of each block (field t) are shown together with the corresponding transfer functions (field s). Therefore the control input pair  $X_{h1}(s)$  and  $X_{h2}(s)$  will be

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{h1}(s) \\ X_{h2}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_2 S & 0 \\ 0 & -K_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{g1}(s) \\ X_{g2}(s) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} K_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_2 S & 0 \\ 0 & -K_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{K_4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{K_1}{S} & 0 \\ 0 & -\frac{K_5}{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{g1}(s) \\ Y_{g2}(s) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{h1}(s) \\ X_{h2}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -K_2 S & 0 \\ K_2 S & -K_6 K_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{g1}(s) \\ X_{g2}(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_3 + K_1 K_2 & \frac{K_2 K_5}{K_4} \\ -K_1 K_2 & 1 + \frac{K_5 K_6 K_7}{S} - \frac{K_2 K_5}{K_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{g1}(s) \\ Y_{g2}(s) \end{bmatrix} \\ \begin{cases} X_{h1}(s) = -K_2 S X_{g1}(s) + (K_3 + K_1 K_2) Y_{g1}(s) + \frac{K_2 K_5}{K_4} Y_{g2}(s) \\ X_{h2}(s) = K_2 S X_{g1}(s) - K_6 K_7 X_{g2}(s) - K_1 K_2 Y_{g1}(s) + \left[ 1 + \frac{K_5 K_6 K_7}{S} - \frac{K_2 K_5}{K_4} \right] Y_{g2}(s) \end{cases} \quad (18) \\ \begin{cases} X_{h1}(t) = -K_2 \frac{dX_{g1}(t)}{dt} + (K_3 + K_1 K_2) Y_{g1}(t) + \frac{K_2 K_5}{K_4} Y_{g2}(t) \\ X_{h2}(t) = K_2 \frac{dX_{g1}(t)}{dt} - K_6 K_7 X_{g2}(t) - K_1 K_2 Y_{g1}(t) + \left( 1 + \frac{K_5 K_6 K_7}{S} - \frac{K_2 K_5}{K_4} \right) Y_{g2}(t) \end{cases} \quad (19) \end{aligned}$$

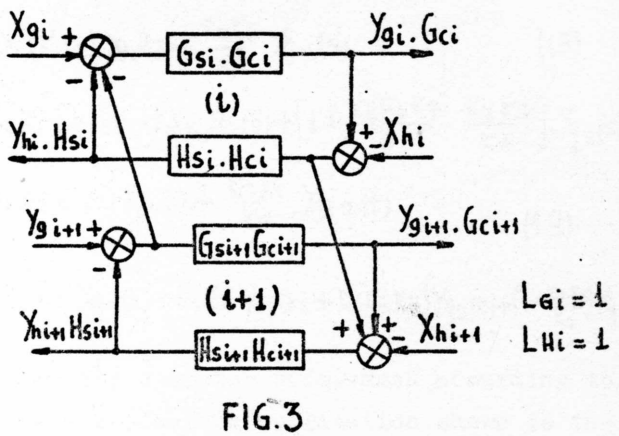
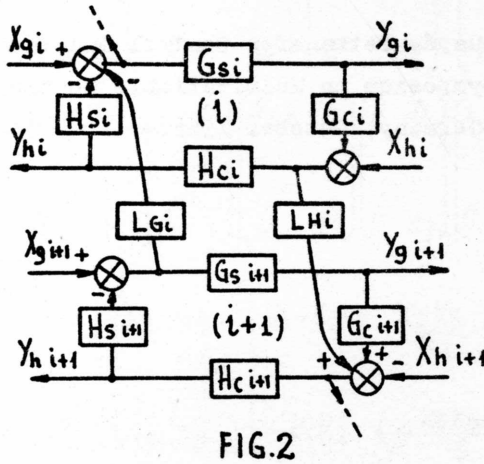
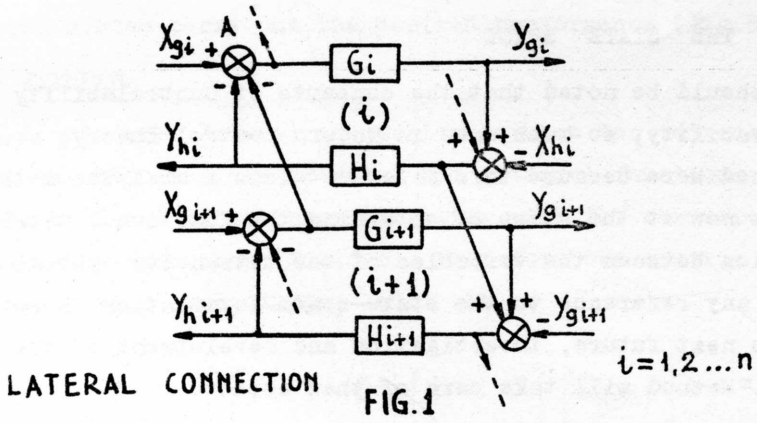
Of course, only an analog computer programmed according to (19) can be used. Here the possible application shown is indicated without going into details which would add nothing to the idea itself.

## 6.0.0 THE STATE SPACE

It should be noted that the concepts of Controlability and Observability, so much used in Modern Control Theory, are not yet used here because this paper develops a analytic method and is now at the stage of obtaining the functional matrix relation between the variables of the tetra-transfer systems without any reference to the state-space formulation. However, in the next future, investigation and development of the T.C.F. Method will take care of that aspect.

### Reference

1. Armando Phagouapé- Tetra-transfer Control Functions-  
Reprints of the Symposium on Multivariable Control Systems-  
IEAC- Düsseldorf-Germany, October 1968.-



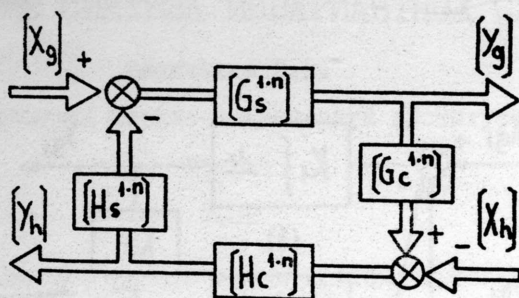


FIG. 4

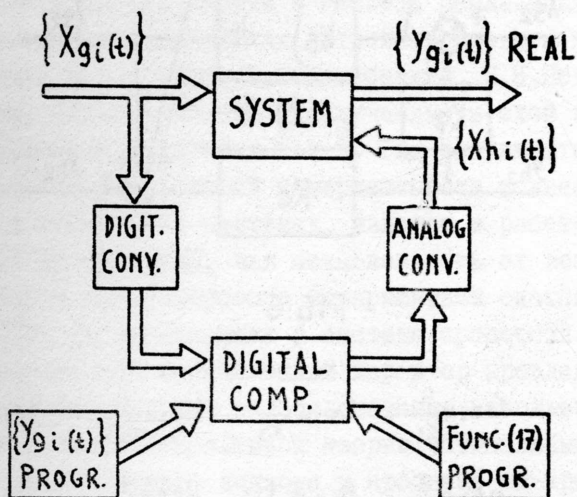


FIG. 5

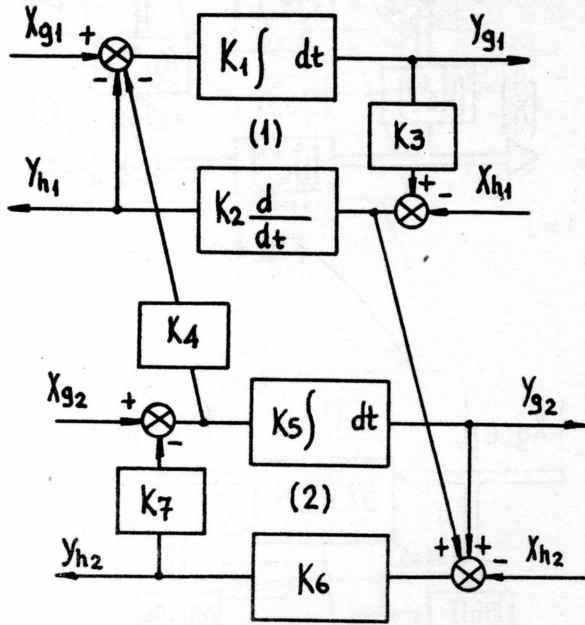


FIG. 6

$$G_{S1} = \frac{S}{K_1}$$

$$G_{C1} = \frac{1}{K_3}$$

$$H_{C1} = \frac{1}{K_{2.5}}$$

$$H_{S1} = 1$$

$$G_{S2} = \frac{S}{K_5}$$

$$G_{C2} = 1$$

$$H_{C2} = \frac{1}{K_6}$$

$$H_{S2} = \frac{1}{K_7}$$

$$L_{H1} = 1$$

$$L_{G1} = \frac{1}{K_4}$$



# О ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ

Величенко В.В.

Московский физико-технический институт

Москва

СССР

Проблема синтеза инвариантных систем состоит в разработке методов построения регуляторов, обеспечивающих независимость определенных показателей качества системы от действующих на нее внешних возмущений.

Указанная проблема имеет большое значение и привлекает к себе внимание многих исследователей. Теория инвариантности линейных стационарных систем и способы реализации на ее основе инвариантных технических устройств развиты в работах Г.В.Щипанова, Н.Н.Лузина, В.С.Кулебакина, Б.Н.Петрова и других авторов. Обзор проблемы и полученные в этой области результаты отражены в работах <sup>1</sup> и <sup>2</sup>. Ряд результатов, связанных с исследованием условий инвариантности в линейных нестационарных и нелинейных системах, изложен в работах <sup>2-6</sup>.

Показатели качества, чья независимость от возмущений обеспечивается при построении инвариантной системы, являются функционалами от протекающих в системе процессов. Это обстоятельство определяет вариационный характер проблемы инвариантности <sup>7</sup> и позволяет для ее исследования использовать математический аппарат современной теории оптимальных систем <sup>8,9</sup>. На основе вариационного подхода к проблеме инвариантности Л.И.Розоноэром <sup>7</sup> полностью решен вопрос о необходимых и достаточных условиях инвариантности линейных нестационарных систем и совершенной инвариантности нелинейных систем.

Развитие вариационного подхода в направлении исследования больших вариаций функционала позволяет получить ряд новых результатов в теории инвариантности нелинейных систем. В настоящем докладе сформулированы необходимые и одновременно достаточные условия инвариантности по возмущению и по начальным данным для систем достаточно общего вида и на этой основе решена задача синтеза корректирующей цепи, обеспечи-

вающей инвариантность исходного нелинейного объекта.

### 1. Формулировка задачи

Синтез инвариантной системы осуществляется на основе условий инвариантности, которые мы сформулируем для следующей задачи.

Пусть система управления описывается  $n$ -мерной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t). \quad (1)$$

Здесь  $x$  - вектор фазовых координат,  $u = u(t)$  представляет собой вектор внешних возмущающих воздействий. В качестве показателя качества будем изучать функционал

$$J(x, u) = \Phi[x(T), T], \quad (2)$$

определенный как функция  $\Phi(x, t)$  от координат системы (1) и времени в предписанный момент времени  $T$ . Момент  $T$  может быть фиксированным, либо определяться выполнением некоторого условия относительно переменных системы (1). В общем случае можно считать, что он определяется из условия достижения траекторией  $x(t), t$  системы (1) гиперповерхности  $M$ , определяемой уравнением

$$M(x, t) = 0. \quad (3)$$

Нелинейность задачи в общем случае не позволяет считать возмущения  $u(t)$  совершенно произвольными. Во всяком случае, приходится ограничивать класс возмущений теми вектор-функциями  $u(t)$ , которые не выводят точку  $\{x, u, t\}$  из области  $G$  определения правой части системы (1). Все последующие построения мы будем проводить для заданной области  $A$   $n+1$ -мерного пространства  $X \times t$  и считать допустимыми возмущениями кусочно-непрерывные вектор-функции  $u(t)$ , при которых всякая траектория  $x(t), t$ , начинающаяся в  $A$ , целиком принадлежит  $A$  и каждая точка  $\{x(t), u(t), t\}$  принадлежит  $G$ . Функции  $f(x, u, t)$ ,  $\Phi(x, t)$  и  $M(x, t)$  предположим в  $G$  непрерывными по всем переменным вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Будем говорить, что система (1)  $\Phi$ -инвариантна на  $M$

по  $u$ , если на ее траекториях, начинающихся в точках  $\{x, \tau\} \in A$ , значение функционала (2) не зависит от возмущающей вектор-функции  $u(t)$ . Поставим задачу об отыскании условий, обеспечивающих инвариантность системы (I) в указанном смысле. В такой форме, являющейся обобщением постановки проблемы слабой инвариантности<sup>7</sup>, может быть сформулирован широкий круг возникающих в технике задач, в частности, и в том случае, когда показатель качества задается функционалом в другой, например интегральной форме.

## 2. Необходимое и достаточное условие инвариантности.

Опорное поле. Будем считать вектор-функцию  $u(t)$  управлением, значениями которого в любой момент времени мы можем распоряжаться по своему усмотрению. Зададимся некоторым опорным управлением  $\tilde{u}(t)$ . Из каждой точки  $\{x, \tau\} \in A$  выпустим траектории  $\tilde{x}(t), t$  системы (I), все с одним и тем же управлением  $u(t) \equiv \tilde{u}(t)$ . Траектория  $\tilde{x}(t), t$  достигает  $M$  в момент  $t = \tilde{T}$ . Определим вдоль этой траектории вектор-функцию  $\tilde{\rho}(t)$  уравнением

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\text{grad}_x H(x, \tilde{\rho}, \tilde{u}, t); \quad x(t) \equiv \tilde{x}(t), \quad H \equiv (p, f(x, u, t)) \quad (4)$$

с граничным условием

$$\tilde{\rho}(\tilde{T}) = \left[ -\text{grad}_x \Phi(x, t) + \left( \frac{d\Phi(x, t)}{dt} / \frac{dM(x, t)}{dt} \right) \text{grad}_x M(x, t) \right]_{t=\tilde{T}, x=\tilde{x}(\tilde{T})}.$$

Уравнение (4) ставит в соответствие каждой точке  $\{x, \tau\} \in A$  вектор  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(x, \tau)$ . Векторное поле  $\tilde{\rho}(x, \tau)$  будем называть опорным.

Опорная функция. Каждой точке  $\{x, \tau\} \in A$  проходящая через нее траектория  $\tilde{x}(t), t$  ставит в однозначное соответствие значение функционала (2), которое таким образом оказывается функцией точки  $\{x, \tau\}$ . Эту функцию

$$\tilde{V}(x, \tau) \equiv \Phi[\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}] \quad (5)$$

мы назовем опорной функцией.

Точная формула для изменения функционала. С помощью опорной функции  $\tilde{V}(x, \tau)$  разность между значениями функцио-

нала (2) для проходящих через одну и ту же точку  $\{x^0, t^0\} \in A$  траекторий  $\tilde{x}(t), t$  и  $\bar{x}(t), t$ , соответствующих управлениям  $\tilde{u}(t)$  и  $\bar{u}(t)$ , можно записать в виде

$$\Delta J = \Phi[\tilde{x}(\bar{t}), \bar{t}] - \Phi[\bar{x}(\bar{t}), \bar{t}] = \tilde{V}[\tilde{x}(\bar{t}), \bar{t}] - \tilde{V}[x^0, t^0] = \int_{t^0}^{\bar{t}} \frac{d\tilde{V}[\tilde{x}(t), t]}{dt} dt.$$

Применяя теперь для вычисления производной от  $\tilde{V}(x, \tau)$  по времени вдоль траектории  $\tilde{x}(t), t$  приближенную формулу для малых изменений функционала (2)  $^{10}$ , имеем

$$\Delta J = - \int_{t^0}^{\bar{t}} [H[\tilde{x}, \tilde{p}(\tilde{x}, t), \tilde{u}, t] - H[\bar{x}, \tilde{p}(\bar{x}, t), \bar{u}, t]] dt. \quad (6)$$

Использование точной формулы (6) дает возможность сформулировать необходимое и одновременно достаточное условие инвариантности системы (I).

**Теорема I (Принцип независимости).** Для того, чтобы система (I) была  $\Phi$ -инвариантной на  $M$  по  $u$ , необходимо и достаточно, чтобы на опорном поле, соответствующем какому-нибудь опорному управлению  $\bar{u}(t)$ , функция

$$H[x, \tilde{p}(x, \tau), u, \tau] \equiv (\tilde{p}(x, \tau), f(x, u, \tau))$$

не зависела явно от вектора  $u$ .

Из формулировки теоремы следует, что если ее условие выполнено хотя бы для одного опорного управления  $\bar{u}(t)$ , оно будет выполнено и для всякого другого. Это объясняется тем обстоятельством, что векторы опорного поля  $\tilde{p}(x, \tau)$  и гамильтониан  $H[x, \tilde{p}(x, \tau), \bar{u}, \tau] = \tilde{H}(x, \tau)$  инвариантной системы оказываются инвариантными по  $\bar{u}(t)$ , т.е. их значения определяются только точкой  $\{x, \tau\}$  и не зависят от того, какая именно функция  $\bar{u}(t)$  используется при их вычислении. Именно благодаря этому замечательному свойству задача синтеза, чрезвычайно сложная для общего случая построения оптимальной системы, для инвариантной системы оказывается весьма простой. Это же свойство позволяет использовать в качестве опорного управления функцию, зависящую не только от времени, но и от координат системы, что оказывается удобным в приложениях.

В терминах опорной функции, которая оказывается связан-



ной с опорным полем и гамильтонианом соотношениями

$$\tilde{p}(x, \tau) = -\text{grad}_x \tilde{V}(x, \tau), \quad \tilde{H}(x, \tau) = \frac{\partial \tilde{V}(x, \tau)}{\partial \tau},$$

необходимое и достаточное условия инвариантности можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Для того, чтобы система (I) была  $\Phi$ -инвариантной на  $M$  по  $u$ , необходимо и достаточно, чтобы опорная функция, соответствующая какому-нибудь опорному управлению  $\tilde{u}(t)$ , удовлетворяла уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tau} = -(\text{grad}_x \tilde{V}, f(x, u, t))$$

и правая часть этого уравнения не зависела явно от  $u$ .

Отметим, что по определению (5) функция  $\tilde{V}$  удовлетворяет на  $M$  граничному условию  $\tilde{V}(x, \tau) = \Phi(x, \tau)$ .

Условия теорем 1 и 2 по форме близки к формулировкам необходимых<sup>8,9</sup> и достаточных<sup>11,12</sup> условий оптимальности в форме принципа максимума. Эта аналогия оказывается весьма глубокой. Действительно, инвариантный функционал на любом, в том числе и опорном управлении  $\tilde{u}(t)$  (соответствующие  $\tilde{u}(t)$  траектории  $\tilde{x}(t), t$  удовлетворяют всем условиям регулярного синтеза<sup>11,12</sup>) достигает одновременно и своего максимального, и минимального значений. Поэтому для широкого класса задач условия инвариантности должны отличаться от соответствующих условий оптимальности лишь тем, что гамильтониан, принимая на управлении  $\tilde{u}(t)$  одновременно свое минимальное и максимальное значение, не зависит явно от  $u$ .

### 3. Структура области инвариантности и условия инвариантности по начальным данным.

Опорная функция определяет собой структуру фазового пространства инвариантной системы. Область инвариантности  $A$  расслаивается на инвариантные гладкие многообразия размерности  $\ell \leq n$  в  $n+1$ -мерном пространстве  $X \times t$ , являющиеся поверхностями уровня функции  $\tilde{V}(x, \tau)$ . При любых возмущениях  $u(t)$  траектории инвариантной системы, выходящие из одной точки  $\{x, \tau\} \in A$ , принадлежат одному и тому же инвариантному многообразию. Таким образом, как и в случае линейных

систем с постоянными коэффициентами, нелинейная инвариантная система оказывается не полностью управляемой: возмущение не в состоянии вывести изображающую точку из инвариантного многообразия и может только изменить расположение траектории на этом многообразии.

Инвариантность по начальным данным. Если задано множество  $L \subset \mathcal{A}$ , будем называть систему (I) инвариантной по начальным данным на  $L$ , если значения функционала (2) не зависят от возмущающей вектор-функции  $u(t)$  и для всех траекторий, начинающихся в точках множества  $L$ , совпадают. Структура области инвариантности показывает, что для инвариантности системы (I) по начальным данным на  $L$  необходимо и достаточно, чтобы множество  $L$  принадлежало поверхности уровня опорной функции  $V(x, \tau)$ . Нормалью к этой поверхности является  $n+1$ -мерный вектор  $\tilde{P}(x, \tau) = \{-\tilde{p}(x, \tau), \tilde{H}(x, \tau)\}$ . Поэтому, если  $L$  представляет собой гладкое многообразие, и  $\ell(x, \tau)$  есть произвольный касательный вектор к  $L$  в точке  $\{x, \tau\}$  справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Для инвариантности системы (I) по начальным данным на  $L$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие теоремы I и в каждой точке  $\{x, \tau\} \in L$

$$(\tilde{P}(x, \tau), \ell(x, \tau)) = 0.$$

#### 4. Синтез инвариантных систем

Задачу синтеза инвариантной системы мы будем понимать как задачу построения корректирующей цепи, обеспечивающей инвариантность системы с заданной неизменяемой частью. Точная постановка задачи состоит в следующем.

Пусть система управления описывается системой уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x, u, v, t). \quad (7)$$

Здесь  $u$  по-прежнему возмущение, а  $v$  — скалярный управляющий параметр, характеризующий собой изменяемую часть системы. Требуется найти корректирующую функцию

$$v = v(x, u, t), \quad (8)$$

при которой система



$$\dot{x}(t) = f[x, u, v(x, u, t), t] \quad (9)$$

является  $\Phi$ -инвариантной на  $M$  по  $u$ . Предполагается, что для  $u(t) \equiv 0$  система функционирует желательным образом при  $v \equiv 0$ .

Может оказаться, что в определяемой условиями задачи области изменения переменных  $x, u$  и  $t$  непрерывной корректирующей функции не существует. Это приводит к необходимости рассматривать кусочно-непрерывные функции  $v(x, u, t)$ . При этом правая часть системы (I) оказывается разрывной, что, однако, не ведет к появлению существенных особенностей, поскольку свойства инвариантной системы определяются опорным полем, а система (9) при опорном управлении  $\tilde{u}(t) \equiv 0$  непрерывна. Построим соответствующее  $\tilde{u}(t) \equiv 0$  опорное поле  $\tilde{p}(x, t)$  и запишем определяющее уравнение

$$H[x, \tilde{p}(x, t), u, v, t] = H[x, \tilde{p}(x, t), 0, 0, t],$$

которое определяет  $v$  как функцию от  $x, u$  и  $t$ .

Теорема 4. Для того, чтобы функция  $v(x, u, t)$  была корректирующей, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла определяющему уравнению.

Это утверждение показывает, что корректирующая функция должна строиться как решение (или из решений) определяющего уравнения. Таким образом, синтез инвариантной системы сводится к прогнозированию ее невозмущенного движения.<sup>х/</sup> Полное решение задачи обеспечивается знанием вектор-функции  $\tilde{p}(x, t)$ , причем эту вектор-функцию, определяемую невозмущенными системами (9) и (4), достаточно вычислять лишь для точек  $\{x, t\}$  реализующейся возмущенной траектории.

С помощью опорной функции определяющее уравнение записывается в виде

$$-(\text{grad}_x \tilde{V}(x, t), f(x, u, v, t)) = \frac{\partial \tilde{V}(x, t)}{\partial t} = -(\text{grad}_x \tilde{V}(x, t), f(x, 0, 0, t)).$$

---

х/ Отметим, что решение задачи синтеза оптимальной системы требует решения краевой задачи для системы сопряженных переменных.

Задача же определения функции  $\tilde{V}(x, t)$  эквивалентна задаче интегрирования невозмущенной системы (9). Поэтому, если удастся найти полный интеграл этой системы, решение задачи синтеза инвариантной системы определяется в конечном виде. Пусть

$$\tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}(x, \tau, t)$$

есть полный интеграл системы (9) при  $u \equiv 0$ ,  $v \equiv 0$ , где точка  $\{x, \tau\}$  играет роль начальных условий. Подставляя  $\tilde{x}(t)$  в (3) и разрешая полученное уравнение относительно  $\tilde{T}$ , получим  $\tilde{T} = \tilde{T}(x, \tau)$ , откуда

$$\tilde{x}(\tilde{T}) = \tilde{\varphi}[x, \tau, \tilde{T}(x, \tau)] = \varphi(x, \tau).$$

Тогда опорная функция определяется выражением

$$\tilde{V}(x, \tau) = \Phi[\tilde{x}(\tilde{T}), \tilde{T}] = \Phi[\varphi(x, \tau), \tilde{T}(x, \tau)].$$

Условия существования корректирующей функции совпадают с условиями существования решения определяющего уравнения. В качестве простого достаточного условия существования решения этого уравнения можно указать условие  $\Phi$ -управляемости системы (I) по  $v$ , заключающееся в выполнении при всех рассматриваемых значениях переменных  $x$ ,  $u$ ,  $t$  и  $v$  неравенства

$$\frac{\partial}{\partial v} H[x, \tilde{\varphi}(x, t), u, v, t] \neq 0.$$

В том случае, когда в заданной области изменения переменных  $x$ ,  $u$  и  $t$ , или некоторой ее части решения определяющего уравнения не существует, либо никакое решение этого уравнения не удовлетворяет накладываемым условиями задачи на управляющий параметр конструктивным ограничениям, осуществление инвариантного синтеза с помощью корректирующей функции вида (8) невозможно. Это, однако, не означает принципиальной невозможности обеспечить инвариантность системы (7), и указывает только, что закон управления параметром  $v$  следует искать в другой форме.

Из точной формулы для изменения функционала (6) следует, что необходимым и достаточным условием инвариантности систе-

мы (7) является выполнение вдоль любой возмущенной траектории  $x(t), t$ , начинающейся в точке  $\{x^0, t^0\}$ , равенства

$$\Delta J = - \int_{t^0}^T [H[x, \tilde{p}(x, t), u, v, t] - H[x, \tilde{p}(x, t), 0, 0, t]] dt = 0. \quad (10)$$

Это равенство следует рассматривать как специфическое уравнение относительно  $v$ , решение которого должно строиться в соответствии с располагаемой информацией о возмущении и состоянии системы. Например, для случая, когда задано ограничение  $v \in W$ , простейший способ обеспечить выполнение условия (10) состоит в том, чтобы дополнить закон управления, найденный из определяющего уравнения, условиями

$$H[x, \tilde{p}(x, t), u, v, t] = \sup_{w \in W} H[x, \tilde{p}(x, t), u, w, t] \quad \text{при } \Delta J(t) > 0$$

и

$$H[x, \tilde{p}(x, t), u, v, t] = \inf_{w \in W} H[x, \tilde{p}(x, t), u, w, t] \quad \text{при } \Delta J(t) < 0,$$

где  $\Delta J(t)$  есть значение интеграла в правой части равенства (10) при верхнем пределе  $t$ .

Все изложенные выше результаты допускают обобщение на случай инвариантности системы (I) одновременно по  $m \geq 2$  функционалам. Для возможности синтеза управляющий параметр  $v$  должен быть в этом случае  $m$ -мерным вектором, что позволяет построить  $m$  независимых корректирующих цепей.

В том случае, когда правые части системы (I) (или (7)) разрывны, изложенные результаты останутся справедливыми, если считать, что вектор-функция  $\tilde{p}(t)$  в (4) при переходе траектории  $\tilde{x}(t), t$  через поверхность разрыва удовлетворяет обычным условиям скачка<sup>13</sup>. Интересно отметить, что если существует хотя бы одно опорное управление, при котором правые части системы (I) вдоль траекторий  $\tilde{x}(t), t$  непрерывны, опорное поле  $\tilde{p}(x, t)$  и в случае уравнений с разрывными правыми частями остается непрерывным.

## 5. Примеры

Корректирующую функцию можно построить в явном виде для

любой задачи, в которой удастся найти полный интеграл невозмущенного движения. Примерами таких задач могут служить задачи синтеза корректирующей функции для систем вида

$$\dot{x} = Ax + g(x, u, v, t) \quad , \quad \text{где } g(x, 0, 0, t) = 0,$$

задачи, связанные с управлением движением материальной точки в центральном поле гравитационных сил, и ряд других.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = (1+u)x_2, \quad \dot{x}_2 = (1+v)x_1,$$

траектории которой должны оканчиваться на поверхности, определяемой уравнением

$$M(x_1, x_2, t) \equiv x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Единственными корректирующими функциями, обеспечивающими инвариантность по  $u$  этой системы для функционалов

$$\Phi \equiv x_1^2(T) + x_2^2(T), \quad \Psi \equiv x_1(T) - x_2(T) + T \quad \text{и} \quad \Phi \equiv T$$

будут, соответственно, функции

$$v = u, \quad \bar{v} = \frac{2x_1x_2(x_1+x_2) - x_2}{2x_1x_2(x_1+x_2) + x_1} \cdot u \quad \text{и} \quad \bar{v} = -\frac{x_2}{x_1} u.$$

Пример 2. В задаче

$$\dot{x}_1 = x_2[1 + u(1 - v^2)], \quad \dot{x}_2 = x_1 + v(x_1^2 - u^2);$$

$$M \equiv x_1 + x_2 - 1 = 0; \quad \Phi \equiv x_1^2(T) + x_2^2(T)$$

$$\text{имеем } \tilde{V} = 0.5[1 + (x_1^2 - x_2^2)^2], \quad \tilde{p}_1 = -2x_1(x_1^2 - x_2^2), \quad \tilde{p}_2 = 2x_2(x_1^2 - x_2^2)$$

и определяющее уравнение записывается в виде

$$v^2 x_1 u + v(x_1^2 - u^2) - x_1 u = 0.$$

Из двух различных решений этого уравнения можно построить бесконечное число разрывных корректирующих функций. Накладывая на  $v$  дополнительное условие минимальности по абсолютной величине, имеем

$$v = \frac{u}{x_1} \quad \text{при } |x_1| > |u|, \quad v = -\frac{x_1}{u} \quad \text{при } |x_1| \leq |u| \quad \text{и} \quad u \neq 0,$$

$$J=0 \text{ при } u=0.$$

Корректирующей функции, непрерывной во всем пространстве  $X \times U \times t$  в этой задаче не существует.

#### Библиография

1. Кулебакин В.С. Теория инвариантности автоматически регулируемых и управляемых систем. Труды I Конгресса ИФАН. Изд-во АН СССР, Москва, 1961, т. I, стр. 247-258.
2. Петров Б.Н. Принцип инвариантности и условия его применения при расчете линейных и нелинейных систем. Труды I Конгресса ИФАН. Изд-во АН СССР, Москва, 1961, т. I, стр. 259-275.
3. Фельдбаум А.А., Шрейдер Ю.А. Теория компенсации. В книге А.А. Фельдбаума "Вычислительные устройства в автоматических системах", Физматгиз, Москва, 1959, стр. 492-512.
4. Беля К.К. Инвариантность системы регулирования по отношению к измерению параметров системы. Труды I Конгресса ИФАН. Изд-во АН СССР, Москва, 1961, т. I, стр. 282-289.
5. Кухтенко А.И. Критерии абсолютной инвариантности для систем регулирования с переменными параметрами. Известия АН СССР, отделение технических наук. Энергетика и автоматика. № 2, стр. 106-113, 1961.
6. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Емельянов С.В. Инвариантность и оптимизация в системах автоматического управления с жесткой и переменной структурой. Труды II Конгресса ИФАН. Наука, Москва, 1965, т. I, стр. 214-229.
7. Розоноэр Л.И. Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика. т. XXIV, 1963, I - № 6, стр. 744-756; II - № 7, стр. 861-870.
8. Понятин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, Москва, 1961.
9. Розоноэр Л.И., Принцип максимума Л.С. Понятин в теории оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, т. XX, 1959, I - № 10, стр. 1320-1334; II - № 11, стр. 1441-1458, III - № 12, стр. 1561-1578.



10. Величенко В.В. Численный метод решения задач оптимального управления. Журнал вычислительной математики и математической физики, т.6, 1966, № 4, стр.635 - 647.
11. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. Наука, Москва, 1966.
12. Величенко В.В. К достаточным условиям оптимальности в принципе максимума. Доклады АН СССР, т.182, № 4, 1968. стр. 747-749.
13. Величенко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями. Автоматика и телемеханика, 1966, № 7, стр.20-30.

# OPTIMUM CONTROL OF A CLASS OF RANDOMLY-EXCITED DISTRIBUTED-PARAMETER SYSTEMS

Fred E. Thau  
Aerospace Research Center  
General Precision Systems Inc.  
Little Falls, New Jersey, U. S. A.

## Introduction

In recent years there has been increasing interest in the design of distributed-parameter systems. This interest is motivated by the need to design practical control systems for flexible boosters, thermal processes, satellites with flexibly booms, and other systems wherein the distributed nature of the process must be explicitly included.

A comprehensive review of the theory of deterministic distributed-parameter processes through 1964 is contained in Reference 1: concepts which have proven useful in estimation and control studies of lumped-parameter processes — stability, controllability, and observability — are defined, several optimization problems are formulated, the earlier work of Butkovskii is summarized, and a Maximum Principle is presented for the determination of optimum control laws for deterministic distributed-parameter systems. Since 1964 a number of investigations<sup>2 - 15\*</sup> concerning deterministic distributed processes have appeared. These studies have extended techniques that were developed originally for lumped-parameter systems: Axelband<sup>3, 4</sup> applied function space techniques<sup>5</sup> for the derivation of optimum control laws, Pierre<sup>6</sup> used frequency domain techniques to minimize a mean-square-error performance criterion, and Sakawa<sup>7</sup> and Brogan<sup>8, 9</sup> considered computational aspects of determining optimum control laws. Kim and Erzberger<sup>13</sup> and Yeh and Tou<sup>14</sup> examined specific distributed-parameter systems and Herget<sup>15</sup> studied in detail the concept of controllability for distributed parameter systems.

Stochastic distributed processes have also been the subject of a number of investigations: stochastic stability concepts have been extended to the case of distributed parameter processes with random parameters<sup>16</sup>, the Kalman filtering problem has been considered for processes defined in Hilbert space<sup>17</sup>, for classes of linear distributed

---

\* This list of references is representative of contributions made during the past four years but is not intended as a comprehensive bibliography.

processes<sup>18,20</sup> and for linear time-delay systems<sup>21</sup>, and a backward equation has been derived for the randomly-excited diffusion process<sup>22</sup>. An optimum control problem for a class of linear, stochastic distributed-parameter systems has been treated in Reference 23 where an attempt was made to extend the separation theorem<sup>24</sup> of randomly-excited lumped-parameter processes. This theorem states that, under certain conditions, the optimum controller for a randomly-excited lumped-parameter process comprises a Kalman filter to estimate the state of the controlled process and a linear controller to operate on the estimated state. In Reference 23 Bellman's principle of optimality<sup>25</sup> was applied to derive a distributed stochastic Hamilton-Jacobi equation and to obtain the correct optimum control law for the case where perfect measurements of the state of the distributed process are available. However, in attempting to present the separation theorem for the situation where only noisy measurements are available, an incorrect model of the controlled process was used in the distributed Kalman filter of Reference 23.

In this paper the correct optimum control law for a randomly-excited diffusion process is derived using properties of distributed Markov processes. The process to be controlled is defined by

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(t, x) + \xi(t, x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

with boundary conditions

$$u(\tau, 0) = u(\tau, 1) = 0 \text{ for all } \tau. \quad (2)$$

where  $\alpha$  denotes the diffusion constant,  $\{\xi(t, x)\}$  is zero-mean white noise with variance

$$E\{\xi(t, x)\xi(\tau, y)\} = \sigma_\xi^2(t, x, y)\delta(t - \tau) \quad (3)$$

where  $\sigma_\xi^2(t, x, y) = \sigma_\xi^2(t, y, x)$  and  $g(t, x)$  is a control function to be chosen from some set  $G$  of admissible controls so that the cost functional

$$V(t; Y_t) = E\left\{\frac{1}{2} \int_t^T \left[ \int_0^1 \int_0^1 u(s, x) m(s, x, x') u(s, x') dx dx' + \int_0^1 g^2(s, x) n(s, x) dx \right] ds \mid Y_t\right\} \quad (4)$$

is minimized.  $m(s, x, x')$  and  $n(s, x)$  are known positive functions of time and space

with  $m(s, x, x') = m(s, x', x)$  and  $Y_t$  denotes the information available to the controller at the current time  $t$ .

The process (1), (2) may represent the voltage along a short-circuited R-C cable with a distributed random current excitation  $\xi(t, x)$  and a distributed control current  $g(t, x)$  or it may represent the temperature along a rod with ends at a fixed temperature and subject to distributed random heating.

The problem of minimizing (4) for the process (1), (2) will be examined for the general case in which  $Y_t$  represents information provided by a noisy sensor located at the point  $x_1$ ,  $0 < x_1 < 1$ ,

$$Y_t = \{y(\lambda, x_1) : y(\lambda, x_1) = H(\lambda)u(\lambda, x_1) + \eta(\lambda) \text{ for all } \lambda \in [0, t]\} \quad (5)$$

where  $H(t)$  is a known function, and  $\eta(t)$  is zero-mean white noise,

$$E\{\eta(t)\eta(\tau)\} = \sigma_\eta^2 \delta(t - \tau) \quad (6)$$

$$E\{\eta(t)\xi(\tau, x)\} = 0 \text{ for all } t, \tau, x \quad (7)$$

The assumption of a point-wise sensor is, of course, an idealization of a common physical situation where a probe type of measuring device senses the average value of a quantity over a small spatial volume.

The general control problem is introduced after examination of the special case of noise-free observations and after a discussion of the filtering problem. Because the techniques used below are based on representing the solution to (1), (2) in terms of a Green's function, the results are readily extended to more general higher-order processes which also have this property.

#### Control Based on Noise-Free Observations

First assume that the control  $g(t, x)$  is to be based on complete knowledge of the distributed state  $u(t, x)$ . It will be shown that the optimum control law for this case is identical to that previously derived<sup>1</sup> for deterministic distributed processes. This result will be obtained by using the backward operator of Reference 22 to extend an integration rule and an optimality lemma of Wonham<sup>26</sup>.

For the process (1), (2) with  $g(t, x) \equiv 0$  consider the following functional of  $u(x)$ , the given process state at time  $t$ ,

$$\begin{aligned} I(t; u(x)) &= E_{t,u} \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T \int_0^1 \int_0^1 u(s, x) m(s, x, x') u(s, x') dx dx' ds \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T \int_0^1 \int_0^1 m(s, x, x') E_{t,u} \{ u(s, x) u(s, x') \} dx dx' ds \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$E_{t,u} \{ \cdot \} = E \{ \cdot \mid u(t, x) = u(x) \} \quad (9)$$

It will be shown that the integration rule of Wonham<sup>26</sup>,

$$I(t; u(x)) = - E_{t,u} \left\{ \int_t^T \left[ \frac{\partial I}{\partial s} + \mathcal{L} I(s, u(s, x)) \right] ds \right\} \quad (10)$$

holds for (1), (2), where  $\mathcal{L}[\cdot]$  is the backward operator<sup>22</sup>:

$$\mathcal{L} I(t; u(x)) = \int_0^1 \alpha \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \frac{\delta I}{\delta u(x)} dx + \left( \frac{1}{2} \right) \int_0^1 \int_0^1 \sigma_\xi^2(t, z, y) \frac{\delta^2 I}{\delta u(y) \delta u(z)} dy dz \quad (11)$$

The functional derivative  $\frac{\delta I}{\delta u(x)}$  appearing in (11) is defined by<sup>27</sup>

$$\int_0^1 \frac{\delta F[u(x)]}{\delta u(x)} h(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (F[u(x) + \epsilon h(x)] - E[u(x)]) \quad (12)$$

where  $h(x)$  is an arbitrary function on  $0 \leq x \leq 1$ .

To verify (10), formally write the response of (1), (2) with  $g(t, x) \equiv 0$  as

$$u(s, x) = \int_0^1 k(s, t, x, z) u(z) dz + \int_t^s \int_0^1 k(s, \tau, x, z) \xi(\tau, z) dz d\tau \quad (13)$$

where the Green's function  $k(s, \tau, x, z)$  is given by

$$k(s, \tau, x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-n^2 \pi^2 (s - \tau)] \sin(n \pi x) \sin(n \pi z) \quad (14)$$

and has the property  $k(s, s, x, z) = \delta(z - x)$ . Then note that the output process  $\{u(s, x)\}$ ,  $s \geq t$ , has mean



$$\mu(s, x | t, u(x)) = \int_0^1 k(s, t, x, z) u(z) dz \quad (15)$$

and cross-covariance function

$$M(s, x, x' | t) = \int_t^s \int_0^1 \int_0^1 k(s, \tau, x, z) k(s, \tau, x', y) \sigma_\xi^2(\tau, z, y) dy dz d\tau \quad (16)$$

Thus (8) becomes

$$I(t; u(x)) = \frac{1}{2} \int_t^T \int_0^1 \int_0^1 m(s, x, x') [M(s, x, x' | t) + \mu(s, x | t, u(x)) \mu(s, x' | t, u(x))] dx dx' ds \quad (17)$$

Upon taking  $\partial/\partial t$  of (17) and using (11) and (13) — (16) we obtain

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathcal{L}[I] = - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 m(t, x, x') u(x) u(x') dx dx' \quad (18)$$

Hence, from (8) we see that (18) implies (10).

Now (10) will be used in finding the control  $g^0(s, x)$  which minimizes

$$V(t; u(x); g) = E_{t, u} \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T \int_0^1 \int_0^1 u(s, x) m(s, x, x') u(s, x') dx dx' + \int_0^1 g^2(s, x) n(s, x) dx ds \right\} \quad (19)$$

for the process (1), (2). The set  $G$  of admissible controls is:

$$G = \{g(s, x): g(s, x) = \int_0^1 h(s, x, x') u(s, x') dx'\} \quad (20)$$

where  $h(t, x, x')$  is some function differentiable in  $t$  and twice differentiable in  $x$ .

Let  $\mathcal{L}_g[V(t; u(t, x))]$  be given by

$$\mathcal{L}_g[V(t; u(x))] = \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 \int_0^1 \sigma_\xi^2(t, y, z) \frac{\partial^2 V}{\partial u(y) \partial u(z)} dy dz + \int_0^1 \left[ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(t, y) \right] \frac{\partial V}{\partial u(y)} dy \quad (21)$$

where  $g(t, y) \in G$ . Also let

$$\mathcal{L}_g^0 = \mathcal{L}^0; \quad V(t; u(x); g^0) = V^0(t, u(x)) \quad (22)$$

and

$$L(t; u(x); g) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \int_0^1 u(x) m(t, x, x') u(x') dx dx' + \int_0^1 g^2(t, x) n(t, x) dx \right] \quad (23)$$

Now note that with  $g^0(s, x)$  of the form (20),  $V^0$  can be written in the form (8) and consequently (10) applies to  $V^0$ . Thus by applying the integration rule (10) to  $V^0$  in precisely the same manner as in Reference 26, it can be shown that the control  $g^0 \in G$  is optimum if

$$\mathcal{L}^0[V^0(t; u(x))] + L(t; u(x); g^0) \leq \mathcal{L}_g[V^0(t; u(x))] + L(t; u(x); g) \quad (24)$$

Hence the optimum control satisfies the functional stochastic Hamilton-Jacobi equation,

$$-\frac{\partial V^0(t; u(x))}{\partial t} = \min_{g \in G} \{ \mathcal{L}_g[V^0(t; u(x))] + L(t; u(x); g) \} \quad (25)$$

An equation similar to (25) was derived in Reference 23 using the dynamic programming approach.

Upon performing the minimization indicated in (25) one obtains

$$g^0(t, x) = -\frac{1}{n(t, x)} \frac{\delta V^0}{\delta u(x)} \quad (26)$$

Substituting (26) into (25) and assuming a solution of the form

$$V^0(t; u(x)) = \frac{1}{2} w(t) + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 u(x) W(t, x, x') u(x') dx dx' \quad (27)$$

yields

$$g^0(t, x) = -\frac{1}{n(t, x)} \int_0^1 W(t, x, x') u(x') dx' \quad (28)$$

where

$$-\dot{w} = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_\xi^2(t, y, z) W(t, y, z) dy dz \quad (29)$$

$$-\frac{\partial W(t, x, x')}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} - \int_0^1 \frac{W(t, y, x) W(t, y, x')}{n(t, y)} dy + m(t, x, x') \quad (30)$$

and

$$w(T) = W(T, x, x') = 0 \quad \text{for all } x, x' \in [0, 1] \quad (31)$$

$$W(\tau, 0, x') = W(\tau, 1, x') = 0 \quad \begin{array}{l} \text{for all } t \leq \tau \leq T \\ \text{and } x' \in [0, 1] \end{array} \quad (32)$$

$$W(\tau, x, 0) = W(\tau, x, 1) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{for all } t \leq \tau \leq T \\ \text{and } x \in [0, 1] \end{array} \quad (33)$$

The control law (28) is the same as that for the deterministic distributed process (1) with  $\xi(t, x) \equiv 0$ . Hence the above result is the distributed-parameter counterpart of a well-known result for lumped-parameter processes.

### Filtering of Noisy Observations

Consider the problem of generating the minimum variance estimate  $\hat{u}(t, x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , for the process (1), (2) where  $g(t, x)$  is regarded as a deterministic function of  $t$  and  $x$ . It is assumed that measurements are made at a point  $x_1$ ,  $0 < x_1 < 1$ , and are given by (5). Thus  $\hat{u}(t, x)$  is to be generated so that

$$E\{[u(t, x) - \hat{u}(t, x)]^2 | y(\lambda, x_1), \quad 0 \leq \lambda \leq t\} \quad (34)$$

is minimized.

It is well-known that the minimum variance estimate is the mean of the conditional probability density

$$p\{u(t, x) | y(\lambda, x_1), \quad 0 \leq \lambda \leq t\} \quad (35)$$

Using the results of Reference 19, it can be shown that  $\hat{u}(t, x)$  satisfies

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + g(t, x) + K(t, x, x_1)[y(t, x_1) - H(t)\hat{u}(t, x_1)] \quad (36)$$

where

$$K(t, x, x_1) = \Sigma(t, x, x_1)H(t)/\sigma_\eta^2(t) \quad (37)$$

and  $\Sigma(t, x, x_1)$  is obtained from the solution to

$$\frac{\partial \Sigma(t, x, y)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} + \sigma_\xi^2(t, x, y) - \Sigma(t, x, x_1)\Sigma(t, x_1, y)H^2(t)/\sigma_\eta^2 \quad (38)$$

with

$$\begin{aligned}\Sigma(t, 0, \gamma) &= \Sigma(t, 1, \gamma) = 0 \\ \Sigma(t, x, 0) &= \Sigma(t, x, 1) = 0\end{aligned}\quad (39)$$

Because of the linearity of (1) the conditional density (35) is Gaussian with mean (36) and covariance (38), and the conditional mean  $\hat{u}(t, x)$  of (36) is a sufficient statistic for the density (35). In the next section we consider the problem (1) - (7) and seek an optimum control law in terms of this sufficient statistic.

### Control Based on Noisy Observations

In this section a control law of the form

$$g(t, x) = \gamma(t, \beta(t, x)) \quad (40)$$

is sought to minimize (4) for the process (1) - (3), (5) - (7), where  $\beta(t, x) = \hat{u}(t, x)$ , the sufficient statistic given by (36). Thus consider the joint process  $\{u(t, x), \beta(t, x)\}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma(t, \beta(t, x)) + \xi(t, x) \quad (41)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \gamma(t, \beta) + \frac{\Sigma(t, x, x_1) H^2(t)}{\sigma_\eta^2} [u(t, x_1) - \beta(t, x_1)] + \frac{\Sigma(t, x, x_1) H}{\sigma_\eta^2} \eta(t) \quad (42)$$

and write the performance criterion (4) as

$$V(t; \beta) = E \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T \int_0^1 \int_0^1 u(s, x) m(s, x, x') u(s, x') dx dx' + \int_0^1 g^2(s, x) n(s, x) dx ds \mid \beta(t) = \beta \right\} \quad (43)$$

The solution to the analogous problem for lumped-parameter processes is embodied in the well-known separation theorem<sup>24</sup>: a Kalman filter is used to estimate the state of the process and a linear controller then operates on the estimated state. The parameters of the linear controller are independent of the sensor characteristics and thus the operations of filtering and control are said to be separated.

To extend the separation theorem of randomly-excited lumped-parameter processes, consider transition probabilities defined on the output function space  $\Gamma$ , the set of all

possible output functions  $\underline{u}_t = u(t, x)$  of the process (1) at the fixed time  $t$ . These probabilities will be defined formally as follows:

Consider the process  $\{v_i(t)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\dot{v}_i = \alpha \frac{(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{h^2} + \xi_i(t) + g_i(t) \quad (44)$$

where  $h = 1/n$ ,  $\xi_i(t) = \xi(t, ih)$ ,  $g_i(t) = g(t, ih)$ , and  $v_0 = v_n = 0$ . It is well-known<sup>28</sup> that for deterministic time functions  $\xi_i(t)$ ,  $g_i(t)$  the solution  $v_i(t)$  to (44) is a discrete spatial approximation to  $u(t, x_i)$  of (1), and that

$$\lim_{h \rightarrow 0} v_i(t) = u(t, x_i) \quad (45)$$

For the finite-dimensional Markov process (44) defined on the  $n$ -dimensional Euclidean space  $E_n$ ,

$$\text{Prob}\{v(s) \in E_n \mid v(t) = v\} = 1, \quad s \geq t \quad (46)$$

where

$$\text{Prob}\{v(s) \in E_n \mid v(t) = v\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \mid t, v_1, \dots, v_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \quad (47)$$

and  $p(s, \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid t, v_1, \dots, v_n)$  is the Gaussian transition density for (44). Thus we formally define

$$\text{Prob}\{\underline{u}_s \in \Gamma \mid u(t, x) = u(x)\} = 1, \quad s \geq t \quad (48)$$

where

$$\text{Prob}\{\underline{u}_s \in \Gamma \mid u(t, x) = u(x)\} = \int p(s, \underline{u} \mid u(x)) d\underline{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(s, z_1, \dots, z_n \mid t, u(x)) dz_1 \dots dz_n \quad (49)$$

and

$$p(s, z_1, \dots, z_n \mid t, u(x)) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det \Lambda|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (z - \mu)' \Lambda^{-1} (z - \mu)\right] \quad (50)$$

The vector mean  $\mu(s)$  and the covariance matrix  $\Lambda(s)$  of density (50) have elements



$$\mu_i(s) = \mu(s, x_i) = E\{u(s, x_i) \mid t, u(x)\} \quad (51)$$

$$\Lambda_{ij}(s) = E\{[u(s, x_i) - \mu(s, x_i)][u(s, x_j) - \mu(s, x_j)] \mid t, u(x)\} \quad (52)$$

obtained from the solution to

$$\frac{\partial \mu(\tau, x)}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + g(\tau, x) \quad (53)$$

$$\frac{\partial \Lambda(\tau, x, y)}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} + \sigma_\xi^2(\tau, x, y) \quad (54)$$

with appropriate boundary conditions, where

$$\Lambda_{ij}(s) = \Lambda(s, x_i, x_j) \quad (55)$$

The definition (49) is, of course, only formal since the existence of the limit on the right-hand side must be established. A possible approach is to define function space integrals using the Wiener Integral theory<sup>29</sup> which has been developed in the study of Brownian motion. This approach will not be pursued here. Rather, assume the existence of the limit in (49), and since (49) satisfies the backward equation of Reference 22 for every finite  $n$ , we will assume that the limiting probability in (49) satisfies the same backward equation.

Using the notation of (49) denote the transition density of the  $\{u(t, x), \beta(t, x)\}$  process by  $p(s, \underline{u}, \underline{u} \mid t, u(x), \beta(x))$  and the posterior density of  $u(t, x)$  given  $\beta(x)$  by  $p(t, \underline{u} \mid \beta(x))$ . Then (43) is rewritten as

$$\begin{aligned} V(t; \beta) = & \int p(t, \underline{u} \mid \beta(x)) \left( \int_0^T \int \int p(s, \underline{u}, \underline{u} \mid t, u(x), \beta(x)) \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \int_0^1 v(x) m(s, x, x') v(x') dx dx' \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 \gamma^2(s, v) n(s, v) dx \right) d\underline{u} \quad d\underline{u} \quad ds \quad d\underline{u} \right) \quad (56) \end{aligned}$$

and again in the same manner as in Reference 30, it can be shown that the optimum control  $g^0$  satisfies

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V^0}{\partial t} = & \min_g \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Sigma(t, x, x_1) \Sigma(t, y, x_1) H^2}{\sigma_\eta^2} \frac{\delta^2 V^0}{\delta \beta(x) \delta \beta(y)} dy dx \right. \\
& + \int_0^1 \left[ \alpha \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + g \right] \frac{\delta V^0}{\delta \beta(x)} dx \\
& + \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 \int_0^1 \Sigma(t, x, y) m(t, x, y) dy dx + \int_0^1 \int_0^1 \beta(x) m(t, x, y) \beta(y) dx dy \right. \\
& \left. \left. + \int_0^1 g^2(t, x) n(t, x) dx \right] \right\}
\end{aligned} \quad (57)$$

The minimization indicated in (57) yields

$$g^0(t, x) = -\frac{1}{n(t, x)} \frac{\delta V^0}{\delta \beta(x)} \quad (58)$$

Substituting (58) into (57) and assuming a solution of the form

$$V^0(t; \beta(x)) = \frac{1}{2} p(t) + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \beta(x) W(t, x, y) \beta(y) dx dy \quad (59)$$

results in

$$g^0(t, x) = -\frac{1}{n(t, x)} \int_0^1 W(t, x, y) \beta(y) dy \quad (60)$$

where

$$\begin{aligned}
-\dot{p} = & \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Sigma(t, x, x_1) \Sigma(t, y, x_1) H^2}{\sigma_\eta^2} W(t, x, y) dy dx \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \Sigma(t, x, y) m(t, x, y) dy dx
\end{aligned} \quad (61)$$

$$p(T) = 0 \quad (62)$$

and  $W(t, x, y)$  is given by (30 - (33).

This result is an extension of the separation theorem for lumped-parameter processes. Note that, as indicated by (42), the distributed Kalman filter uses a model of the controlled process, including the effect of the feedback control.

### Example

To gain insight into the properties of the filtering and control equations, numerical solutions have been obtained for a number of special cases. Note that the process (1) - (8) with measurements (5) - (7) and performance criterion (4) corresponds to a simplified version of a temperature regulation problem for a rod of unit length, the ends of which are held at a fixed temperature. For convenience in solving the filtering and control equations on a digital computer the following parameters were chosen:  $\alpha = 1$ ,  $\sigma_{\xi}^2(t, x, y) = 1.0$ ,  $H(t) = 1$ ,  $\sigma_{\eta}^2 = 10^{-4}$ ,  $m(s, x, x') = 1$ ,  $n(s, x) = 1$ . The partial differential equations were integrated using a fixed grid size  $\Delta = .166$  to approximate second derivatives as in (44).

A problem that arises is that of choosing the best sensor location. In Reference 19(b) it was found the filter covariance at the point  $x = .64$  for various sensor locations is as shown in Figure 1. The figure indicates that, in this case, the sensor location for minimum filter error is at the center of the rod.

The effect of the distributed controller is shown in Figures 2 and 3. Figure 2 shows curves of the covariance function  $\Sigma_o(t, x, x)$  for the uncontrolled or open-loop process (1) with  $g(t, x) = 0$ . Figure 3 shows the covariance  $\Sigma_c(t, x, x)$  for the closed-loop system with  $x_1 = .833$  and  $g(t, x)$  given by (60). As expected the closed-loop system provides a smaller mean-square deviation from equilibrium than does the uncontrolled process.

### Conclusion

Although the above analysis is confined to the diffusion process, the results are readily extended to other processes whose solution can be expressed in terms of a Green's function. It is reassuring to note that if a modal representation is used to convert (1) to an enumerable system of ordinary differential equations and if the well-known results for lumped-parameter processes are used, then the resulting equations are identical with a series representation for the solution to (58) - (62).

The above derivation is not mathematically rigorous for the following reasons: the stochastic partial differential equation (1) has been treated only formally. One approach to a rigorous definition of (1) would be to consider the integral representation for the response (13) and to define the stochastic integral in (13) as is done in the theory of stochastic ordinary differential equations. The transition probability density functional

of the output of the randomly-excited distributed process has also been used in a formal sense only. As noted earlier one approach to a rigorous representation could be based on Wiener integral theory.

The above analysis has been facilitated by the fact that for the parabolic equation considered, because of the absence of time-delays, the theory of lumped-parameter Markov processes is readily extended. However, randomly-excited distributed-parameter processes with time-delays and reflected signals require further study. Another important question is that of constructing sub-optimum lumped-parameter controllers for distributed processes and evaluating the degradation in performance compared with the optimum distributed-parameter controller. These are problem areas currently receiving attention.

#### References

1. Wang, P.K.C., "Control of Distributed Parameter Systems," Advances in Control Systems, Vol. 1, edited by C.T. Leondes, Academic Press, pp.75-172, New York, 1964.
2. Wang, P.K.C., "Asymptotic Stability of Distributed Parameter Systems with Feedback Controls," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-11, No. 1, pp. 46-54, January 1966.
3. Axelband, E.I., "Function Space Methods for the Optimum Control of a Class of Distributed Parameter Control Systems," 1965 JACC preprint volume pp. 374-380.
4. Axelband, E.I., "The Structure of the Optimal Tracking Problem for Distributed-Parameter Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-13, No.1, pp. 50-56, February 1968.
5. Balakrishnan, A.V., "Optimal Control Problems in Banach Spaces," J. SIAM, Vol. 13, No. 1, pp. 152-180, 1965.
6. Pierre, D.A., "Minimum Mean-Square-Error Design of Distributed-Parameter Control Systems," 1965 JACC preprint volume, pp. 381-389.
7. Sakawa, Y., "Solution of an Optimal Control Problem in a Distributed-Parameter System," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-9, pp. 420-426, October 1964.
8. Brogan, W.L., "Dynamic Programming and a Distributed Parameter Maximum Principle," 1967 JACC preprint volume, pp. 726-732.
9. Brogan, W.L., "Theory and Application of Optimal Control for Distributed Parameter Systems - I and II," Automatica, Vol. 4, pp. 107-137, 1967.
10. Khatri, H.C. and Goodson, R.E., "Optimal Control of Systems with Distributed Parameters," 1965 JACC preprint volume, pp. 390-397.

11. Lorchirachoonkul, V. and Pierre, D.A., "Optimal Control of Multi-Variable Distributed-Parameter Systems Through Linear Programming," 1967 JACC preprint volume, pp. 702-710.
12. Vaughan, D.R., "Application of Distributed Parameter Concepts to Dynamic Analysis and Control of Bending Vibrations," 1967 JACC preprint volume, pp. 711-725.
13. Kim, M. and Erzberger, H., "On the Design of Optimum Distributed Parameter Systems with Boundary Control Function," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-12, pp. 22-28, February 1967.
14. Yeh, H.-H., and Tou, J.T., "Optimum Control of a Class of Distributed-Parameter Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-12, pp. 29-37, February 1967.
15. Herget, C.J., "Controllability of Distributed Parameter Systems," University of California, Los Angeles, Report No. 67-56, October 1967.
16. Wang, P.K.C., "On the Almost Sure Stability of Linear Stochastic Distributed-Parameter Dynamical Systems," Transactions of ASME, J. of Applied Mechanics, pp. 182-186, March 1966.
17. Falb, P.L., "Infinite-Dimensional Filtering: The Kalman-Bucy Filter in Hilbert Space," Information and Control, Vol. 11, pp. 102-137, 1967.
18. Kim, M. and Blauth, R.E., "On the Filtering Problem for Distributed Parameter Systems with Random Boundary Conditions," submitted to IEEE Transactions on Automatic Control.
19. Thau, F.E., "On Optimum Filtering for a Class of Linear Distributed-Parameter Systems," (a) presented at 1968 Joint Automatic Control Conference, June 26-28, 1968, (b) to be published in ASME Journal of Basic Engineering.
20. Tzafestas, S.G. and Nightingale, J.M., "Optimal Filtering, Smoothing, and Prediction in Linear Distributed-Parameter Systems," Proc. IEEE, Vol 115, No. 8, August, 1968, pp. 1207-1212.
21. Kwakernaak, H., "Optimal Filtering in Linear Systems With Time-Delays," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-12, pp. 169-173, April 1967.
22. Thau, F.E., "A Backward Equation for a Randomly-Excited Diffusion Process," IEEE Transactions on Automatic Control, December 1968.
23. Tzafestas, S.G. and Nightingale, J.M., "Optimal Control of a Class of Linear Stochastic Distributed-Parameter Systems," Proc. IEEE, Vol. 115, No. 8, August, 1968, pp. 1213-1220.
24. Joseph, P.D. and Tou, J.T., "On Linear Control Theory," Transactions AIEE, Part II, pp. 193-196, September 1961.
25. Athans, M. and Falb, P.L., Optimal Control, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966, pp. 313-316.
26. Wonham, W.M., "Lecture Notes on Stochastic Control," Brown University, Center for Dynamical Systems, Report 67-2, February 1967.
27. Volterra, V., Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations, Dover Publications, Inc., New York 1959.



28. Tychonov, A.N. and Samarskii, A.A., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964.
29. Schilder, M., "The Wiener Integral Calculus and Some of Its Applications to Engineering and Physics," General Precision Systems Inc., Research Center, Technical Report RC-68-1, February 1968.
30. Wonham, M., "Stochastic Problems in Optimal Control," IEEE Convention Record, Part 4, pp. 114-124, 1963.

#### List of Figures

- Figure 1. Filter Covariance at  $x = .64$   
 Figure 2. Open-Loop Variance  
 Figure 3. Closed-Loop Variance

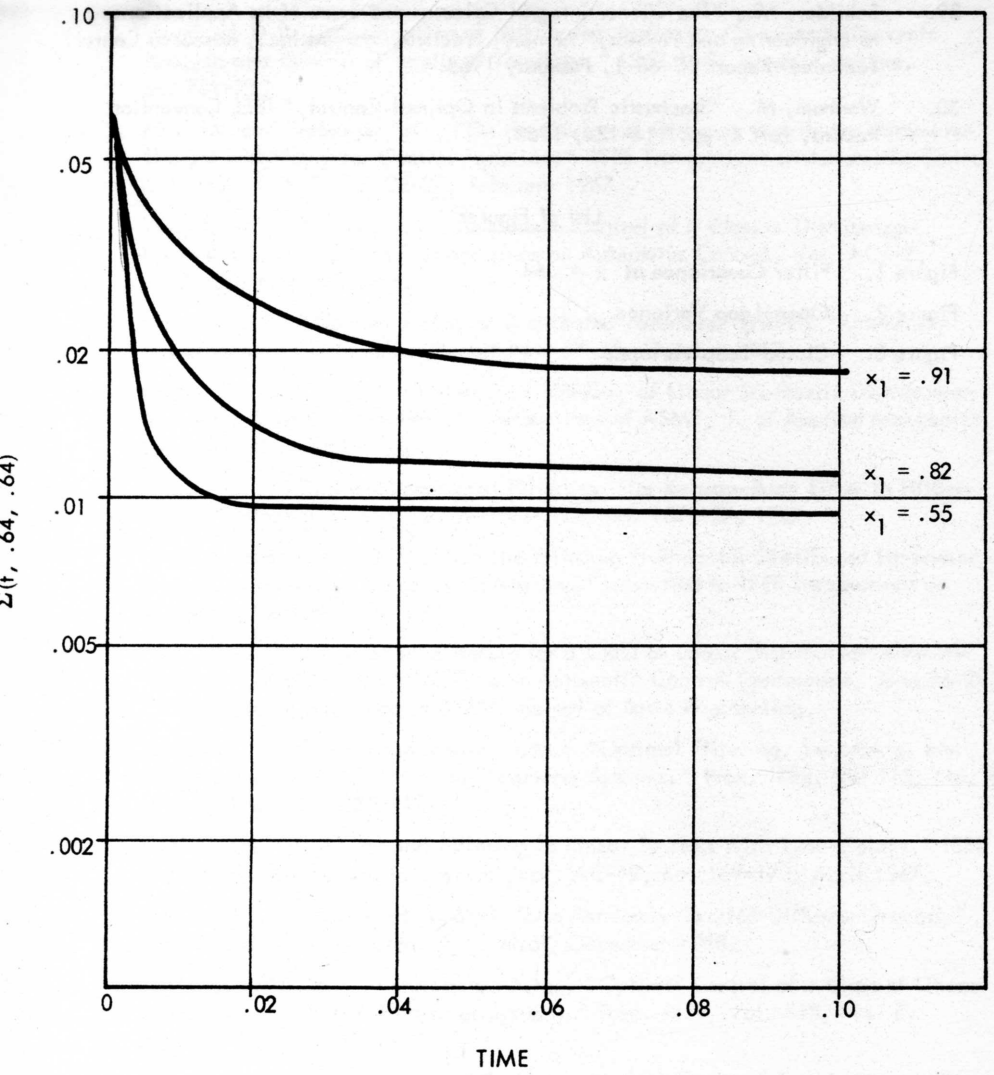


FIGURE 1

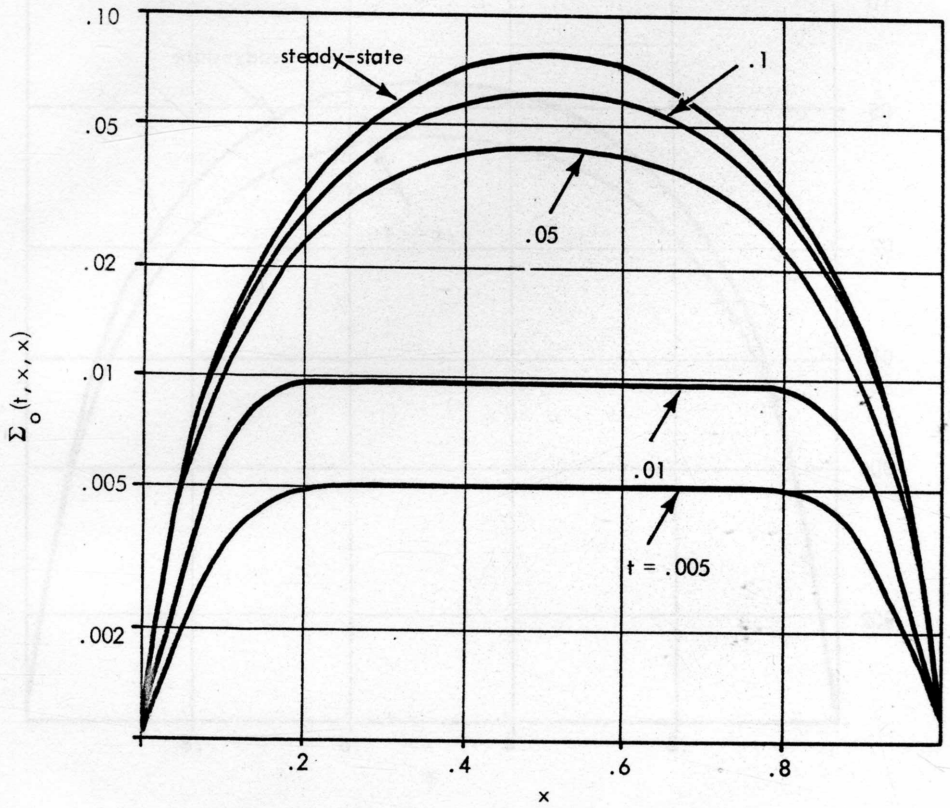


FIGURE 2

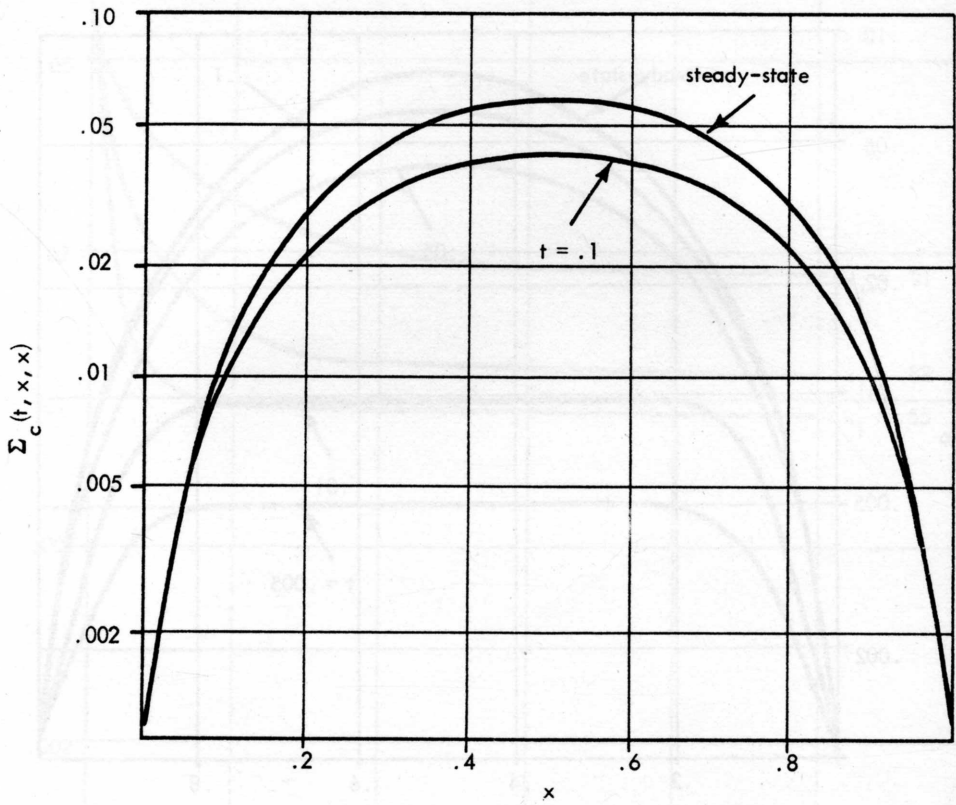


FIGURE 3

