

# IFAC



WARSZAWA 1969

INTERNATIONAL FEDERATION  
OF AUTOMATIC CONTROL

## Guidance and Control in Space

Fourth Congress of the International  
Federation of Automatic Control  
Warszawa 16–21 June 1969

TECHNICAL  
SESSION

# 43



Organized by  
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce

INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL

# **Guidance and Control in Space**

TECHNICAL SESSION No 43

FOURTH CONGRESS OF THE INTERNATIONAL  
FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL  
WARSZAWA 16 – 21 JUNE 1969



Organized by  
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce

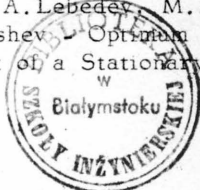




1181064

Contents

Paper No		Page
43.1	SU - B.N.Petrov, N.P.Kolpakova, V.A.Vasiliev, A.I. Pavlenko - Certain Questions of the Synthesis of Systems of Controlling the Spatial Motion of the Orbital Spacecraft in the Earth Atmosphere	3
43.2	USA - T.B.Murtagh - Optimum Interplanetary Midcourse Velocity-Correction Schedules.....	19
43.3	SU - V.M. Ponomarev, V.I. Gorodietski - Optimum Parametric Control Principles of Cosmic Vehicle.....	39
43.4	SU - A.G.Vlasov, I.S.Ukolov, E.I.Mitroshin - Stochastic Optimization of Controlling the Descent of Spacecraft in the Atmosphere.....	52
43.5	SU - D.E.Okhocimsky, A.P.Bukharkina, Ju.F. Golubiev - Control of the Space Vehicle During the Re-Entry.....	67
43.6	SU - Y.P.Plotnikov - Stochastic Problems of Rocket Dynamics.....	84
43.7	SU - A.Y.Andryenko - Statistical Synthesis of Optimum Impulse Control Systems for Spacecraft with Account Being Taken of System Structure Limitations.....	101
43.8	SU - A.A.Lebedev, M.N.Krasilszczikov, V.V. Malyshev - Optimum System of Controlling the Orbit of a Stationary Artificial Earth Satellite....	115



K-1313

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА СТРУКТУР СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ОРБИТАЛЬНОГО САМОЛЕТА В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ.

Петров Б.Н. Колпакова Н.П. Васильев В.А. Павленко А.И.  
Московский авиационный институт  
(Москва)

Условия полета орбитального самолета (ОС) на гиперзвуковых скоростях требуют учета взаимного влияния продольного и бокового движений даже на сравнительно малых углах атаки и скольжения. Система управления в этом случае будет иметь большое количество каналов регулирования, связанных между собой через объект, что обычно ухудшает динамические свойства систем и нередко приводит к неустойчивости. В результате связи каналов управления при изменении одной из регулируемых координат будут изменяться и другие, в связи с чем представляет интерес исследовать множество  $G$  структур систем управления ОС в классе связанных многоканальных систем, обеспечивающих независимость или малую зависимость каналов регулирования или их групп.

В работе рассматриваются линейные многоканальные системы, связь каналов в которых обусловлена самим объектом и ставится задача получения множества  $G \{M, S, L\}$  структур, обеспечивающих селективную инвариантность, чтобы в последующем выбрать из них лучшие как в смысле качества, так и простоты реализации.

## § 1. Уравнения пространственного движения летательного аппарата.

ОС является летательным аппаратом со сравнительно большим аэродинамическим качеством на гиперзвуковых скоростях полета. Аэродинамическое качество позволяет совершать ОС эффективный пространственный маневр [1] за счет подъемной силы, возникающей при полете аппарата в атмосфере Земли. Режимы полета ОС с большими углами крена, достигающими до  $90^\circ$ , являются характерными для ОС, выполняющего маневр, и ставят новые зада-



чи перед системой управления.

Для ОС, совершающего полет в атмосфере Земли со скоростями близкими к первой космической, нельзя пренебрегать центробежными и кориолисовыми силами, как это делается для обычных самолетов. Поэтому для получения траектории движения центра масс ОС используем систему уравнений движения центра масс ОС в полускоростной системе координат с учетом кривизны и вращения Земли [2].

Добавляя к полученной системе уравнений уравнения, описывающие движение ОС вокруг центра масс, кинематические уравнения движения центра масс ОС в проекциях на земные оси, кинематические уравнения, описывающие вращение ОС относительно земных осей, а также ряд геометрических соотношений, связывающих углы в полускоростной системе координат с углами в связанной системе получим систему из 15 нелинейных уравнений.

На первом этапе проектирования системы управления важно оценить наиболее полно динамические свойства ОС как объекта регулирования.

С этой целью упростим исходную систему уравнений, линеаризовав ее относительно некоторого номинального режима. Но здесь следует иметь в виду, что так как ОС совершает полет в атмосфере на больших углах атаки  $\alpha$  и, как правило, с большими углами крена, что ведет к появлению больших углов скольжения, то здесь нельзя использовать для исследования динамики ОС известную методику разделения движений на продольное и боковое. После линеаризации система разрешается относительно параметров, играющих наиболее важную роль в управлении объектом.

Система линеаризованных уравнений пространственного движения ОС имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} V &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma + a_{14}\psi + a_{15}\chi + a_{17}H + a_{18}\delta_{\gamma\gamma} + a_{19}\delta_{\beta} + a_{110}\delta_{\eta}, \\ \psi &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma + a_{25}\chi + a_{26}V + a_{27}H + a_{28}\delta_{\gamma\gamma} + a_{29}\delta_{\beta} + a_{210}\delta_{\eta}, \\ \chi &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma + a_{34}\psi + a_{36}V + a_{37}H + a_{38}\delta_{\gamma\gamma} + a_{39}\delta_{\beta} + a_{310}\delta_{\eta}, \\ \gamma &= a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{44}\psi + a_{45}\chi + a_{46}V + a_{47}H + a_{49}\delta_{\beta} + a_{410}\delta_{\eta} + a_{411}\delta_{\gamma}, \dots \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta &= a_{53}\gamma + a_{54}\vartheta' + a_{55}\psi + a_{56}V + a_{57}H + a_{57b}\delta_H + a_{57c}\delta_z, \\ \alpha &= a_{62}\beta + a_{63}\gamma + a_{64}\vartheta' + a_{65}\psi + a_{66}V + a_{67}H + a_{68}\delta_z, \\ H &= a_{71}\alpha + a_{72}\beta + a_{73}\gamma + a_{74}\vartheta' + a_{75}V. \end{aligned} \right.$$

где:  $a_{ij}$  - операторные коэффициенты;  $V$  - отклонение скорости полета;  $\vartheta'$  - отклонение угла тангажа;  $\psi$  - отклонение угла курса;  $\gamma$  - отклонение угла крена;  $\beta$  - отклонение угла скольжения;  $\alpha$  - отклонение угла атаки;  $H$  - отклонение высоты;  $\delta_H$  - изменение положения органа управления тягой двигателя;  $\delta_z$  - отклонение руля высоты;  $\delta_H$  - отклонение руля направления;  $\delta_z$  - отклонение элеронов.

Из системы уравнений оо"екта управления (1) видна взаимосвязь между координатами  $V$ ,  $\vartheta'$ ,  $\psi$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $H$ . Следовательно при 4-х регулирующих органах и 4-х координатах, выоранных в качестве регулируемых, ообразуется  $4^X$ -канальная система, каждый из каналов которой будет связан с другими через оо"ект. Очевидно создание системы управления без дополнительных связей, обеспечивающих независимость (или малую зависимость) каналов будет затруднительным. Поэтому оудем рассматривать множество структур в классе связанных систем, воспользовавшись алгоритмами построения множества структур селективно инвариантных систем. Здесь класс комбинированных систем не рассматривается.

## § 2. Граф-математическая модель уравнений движения. Синтез системы управления ОС.

В качестве основы структурного представления систем управления ОС принимаются графы без петель, что в значительной мере облегчает исследование внутренних связей координат в оо"екте, позволяет производить выбор регулирующих органов из условия наибольшей эффективности их в процессе регулирования, а также позволяет определить множество структур селективно инвариантных систем  $G\{M, S, L\}$ .

на основании системы уравнений (1) построим граф-математическую модель пространственного движения ОС в атмосфере Зем-



ли как объекта регулирования (фиг.1).

В качестве регулируемых координат для ОС примем  $V$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$ . Поскольку для ОС угол скольжения  $\beta$  на некоторых режимах полета может оказаться значительным и будет сильно влиять на траектории пространственного движения ОС, необходимо также и  $\beta$  рассматривать в качестве регулируемой величины. Тогда из графа пространственного движения ОС (фиг.1) выделим граф управляемых координат  $G(x, \gamma)$  (фиг.2) и далее рассмотрим множество возможных структур селективно инвариантных систем.

В работе [4] подробно рассмотрены все виды связей, обеспечивающих селективную инвариантность многоканальных систем и показано, что в зависимости от вида связей возможна автономность в смысле Вознесенского, инвариантность относительно не-собственных управляющих и возмущающих воздействий или и то и другое.

Начнем рассмотрение множества структур систем управления ОС с множества в виде прадеревьев  $M$ . Для графа, у которого в качестве корня выбран угол крена  $\gamma$ , количество вариантов прадеревьев можно определить по теореме III (см.приложение).

$$\Delta_{\gamma} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Все структуры множества  $M$ , где угол крена  $\gamma$  выбран в качестве корня, показаны на фиг.3. Аналогичным образом находятся количества прадеревьев для  $V$  ( $\Delta_V = 12$ );  $\alpha$  ( $\Delta_{\alpha} = 16$ ) и  $\beta$  ( $\Delta_{\beta} = 8$ ). Таким образом все множество структур  $M$  систем управления, построенных в виде прадеревьев будет равно 48.

Перейдем к рассмотрению множества структурных графов  $S$ . Также как и ранее, множество  $S$  с корнем  $\gamma$  будет равно  $\Delta_{\gamma} = 3$ .

На фиг.4 приведены структурные графы для  $\gamma$ . Количество связей, необходимых для построения системы управления в виде структурного графа равно  $K = 6$ .

Исследование множества структур  $S$  дает большие возможности для выбора системы управления ОС, отвечающей поставленным перед ней требованиям.

И, наконец, перейдем к рассмотрению множества автономных групп каналов -  $L$ . Возможны четыре варианта построения автономных групп. Количество связей ( $K$ ) в этих случаях будет:

а) для групп в виде симметричных подграфов  $K = 6$

- б) для групп в виде структурных графов  $K = 6$ ;
- в) для групп в виде прадеревьев  $K = 9$ ;
- г) при треугольной (или квазиреугольной) матрице системы и наличии групп  $K = 3$ .

Некоторые структуры в виде автономных групп и в виде симметричных подграфов показаны на фиг.5.

Следует отметить, что в более сложных случаях, когда число регулируемых координат  $> 4$ , можно создать алгоритм перебора всего множества структур  $G \in \{M, S, L\}$  и с помощью ЦВМ получать все структуры, отвечающие требованиям физической реализации и заданному качеству регулирования.

В качестве примера предложенной выше методики синтеза структур систем управления ОС был произведен синтез системы управления гипотетического ОС.

Для большей иллюстративности был рассмотрен частный режим полета ОС, а именно, маршевый полет на постоянной высоте по малому кругу (фиг.6).

Анализ значений операторных коэффициентов  $a_{ij}$  показывает, что для данного случая полета некоторыми из них, вследствие малости, можно пренебречь и тогда объект приводится к графу (фиг.7). Обоснованность такого упрощения подтверждается переходными процессами, представленными на фиг.8, полученными решением исходных линеаризованных уравнений объекта на ЦВМ при скачкообразном изменении положения органов управления  $\delta_{гр}, \delta_{н}, \delta_{в}, \delta_{э}$

Сопоставление найденных структур системы позволяет сделать вывод, что структура (фиг.9), в которой практически требуется одна дополнительная связь (пунктир), оказывается предпочтительной.

Особенность полученной структуры заключается в том, что угол скольжения  $\beta$  - автономен и инвариантен относительно углов крена  $\gamma$  и атаки  $\alpha$  и скорости полета ОС. Влияние угла скольжения на углы крена и атаки сведется в этом случае к известным возмущающим воздействиям при воздействии  $f_a$ , расчет которых весьма прост. Известными возмущениями, действующими на канал скорости, будут возмущения от изменения углов атаки, крена и скольжения.



Примем следующую последовательность синтеза регуляторов системы, считая, что регуляторы каналов углов атаки, крена и скорости полета ОС могут быть выбраны без учета внутренних связей в объекте управления. Определим передаточные функции регуляторов  $W_\alpha(s)$ ,  $W_\gamma(s)$ ,  $W_r(s)$  процессов управления  $V$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  и стабилизации  $\beta$  из желаемых свойств:

$$\Phi_{\kappa_i}^y(s) = \Phi_i^y(s), \quad (2)$$

где  $\Phi_{\kappa_i}^y(s)$  - передаточная функция замкнутого канала, соответствующая желаемым свойствам,  $\Phi_i^y(s)$  - передаточная функция синтезируемого канала.

В соответствии с (2) для режима управления получим формулу передаточной функции регулятора:

$$W_i(s) = \frac{1}{W_{ii}(s)} \cdot \frac{A_i(s)}{[B_i(s) - A_i(s)]} \quad (3)$$

где  $\Phi_{\kappa_i}^y(s) = \frac{A_i(s)}{B_i(s)}$

$W_{ii}(s)$  - передаточная функция канала по собственному управляемому сигналу  $y_i$ .

Синтез передаточной функции регулятора  $W_r(s)$  будем производить с учетом внутренних связей, определяемых передаточными функциями связей координат объекта  $W_{\alpha r}(s)$ ,  $W_{\gamma \alpha}(s)$

В соответствии с графом фиг.9, передаточная функция регулятора  $W_r(s)$  с учетом (2) запишется

$$W_r(s) = \frac{1}{W_{rr}(s)} \cdot \frac{A_r(s)}{[B_r(s) - A_r(s)]} \cdot [1 - W_c(s)], \quad (4)$$

где

$$W_c(s) = \frac{W_{\alpha r}(s) \cdot W_{\gamma \alpha}(s)}{1 + W_{\alpha \alpha}(s) W_{\alpha}(s)}$$

Переходные процессы координат при воздействии каналов друг на друга будут легко получены из рассмотрения графа фиг. 9.

Например:  $\beta(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}_{\beta}(s) e^{st} ds$ , где

$$\bar{\Phi}_{\gamma\beta}(s) = \frac{\alpha_{\gamma\beta}(s) + \alpha_{\beta\gamma}(s) \cdot \alpha_{\gamma\gamma}(s)}{1 - \alpha_{\gamma\gamma}(s) \cdot \alpha_{\beta\beta}(s)}$$

$$\alpha_{\gamma\beta}(s) = \frac{W_{\gamma\beta}(s)}{1 + W_{\gamma\gamma}(s) W_{\beta\beta}(s)}, \quad \alpha_{\beta\gamma}(s) = \frac{W_{\beta\gamma}(s)}{1 + W_{\beta\beta}(s) W_{\gamma\gamma}(s)}, \quad \alpha_{\gamma\gamma}(s) = \frac{W_{\gamma\gamma}(s)}{1 + W_{\gamma\gamma}(s) W_{\gamma\gamma}(s)}$$

$$\alpha_{\beta\beta}(s) = \frac{W_{\beta\beta}(s)}{1 + W_{\beta\beta}(s) W_{\beta\beta}(s)}, \quad \beta_f(s) = \frac{W_{\beta\beta}(s)}{1 + W_{\beta\beta}(s) W_{\beta\beta}(s)} f_f(s), \quad (5)$$

$f_f$  - возмущающее воздействие по  $\beta$ ;

$$V_{\beta}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \bar{\Phi}_{\gamma\beta}(s) \beta_f(s) e^{st} ds,$$

де

$$\bar{\Phi}_{\gamma\beta} = \frac{W_{\gamma\beta}(s)}{1 + W_{\gamma\gamma}(s) W_{\beta\beta}(s)}$$

Аналогичным образом могут быть получены переходные процессы других координат <sup>при</sup> управляющих и возмущающих воздействиях:

$$L_{\beta}(t), L_{\gamma}(t), L_{\gamma}(t) \quad \text{и т.д.}$$

Для примера, на ЦВМ были просчитаны переходные процессы координатах от управляющего воздействия по скорости  $y_v$  как видно из фиг.10 переходные процессы по скорости полета удовлетворяют заданным требованиям качества процессов.

## ВЫВОДЫ

В работе показано, что:

1. Орбитальный самолет в пространственном движении является сложным объектом управления со связями всех координат через объект. Поэтому при проектировании целесообразно рассматривать множество  $G$  структур систем управления классе связанных многоканальных систем, обеспечивающих независимость или малую зависимость регулирования.

2. Использование алгоритмов для построения множества структур селективно инвариантных систем и декомпозиции системы с помощью теории графов позволяет получить широкую возможность выбора наилучшей структуры с точки зрения качества просты реализации.



### Приложение

ниже приводится ряд теорем, используемых в настоящей работе. доказательства которых приведены в работе 5.

теорема 1. Если граф содержит дуги некоторого контура, то определитель матрицы инцидентий для дуг  $|S_n^2| = 0$ .

#### Автономные системы.

Рассмотрим автономные системы в смысле Вознесенского А.Н., для чего образуем матрицу линейной композиции для дуг и вершин графа в следующем виде:

$$\|S_i^j\| = \begin{cases} -I & \text{при } i \neq j & (x_i, x_j) \in U, \\ 0 & \text{при } i \neq j & (x_i, x_j) \notin U \\ I & \text{при } i = j \end{cases} \quad \dots (6)$$

Теорема II. Граф является автономным тогда, когда определитель квадратной матрицы  $|S_n^2| = I$  при  $\Gamma_X = \Phi$  (непосредственно)

Количество связей  $K$ , необходимых для построения этого варианта графа, равно

$$K = n(n - 1) \quad \dots (?)$$

#### Структурные графы.

Запишем определение структурного графа с корнем  $x_i$  [4].

- 1) Структурный граф - это граф  $G(X, \Gamma)$  с корнем  $x_i$ .
- 2) Граф  $G(X, \Gamma)$  не содержит контуров,
- 3) Ни одна из дуг не заходит в вершину  $x_i$  (корень)

Начнем рассмотрение со структурных графов, наиболее часто встречающихся, в виде прадеревьев. Запишем определение прадерева:

- 1) прадерево есть граф с корнем  $x_i \in U$ ,
- 2) граф  $(X, U)$  не содержит контуров,
- 3) в каждую вершину прадерева заходит одна единственная дуга,
- 4) ни одна дуга не заходит в корень графа  $x_i$ ,
- 5) граф  $(X, U)$  имеет  $(n - 1)$  дуг. Если  $n$  - число вершин,  $m$  - число дуг, то  $m = n - 1$

Воспользовавшись известной теоремой Трента<sup>x)</sup> о коли-

<sup>x)</sup> Trent H.M. A note of the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph. Proc. Nat. Ac. Sciences, 1954, 40, 1004

честве деревьев и помня, что прадерево есть дерево с ориентацией дуг, запишем матрицу в следующем виде:

$$\|a_{ij}\| = \begin{cases} |\Gamma x_i| & \text{при } i = j \\ -1 & \text{при } i \neq j, (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{при } i \neq j, (x_i, x_j) \notin U \end{cases} \quad \dots (8)$$

**Теорема III.** Число прадеревьев в графе равно минору  $\Delta_i$  любого из элементов главной диагонали квадратной матрицы  $\|a_{ij}\|$  порядка  $n$ .

Для симметричного графа с корнем  $x_i$  минор  $\Delta_i$  записывается

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} (n-1) & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (n-1) & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -1 & -1 & \dots & (n-1) \end{vmatrix} \quad \dots (9)$$

Как видно из (9), для симметричного графа  $\Delta_i = n^{n-2}$ . Отсюда следует, что:

- 1) количество связей  $K$ , обеспечивающих построение прадерева будет равно  $K = n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$  (10)
- 2) все множества  $M$  вариантов прадеревьев в симметричном графе равно  $B = n^{(n-1)}$
- 3) в общем случае число возможных вариантов  $B$  прадеревьев равно:  $B = \Delta_i n$

**Теорема IV.** Граф  $G$  является структурным с корнем  $x_i$  тогда и только тогда, когда  $\Delta_i = 1$ , во всех остальных случаях  $\Delta_i = 0$ .

**Теорема V.** Число структурных графов равно минору  $\Delta_i$  любого из элементов главной диагонали квадратной матрицы инцидентий  $\|a_{ij}\|$ . В симметричном графе  $G(x, \Gamma)$  количество структурных графов с корнем  $x_i$  равно  $(n-1)!$

Как следствие теоремы определена формула количества связей, обеспечивающих построение структурного графа:

$$K = \frac{n(n-1)}{2} \quad \dots (11)$$

Все множество структурных графов в симметричном графе будет равно  $B = n!$  или в общем случае  $B = \Delta_i n$ .

#### Автономные группы. Декомпозиция системы.

Под автономной группой будем понимать несколько кана-

лов регулирования в системе, связанных между собой естественными связями через объект.

Представим матрицу системы  $\|S_n\|$  в виде

$$\|S_n\| = \begin{vmatrix} S_k^\kappa & 0 \\ 0 & S_{n-\kappa}^{n-\kappa} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \|S_n\| = \begin{vmatrix} S_k^\kappa & S_{n-\kappa}^\kappa \\ 0 & S_{n-\kappa}^{n-\kappa} \end{vmatrix}$$

тогда как и ранее

$$\|S_n\| = |S_k^\kappa| \times |S_{n-\kappa}^{n-\kappa}|$$

Возможны четыре варианта системы:

1. если  $|S_k^\kappa| = 0$ ,  $|S_{n-\kappa}^{n-\kappa}| = 0$ , то  $|S_n^n| = 0$
2. если  $|S_k^\kappa| = 1$ ,  $|S_{n-\kappa}^{n-\kappa}| = 0$ , то  $|S_n^n| = 0$
3. если  $|S_k^\kappa| = 0$ ,  $|S_{n-\kappa}^{n-\kappa}| = 1$ , то  $|S_n^n| = 0$
4. если  $|S_k^\kappa| = 1$ ,  $|S_{n-\kappa}^{n-\kappa}| = 1$ , то  $|S_n^n| = 1$

Первый вариант многоканальных систем соответствует такому случаю, когда все автономные группы построены в виде симметричных подграфов; во втором и третьем вариантах некоторая часть групп, определяемых  $|S_k^\kappa|$  или  $|S_{n-\kappa}^{n-\kappa}|$  построена в виде структурных графов; четвертый вариант определяет граф, составленный из автономных групп в виде структурных графов.

Количество необходимых связей ( $K$ ) в этих случаях будет зависеть от числа групп ( $n$ ) и регулируемых координат, охватываемых группой  $m$ .

- 1) для групп в виде симметричных подграфов:

$$K = n(n-1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i(m_i-1) \quad \dots (12)$$

- 2) для групп в виде структурных графов:

$$K = n(n-1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i-1) \quad \dots (13)$$

- 3) для групп в виде прадеревьев:

$$K = n(n-1) - \sum_{i=1}^n (m_i-1) \quad \dots (14)$$

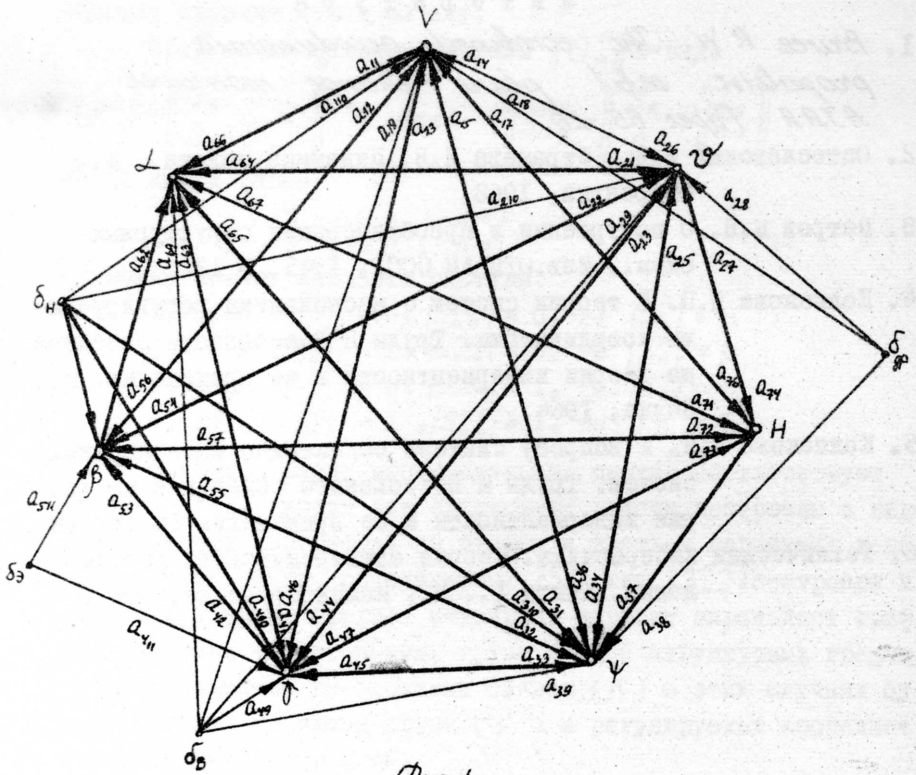
- 4) при треугольной (или квазотреугольной) матрице системы и наличии групп:

$$K = \frac{1}{2} \left[ n(n-1) - \sum_{i=1}^n m_i(m_i-1) \right] \quad \dots (15)$$

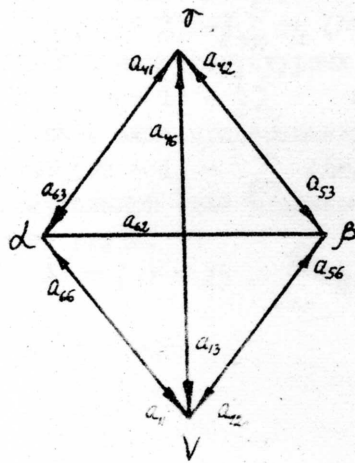
## Л и т е р а т у р а :

1. *Bruce R.W. The combined aerodynamic propulsive orbit plane change maneuvers, AIAA Paper 65-20*
2. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета., М., Оборонгиз, 1963.
3. Петров Б.Н. О построении и преобразовании структурных схем., Изв.УТН АН СССР, 1945, № 12.
4. Колпакова Н.П. К теории систем с несколькими регулируемы-ми координатами. Труды II Всесоюзного совещания по теории инвариантности и ее применению. М., Наука, 1964.
5. Колпакова Н.П. К вопросу синтеза селективно инвариантных систем. Труды III Всесоюзного совещания по тео-рии инвариантности и ее применению (в печати).
6. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулиро-вания. Книга I., М., Машиностроение, 1967.

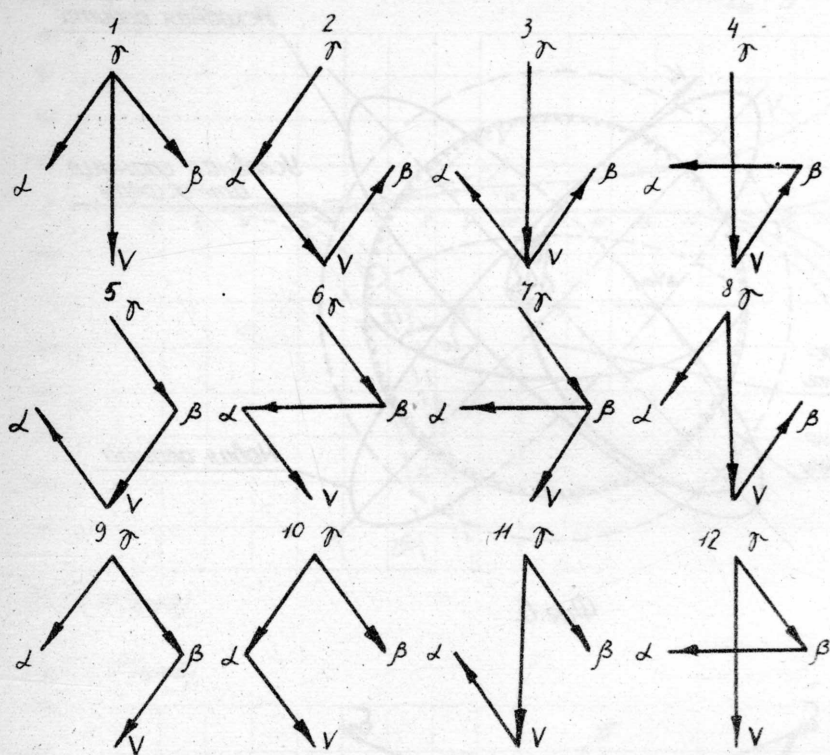




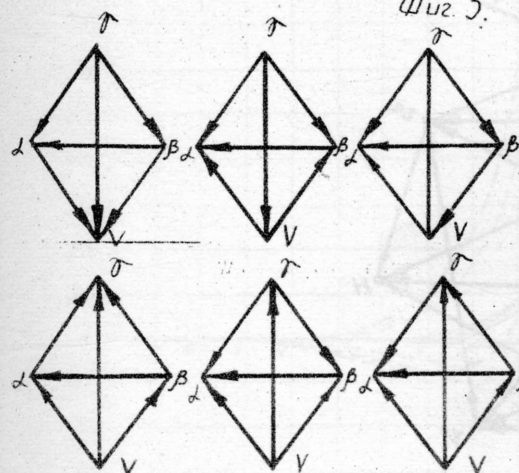
Φ2.1



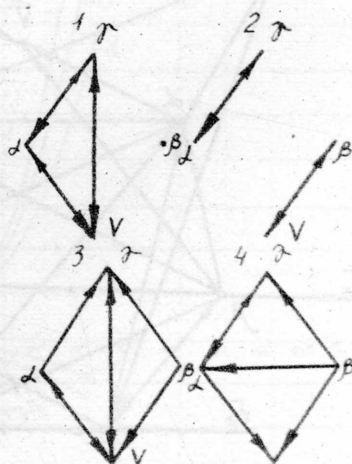
Φ2.2



$\Phi_{uz. 3.}$

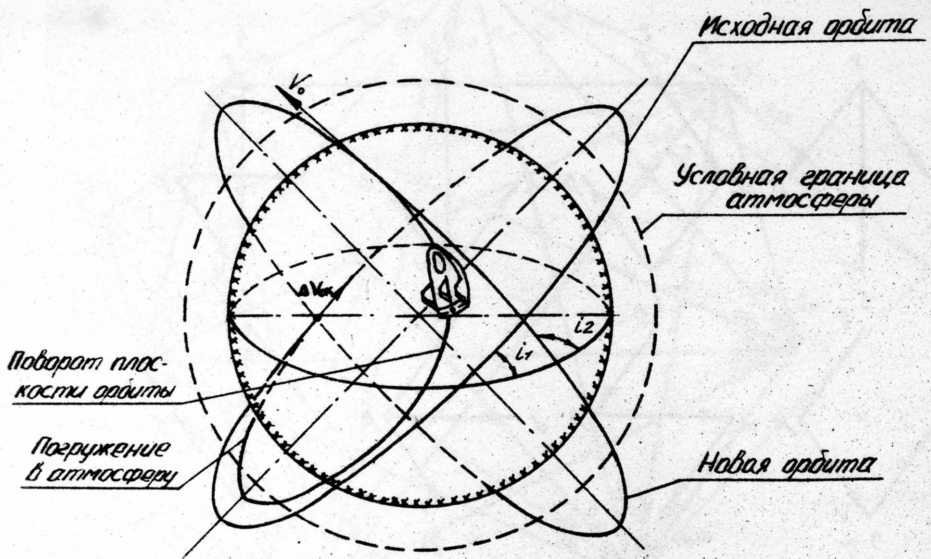


$\Phi_{uz. 4.}$

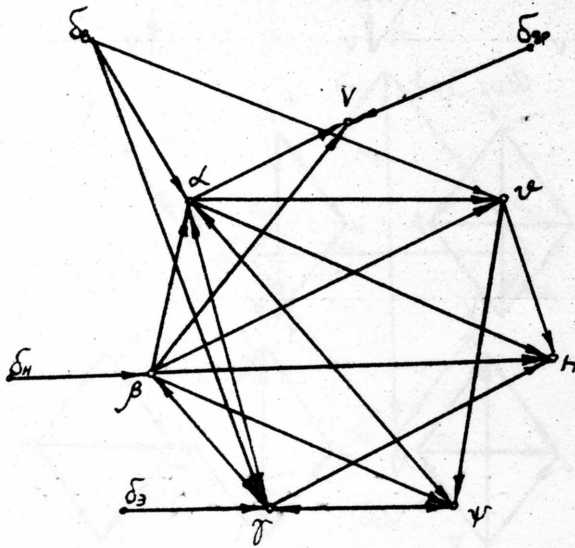


$\Phi_{uz. 5.}$

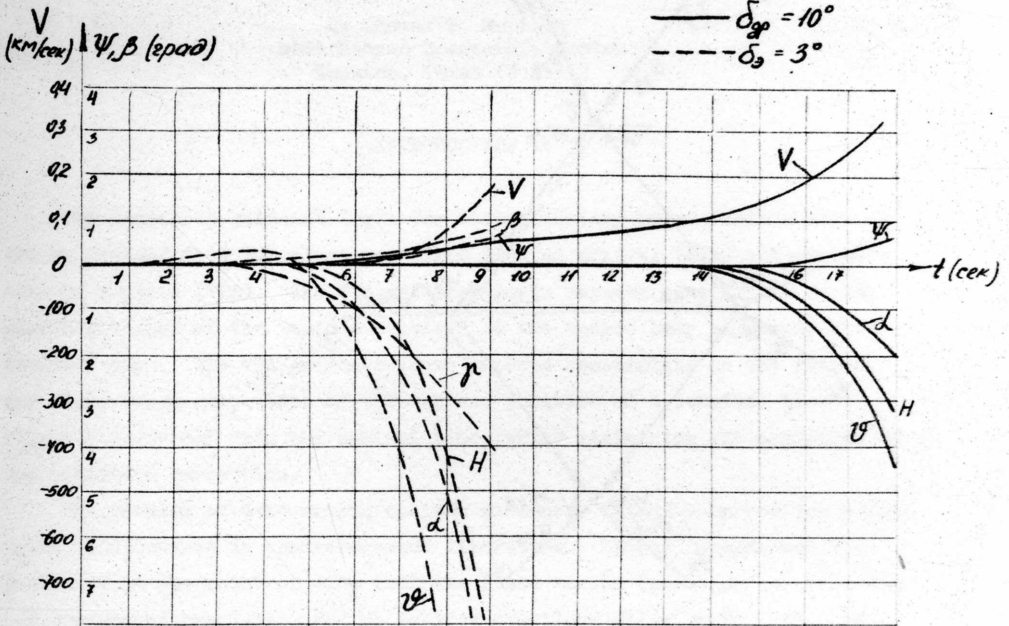


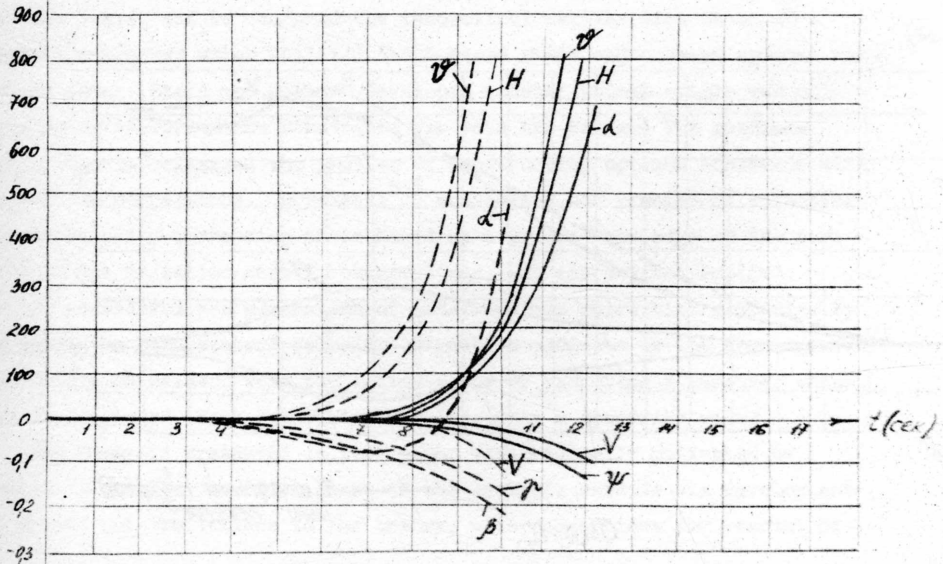


Фиг. 6.



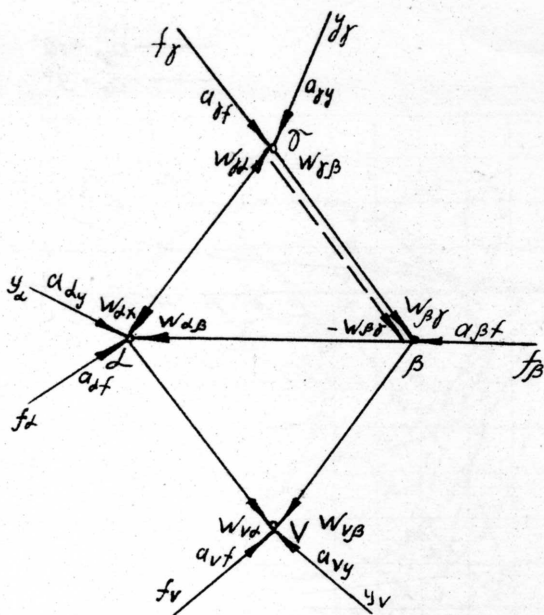
Фиг. 7.


 $H, \psi, \beta$  (град)

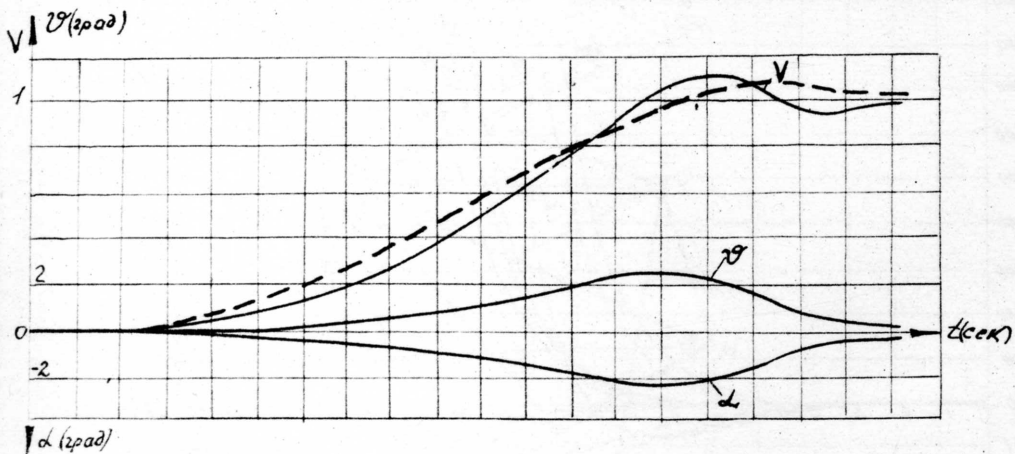
 $H, \psi, \beta$  (град)

 $V$   
 (km/sec)  $\beta, \gamma, \psi$  (град)

Фиг. 8.





$\Phi_{u2.9}$

 $\Phi_{42} = 10$ 

— — — Желаемый переход-  
ный процесс.

Переходный процесс,  
расчитанный с по-  
мощью ЦВМ.

## OPTIMUM INTERPLANETARY MIDCOURSE

## VELOCITY-CORRECTION SCHEDULES

By Thomas B. Murtagh  
 NASA Manned Spacecraft Center  
 Houston, Texas (U.S.A.)

## INTRODUCTION

The midcourse guidance logic for interplanetary space-vehicle control can be divided into two classes: fixed time of arrival (FTA) and variable time of arrival (VTA). The FTA guidance logic imposes constraints on the position vector of the vehicle relative to the target body at a specified terminal time. The VTA guidance logic imposes constraints on the radial and cross-range components of the vehicle position at a terminal time slightly different from the nominal time, while minimizing the magnitude of the commanded correction.

The problem of determining optimum midcourse velocity-correction strategies is discussed in the referenced literature. Lawden<sup>1</sup> approached the problem from the point of view that the state vector (position and velocity) was determined precisely, and he derived equations which would predict an optimum FTA velocity-correction schedule. Cicolani<sup>2</sup> applied Lawden's work to the statistical equations involved in computing the root-mean-square (RMS) velocity-correction estimate and postcorrection miss, using the FTA guidance logic, and he compared the theoretical results with those of a simulation program which utilized Earth-based radar and onboard optical navigation data. Stern and Potter<sup>3</sup> developed nonstatistical single and multiple velocity-correction strategies for both the FTA and VTA guidance logic. Rysin<sup>4</sup> examined the problem of constructing optimum schedules with one and two corrections. Breakwell<sup>5,6</sup> considered the problem of selecting optimum velocity-correction times based on a priori knowledge of the variances in the injection errors, observations, and corrections applied. Battin<sup>7</sup> considered the generation of quasi-optimum correction schedules by comparing the mean-squared velocity-correction estimate to the mean-squared uncertainty associated with the estimate and by executing a maneuver whenever the ratio of these quantities was less than a specified value.

The analysis presented in this paper was originally motivated by Cicolani's work.<sup>2</sup> The first phase of the analysis extends his development and points out limitations to the theory, with suggestions for removal of

the limitations by reformulation of the optimum timing equations. The second phase presents a parallel development of equations for predicting the optimum timing of a sequence of VTA velocity corrections, using the same assumptions as Cicolani's with regard to the accuracy of the navigation system and to the statistical model of the guidance system. The results of the theoretical analysis, using the optimum FTA and VTA velocity-correction strategies both individually and in combination, are compared to the results of a simulation program which processes Earth-based radar and onboard sextant tracking data with a Kalman filter for two typical interplanetary missions.

### ANALYSIS

#### Velocity-Correction Estimate

The covariance matrix of the velocity-correction estimate<sup>7</sup> can be written

$$C(t) = B(t)[X(t) - E(t)]B^T(t) \quad (1)$$

where the superscript  $T$  denotes the transpose operator and the matrix  $B(t)$  is defined by

$$B(t) = \begin{bmatrix} G_1(t) & G_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

The matrices  $G_1(t)$  and  $G_2(t)$  are submatrices of the guidance-law matrix<sup>8,9</sup>

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_1(t) & G_2(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

The uncertainty matrix  $E(t)$  is a statistical measure of the distance the estimated trajectory is from the actual trajectory; the dispersion matrix  $X(t)$  represents the statistical deviation of the actual trajectory from the nominal. The uncertainty and dispersion matrices at the target time  $T$  are related to the corresponding matrices at the correction time  $t$  by the expressions

$$\left. \begin{aligned} E(T) &= \Phi(T, t)E(t)\Phi^T(T, t) \\ X(T) &= \Phi(T, t)X(t)\Phi^T(T, t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where  $\Phi(T, t)$  is the state transition matrix relating state-vector perturbations at time  $T$  to perturbations at time  $t$ . Partitioning  $\Phi(T, t)$  as

$$\Phi(T, t) = \begin{bmatrix} \phi_1(T, t) & \phi_2(T, t) \\ \phi_3(T, t) & \phi_4(T, t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

and using equation (4) and the symplectic property of  $\Phi(T, t)$  to compute its inverse<sup>7</sup> (and dropping the state transition matrix time scripts for notational simplicity), equation (1) becomes

$$C(t) = B(t) \begin{bmatrix} \phi_4^T & -\phi_2^T \\ -\phi_3^T & \phi_1^T \end{bmatrix} [X(T) - E(T)] \begin{bmatrix} \phi_4 & -\phi_3 \\ -\phi_2 & \phi_1 \end{bmatrix} B^T(t) \quad (6)$$

For the FTA guidance law

$$\left. \begin{aligned} G_1(t) &= -\phi_2^{-1} \phi_1 \\ G_2(t) &= -I \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where  $I$  is the identity matrix. If  $X(T)$  and  $E(T)$  are partitioned as

$$\left. \begin{aligned} X(T) &= \begin{bmatrix} X_1(T) & X_2(T) \\ X_3(T) & X_4(T) \end{bmatrix} \\ E(T) &= \begin{bmatrix} E_1(T) & E_2(T) \\ E_3(T) & E_4(T) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

and if equations (2), (7), and (8) are substituted into equation (6), the FTA covariance matrix of the velocity-correction estimate becomes

$$C_{FTA}(t) = \phi_2^{-1}(T, t) [X_1(T) - E_1(T)] \left[ \phi_2^{-1}(T, t) \right]^T \quad (9)$$

The corresponding expression for  $C_{VTA}(t)$  is readily derived, since it is shown<sup>9</sup> that

$$C_{VTA}(t) = DC_{FTA}(t)D^T \quad (10)$$

where the matrix  $D$  is defined by



$$D = I - \frac{\tilde{W}\tilde{W}^T}{\tilde{W}^T\tilde{W}} \quad (11)$$

Also

$$\dot{\tilde{W}} = \phi_2^{-1}(T, t) \dot{\tilde{V}}(T) \quad (12)$$

where  $\dot{\tilde{V}}(T)$  is the spacecraft velocity vector with respect to the target planet at time  $T$ .

#### Postcorrection Miss

The state-vector dispersion matrix immediately following a guidance maneuver<sup>9</sup> is

$$X^+(t) = [I + G(t)][X(t) - E(t)][I + G(t)]^T + E(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

where  $S(t)$  is the covariance matrix of the velocity-correction execution error.<sup>10</sup> Substituting equations (3), (4), (5), (7), and (8) into equation (13) and carrying out the matrix manipulations, the FTA postcorrection position dispersion matrix

$$\left[ X_1^+(T) \right]_{\text{FTA}} = E_1(T) + \phi_2 S(t) \phi_2^T \quad (14)$$

is obtained, and the FTA postcorrection miss is computed from

$$m^+(T) = \sqrt{\text{trace} \left[ X_1^+(T) \right]_{\text{FTA}}} \quad (15)$$

More algebra is required in the derivation of the VTA guidance-law counterpart to equation (14). The matrices  $G_1(t)$  and  $G_2(t)$  for the VTA guidance logic<sup>8,9</sup> are computed from

$$\left. \begin{aligned} G_1(t) &= -D\phi_2^{-1}\phi_1 \\ G_2(t) &= -D \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

where the matrix  $D$  is defined by equation (11). Substituting equations (3), (4), (5), (8), and (16) into equation (13) and carrying out the indicated matrix algebra produces the VTA postcorrection position dispersion matrix

$$\left[ X_1^+(T) \right]_{VTA} = \left[ X_1^+(T) \right]_{FTA} + \phi_2 Q \phi_2^{-1} \left[ X_1(T) - E_1(T) \right] \left( \phi_2^{-1} \right)^T Q^T \phi_2^T \quad (17)$$

where the matrix  $Q$  is defined by

$$Q = \frac{\overline{W} \overline{W}^T}{\overline{W}^T \overline{W}} \quad (18)$$

and  $\overline{W}$  is defined in equation (12).

#### Assumptions for the Optimum-Schedule Analytic Solution

The optimum scheduling problem is stated as follows: Given that  $N$  velocity corrections are executed between the time of injection  $t_0$  and the time of arrival at the target  $T$ , find the sequence of these execution times such that the sum of the RMS velocity corrections is a minimum, subject to the constraint that the miss following the last correction is equal to some specified value. (No consideration has been given to the computation of the thrust-vector orientation at each impulsive maneuver; although, sufficient information is available in the statistical equations for such a calculation.) The solution to the optimum scheduling problem depends upon the navigation-system configuration, as well as upon the guidance-system configuration. Because of the dependence on the navigation system, the general problem is of such complexity that no analytical solution has yet been proposed. However, if the miss can be estimated more accurately than it can be controlled, simplifying assumptions can be made. For convenience, these assumptions<sup>2</sup> are cited in this report.

1. The miss can be estimated more accurately than it can be controlled; that is,  $\text{trace } [E_1(T)] \ll \text{trace } [\phi_2 S(t) \phi_2^T]$ .
2. The miss uncertainty is small compared to the miss; that is,  $\text{trace } E_1(T) \ll \text{trace } X_1(T)$ .
3. For each correction after the first, the commanded velocity correction is spherically distributed, and the mean-squared engine cut-off error  $\epsilon^2$  is the dominant error in making the maneuver. That is,  $S(t) \cong \frac{1}{3} \epsilon^2 I$ .
4. The errors in making the maneuver are small in comparison with the actual correction; that is,  $\text{trace } S(t) \ll \text{trace } C(t)$ .
5. The gravitational acceleration on the deviated path is identical to that on the reference path so that  $\phi_2(T, t) \cong (T - t)I$ .

## Optimum FTA Velocity-Correction Schedule .

The equations required for predicting an optimum FTA velocity-correction schedule<sup>2</sup> are derived again in more detail in this report in order to (1) outline the basic philosophy of that development, (2) point out limitations of the theory that have not been emphasized, and (3) give the reader a ready reference for the parallel development of the optimum VTA schedule presented in the following section of this report.

The covariance matrix of the actual velocity correction, assuming statistical independence between the commanded correction and the correction error, is

$$V_{FTA}(t_i) = C_{FTA}(t_i) + S(t_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

where  $C_{FTA}(t_i)$  is defined by equation (9). Using assumptions (2), (4), and (5) and letting  $v_{FTA}(t_i) = \sqrt{\text{trace } V_{FTA}(t_i)}$ , equation (19) becomes

$$v_{FTA}(t_i) = \frac{m_i(T)}{T - t_i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

where  $m_i(T)$  is defined as the miss prior to the  $i^{\text{th}}$  FTA correction and  $v_{FTA}(t_i)$  is the RMS value of the  $i^{\text{th}}$  FTA correction. An approximate expression for the postcorrection miss can be generated by applying assumptions (1), (3), and (5) to equation (14), with the result that

$$m_i^+(T) = \sqrt{\epsilon^2} (T - t_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

where  $m_i^+(T)$  is defined as the miss after the  $i^{\text{th}}$  FTA correction and  $\sqrt{\epsilon^2}$  is the RMS engine cut-off error. Using equations (20) and (21), the sum of the RMS corrections, that is, the cost function, becomes

$$F_{FTA} = v_{FTA}(t_1) + \frac{m_1^+(T)}{\tau_2} + \sum_{i=3}^N \sqrt{\epsilon^2} \frac{\tau_{i-1}}{\tau_1} \quad (22)$$

where  $\tau_i = T - t_i$  and represents the time-to-go after the  $i^{\text{th}}$  velocity correction. The minimization of the cost function requires the solution of the equations

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{FTA}}{\partial \tau_1} &= \frac{m_1(T)}{\tau_1^2} - \frac{\sqrt{\epsilon^2}}{\tau_2} = 0 \\ \frac{\partial F_{FTA}}{\partial \tau_i} &= \sqrt{\epsilon^2} \left[ \frac{\tau_{i-1}}{\tau_i^2} - \frac{1}{\tau_{i+1}} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

which are analogous to Lawden's equations (18) and (19)<sup>1</sup>. When the miss following the  $N^{\text{th}}$  correction is specified, the timing of the  $N^{\text{th}}$  correction becomes a known parameter, and equations (23) can be manipulated to yield the equations

$$\frac{1}{\tau_N} = \frac{\sqrt{\epsilon^2}}{m_1(T)} R^N \quad (24)$$

and

$$\tau_i = \frac{m_1(T)}{\sqrt{\epsilon^2}} R^{-i} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (25)$$

where  $R$  is the reciprocal of the common ratio of the geometric progression implied in the second of equations (23) and is approximately equal to the natural logarithmic base.<sup>1</sup> From equation (25), it follows that

$$\tau_1 = \frac{m_1(T)}{R\sqrt{\epsilon^2}} \quad (26)$$

The quantity  $m_1(T)$  represents the miss at the target if the injection velocity error is left uncorrected and can be replaced by  $\delta V(t_0)\tau_0$ , where  $\delta V(t_0)$  is the velocity error at injection and  $\tau_0 = T$ . It has been pointed out<sup>1</sup> that  $\delta V(t_0) > R\sqrt{\epsilon^2}$ , which implies that  $\tau_1$  will be greater than the trajectory transfer time  $T$ . This is equivalent to saying that the first correction takes place prior to launch, which is an impossible physical situation. Therefore, equations (23) to (26) must be modified, assuming that  $\tau_1$  is a known parameter. This modification is made by combining equations (24), (25), and (26) to obtain

$$\tau_i = \tau_1 \left( \frac{\tau_N}{\tau_1} \right)^{(i-1)/(N-1)} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (27)$$



Denoting the miss following the  $N^{\text{th}}$  correction by  $m_s(T)$  and using equation (21)

$$\tau_N = \frac{m_s(T)}{\sqrt{\epsilon^2}} \quad (28)$$

The equation for the optimum timing of the  $i^{\text{th}}$  FTA velocity correction is obtained by substituting equation (28) into (27), with the result that

$$\tau_i = \frac{m_1^+(T)}{\sqrt{\epsilon^2}} \left[ \frac{m_s(T)}{m_1^+(T)} \right]^{(i-1)/(N-1)} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (29)$$

and the minimized sum of the RMS velocity corrections (eq. (22)) becomes

$$F_{\text{FTA}}^* = v_{\text{FTA}}(t_1) + \sqrt{\epsilon^2} (N-1) \left[ \frac{m_1^+(T)}{m_s(T)} \right]^{1/(N-1)} \quad (30)$$

Equations (23) are satisfied if the timing of the first correction  $t_1$  is determined empirically so that the function represented in equation (30) is a minimum. This minimization is accomplished by assuming a reasonable navigation-system configuration in a simulation program and by computing  $v_{\text{FTA}}(t_1)$  and  $m_1^+(T)$  for specified values of the RMS engine cut-off error  $\sqrt{\epsilon^2}$ , the number of corrections  $N$ , and the miss following the  $N^{\text{th}}$  correction  $m_s(T)$ .

From equation (30) it can be shown that, for all corrections after the first, the RMS correction is constant and can be calculated from

$$v_{\text{FTA}}(t_i) = \sqrt{\epsilon^2} \left[ \frac{m_1^+(T)}{m_s(T)} \right]^{1/(N-1)} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (31)$$

The optimum value of the number of corrections  $N^*$  is computed by minimizing equation (30) with respect to  $N$ , with the result that<sup>2</sup>

$$N_{\text{FTA}}^* = 1 + \ln \left[ \frac{m_1^+(T)}{m_s(T)} \right] \quad (32)$$

## Optimum VTA Velocity-Correction Schedule

To isolate notations peculiar to this section of this report from those of the previous section, the position dispersion covariance matrix is defined as

$$M(T) = \left[ X_1(T) \right]_{VTA} \quad (33)$$

for VTA guidance logic. Using assumptions (1), (2), (3), and (5), equation (10) becomes

$$e_{VTA}(t_i) = \frac{DM_1(T)D^T}{(T - t_i)^2} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (34)$$

and equation (17) reduces to

$$M_i^+(T) = \frac{1}{3} \epsilon^2 (T - t_i)^2 I + Q M_i(T) Q^T \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (35)$$

where the matrices  $D$  and  $Q$  are defined by equations (11) and (18), respectively. Using assumption (5), an approximate expression for the matrix  $Q$  is written as

$$Q = \hat{V} \hat{V}^T \quad (36)$$

where  $\hat{V}$  is defined as a unit vector in the direction of  $\hat{V}(T)$ . An equation for the covariance matrix of the actual VTA velocity correction, similar to equation (19), is

$$V_{VTA}(t_i) = C_{VTA}(t_i) + S(t_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (37)$$

again assuming statistical independence between the commanded correction and the correction error. Applying assumption (4) to equation (37) and substituting equation (34)

$$V_{VTA}(t_i) = \frac{DM_1(T)D^T}{(T - t_i)^2} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (38)$$

Consider the evaluation and interpretation of the term  $DM_1(T)D^T$ , which appears in equation (38). This term represents a portion of the position dispersion matrix at the target prior to the  $i^{\text{th}}$  velocity correction and

is equivalent to the expression  $DM_{i-1}^+(T)D^T$ . Using equations (35) and (36), it can be shown that

$$DM_{i-1}^+(T)D^T = \frac{1}{3} \epsilon^2 (T - t_i)^2 [I - Q] \quad (39)$$

from which

$$n_i^+(T) = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon^2} (T - t_i) \quad (40)$$

where

$$n_i^+(T) = \sqrt{\text{trace } DM_{i-1}^+(T)D^T} \quad (41)$$

Equation (40) is similar to equation (21). Using equations (38) and (41), the following equation, which is similar to equation (20), is obtained.

$$v_{VTA}(t_i) = \frac{n_i(T)}{T - t_i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (42)$$

The sum of the RMS corrections for the VTA guidance logic becomes

$$F_{VTA} = v_{VTA}(t_1) + \frac{n_1^+(T)}{\tau_2} + \sum_{i=3}^N \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon^2} \frac{\tau_{i-1}}{\tau_i} \quad (43)$$

where again  $\tau_i = T - t_i$ . Equation (43) is identical in form to equation (22), and the optimum timing equation for the VTA velocity-correction schedule becomes

$$\tau_i = \frac{n_1^+(T)}{\sqrt{\frac{2}{3} \epsilon^2}} \left[ \frac{n_s(T)}{n_1^+(T)} \right]^{(i-1)/(N-1)} \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \quad (44)$$

Also, the minimized sum of the RMS VTA velocity corrections is

$$F_{VTA}^* = v_{VTA}(t_1) + \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon^2} (N-1) \left[ \frac{n_1^+(T)}{n_s(T)} \right]^{1/(N-1)} \quad (45)$$

where  $n_s(T)$  is the specified miss after the  $N^{\text{th}}$  VTA velocity correction. As was the case for the FTA guidance logic, the timing of the first VTA velocity correction is determined empirically by assuming a reasonable

navigation-system configuration in a simulation program and evaluating  $F_{VTA}$  until the minimum is obtained.

For all corrections after the first, the RMS correction is constant and is computed from

$$v_{VTA}(t_1) = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon^2} \left[ \frac{n_1^+(T)}{n_s(T)} \right]^{1/(N-1)} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (46)$$

The optimum number of corrections is calculated using the expression

$$N_{VTA}^* = 1 + \ln \left[ \frac{n_1^+(T)}{n_s(T)} \right] \quad (47)$$

Equations (44) to (47) are analogous to equations (29) to (32), except for the definition of the miss vector and the effective engine cut-off error. It can be shown that the VTA miss  $n(T)$  is the total position miss for the FTA guidance logic  $m(T)$  minus the component of the miss in the direction of the velocity at the target time  $\vec{v}(T)$ . The mean-squared engine cut-off error  $\epsilon^2$  appears in both the FTA and the VTA equations, but is reduced by a factor of 2/3 in equations (44) to (46).

## RESULTS AND DISCUSSION

The interplanetary missions used for the results presented in this report are a 1975 Mars flyby mission (Earth-Mars transfer time  $T$  equal to 133 days) and a 1977 Mars orbital mission (Earth-Mars transfer time  $T$  equal to 360 days). The characteristics and ecliptic-plane projections of these reference trajectories, with a discussion of the nominal navigation- and guidance-system errors, are given in another report.<sup>11</sup>

The RMS position and velocity errors at Earth injection for all the results presented are assumed to be 4 nautical miles and 16 fps, respectively. The RMS engine cut-off error,  $\sqrt{\epsilon^2}$  is assumed to be 0.5 fps.

### Empirical Determination of the First Correction Time

The cost function  $F_{FTA}^*$  for the 1977 Mars orbital mission is shown in figure 1 as a function of the time from injection for three values of the number of corrections  $N$  and for two values of the specified miss after the  $N^{\text{th}}$  correction  $m_s(T)$ . The circles denote the minimum value of the cost function for the given value of  $N$ . The optimum value for the number of



corrections  $N_{FTA}^*$ , computed from equation (32) and rounded off to the nearest integer value, is also indicated in figure 1. The timing of the first correction is chosen at the minimum value of the cost-function curves. Also, in figure 1, for a given  $m_s(T)$ , the timing of the first correction moves closer to injection as the number of corrections  $N$  is increased. The sum of the RMS velocity corrections, that is, the cost function, rapidly approaches a constant value as  $N$  approaches its optimum.

However, at times,  $N$  is bounded and no optimum schedules exist above certain values of  $N$  for a given  $m_s(T)$  and  $\sqrt{e^2}$ . This fact is illustrated in figure 2 in which the time-to-go after the second correction  $\tau_2$  is plotted as a function of the time of the first correction. For  $N = 5$  (fig. 1), the optimum time to execute the first correction is 5 hours from injection; but in figure 2, it is evident that the time-to-go after the second correction, for all values of the time of the first correction, is greater than the Earth-Mars transfer time  $T$  for the trajectory ( $T = 360$  days). This constraint on the upper bound of  $N$  could possibly be removed by reformulating the equations presented in the section of this paper entitled "Optimum FTA Velocity-Correction Schedule." In this section, it is pointed out that in the initial development of the optimum timing equation, an impossible first correction time (i.e., a correction prior to launch) is predicted unless it is assumed that the time of the first correction is known. It appears that a similar problem is encountered even with a known first correction time. Therefore, if the optimum timing equation is reformulated, assuming that the timing of the first and second corrections is known, the effect noted in figure 2 might disappear. This suggested development would add some complexity to the determination of the cost function minimum, since the empirical calculation of this minimum involves two times, the second of which is coupled to the first through the RMS post-first-correction miss.

The problem of an impossible optimum schedule also appears for the optimum VTA velocity-correction strategies, but for larger values of  $N$  (data not shown), with a solution identical to the previously proposed solution for the FTA guidance logic.

The cost function  $F_{FTA}^*$  for the 1975 Mars flyby mission is shown in figure 3. The profiles of the curves are similar to the curves given in figure 1. The reason for presenting data on this mission is to compare results for two significantly different Earth-Mars transfer times; that is, 360 days for the 1977 Mars stopover mission and 133 days for the 1975 Mars

flyby mission. It was felt that such a comparison might lend some additional insight into the problem of impossible second correction times, that is, no optimum schedule above certain values of  $N$  for given  $m_s(T)$  and  $\sqrt{\epsilon^2}$ . Comparison of the cost-function plots (figs. 1 and 3) and of the time-to-go after second correction plots (figs. 2 and 4) indicates that the shorter transfer time does have a pronounced effect on the previously mentioned problem. For example, in figure 2 for the 1977 Mars orbital mission, no optimum schedules exist for  $N \geq 5$ ; for the 1975 Mars flyby mission, which has an Earth-Mars transfer time which is one-third that of the 1977 orbital mission, optimum schedules are possible (at least to  $N = 5$ ) for the same specified terminal miss (fig. 4).

#### Comparison of Theory and Simulation

Using the first correction times predicted in figure 1, optimum velocity-correction schedules are computed from equation (29) for  $m_s(T) = 1.25$  nautical miles. The theoretical results are compared to the results of a simulation program<sup>11</sup> that utilizes a Kalman filter to process the Earth-based radar and onboard sextant navigation data in table I.

In table I(a), it is assumed that Earth-based radar data are processed when the spacecraft is within the Earth sphere of influence (SOI), with onboard sextant tracking thereafter. The data show that decreases in total  $\Delta V$  as the number of corrections increase are predicted by both the theory and the simulation. The total miss after the last correction for the simulation results, however, is always larger than the total miss predicted by the theory. This discrepancy occurs for two reasons: (1) Earth-based radar data are processed only to the Earth SOI; therefore, assumptions (1) and (2) given previously are no longer applicable. (2) The miss predicted by the theory after the  $N^{\text{th}}$  correction is caused only by engine cut-off error; therefore, the final value of the miss is underestimated by the amount of the miss uncertainty after the last correction.

The previously noted discrepancy can be partially removed by increasing the amount of radar data processed during a mission. The results when radar data are processed up to the Mars SOI, with onboard sextant tracking thereafter, are presented in table I(b). The increase in radar data generally cut the miss predicted by the simulation in half and had a more pronounced effect on the total  $\Delta V$  as the number of corrections was increased. The  $\Delta V$  predicted by the theory and the  $\Delta V$  computed in the simulation program are comparable. Although the total miss generated from the simulation program

is an order of magnitude larger than the miss predicted by theory, the radial miss generated from the simulation is comparable to the theoretical miss  $n_s(T)$ . The difference between the theoretical and the simulated miss is caused by the large down-range miss computed from the simulation. The down-range miss component is not considered, since it can be mapped into a timing error on the order of a few seconds. The radial miss is considered the more important parameter on which to base the assessment of the performance of the midcourse guidance system. Values of radial miss less than or equal to 5 nautical miles are considered acceptable.<sup>10,11</sup> Therefore, if the radial miss from the simulation program is compared to the miss predicted by the theory, the conclusion can be made that the theoretical results are a good first guess for the midcourse guidance-system performance on a given mission.

The first correction times predicted from the cost-function plots for the VTA guidance logic (data not shown) are used again for the 1977 Mars orbital mission, and optimum correction schedules are computed from equation (44) for  $n_s(T) = 1.25$  nautical miles. The theoretical results are compared to the results of the previously described simulation program (table II), assuming that Earth-based radar data are processed up to the Mars SOI, with onboard sextant tracking thereafter. The closer agreement between the theoretical miss and the miss generated from the simulation program in table II, as compared to the data in table I(b), results from the definition of the miss vector for the VTA guidance logic. This miss vector includes the radial and cross-range components of the total miss and neglects the largest component of the miss, which is down range. The total miss as a result of the VTA velocity-correction schedule is, therefore, calculated by taking the square root of the sum of the squares (RSS) of the radial and cross-range miss.

#### Combination of FTA and VTA Strategies

Having examined optimum FTA and VTA schedules separately, it was decided that a combination of these strategies might provide some interesting results. The motivation for the combination was generated by the fact that midcourse correction schedules for manned interplanetary missions do not consist entirely of FTA or VTA maneuvers, but rather of some combination of the two. A reasonable combination<sup>11</sup> would be to use the FTA guidance logic during the departure phase of the mission up to the target-planet SOI and to use the VTA guidance logic within the target-planet SOI.

1977 Mars orbital mission.- Assuming that  $N = 4$  and that the specified miss was 1.25 nautical miles, the optimum correction times for the FTA guidance logic were used for the first three corrections, and the optimum time for the VTA guidance logic was used for the last correction to generate the combined schedule presented in the third row of data in table III(a). The data are compared to the FTA and VTA guidance logics and to the schedule generated in another report<sup>11</sup> for the same mission. In table III, the schedule consisting entirely of FTA corrections is seen to be undesirable because of the large fourth correction value. The schedule consisting of all VTA corrections is comparable to the combined schedule, both in total  $\Delta V$  and final miss. Using optimum times, the combined schedule is, in turn, comparable to the schedule used in the other report.<sup>11</sup> The significance is that the generation of the schedule from the other report required a trial-and-error method which consumed  $N - 1$  computer runs, where  $N$  is the number of corrections. The schedule produced by combining optimum times required a single computer run. Therefore, the equations which predict the optimum correction times can be used to generate an accurate first guess of an interplanetary midcourse velocity-correction schedule.

1975 Mars flyby mission.- The procedure previously outlined for generating a combined schedule using the optimum correction times was repeated for the 1975 Mars flyby mission. The results, shown in table III(b), are compared to a schedule used for the same mission in another report.<sup>11</sup>

#### CONCLUDING REMARKS

Techniques have been presented for predicting optimum midcourse FTA and VTA velocity-correction schedules. Certain limitations of the theory are revealed with suggestions for their removal by reformulation of the optimum timing equations. The results of the analysis show that the agreement between theory and simulation is good and that the agreement improves as the amount of Earth-based radar is increased. A procedure for combining the optimum FTA and VTA strategies was investigated which indicated that the theoretical optimum timing equations provided an accurate first estimate for generating interplanetary midcourse velocity-correction schedules.

#### REFERENCES

1. Lawden, Derek F.: Optimal Programme for Correctional Manoeuvres. *Astronautica Acta*, vol. 6, 1960, pp. 195-205.

2. Cicolani, Luigi S.: Interplanetary Midcourse Guidance Using Radar Tracking and On-Board Observation Data. NASA TN D-3623, 1966.
3. Stern, Robert G.; and Potter, James E.: Optimization of Midcourse Velocity Corrections. Proceedings of the First IFAC Symposium on Automatic Control in the Peaceful Uses of Space, Stavanger, Norway. J. A. Aseltine, editor, Plenum Press, N. Y., 1965, pp. 70-84.
4. Ryasin, V. A.: Optimal Correction Strategy for Space Vehicles. International Federation of Automatic Control, Symposium on Automatic Control in Space, 2nd, Vienna, Austria, 1967.
5. Breakwell, J. V.: Fuel Requirements for Crude Interplanetary Guidance. Advances in the Astronautical Sciences, vol. 5, Plenum Press, Inc., N.Y., 1960, pp. 53-65.
6. Breakwell, J. V.: The Spacing of Corrective Thrusts in Interplanetary Navigation. Advances in the Astronautical Sciences, vol. 7, Plenum Press, Inc., N. Y., 1961, pp. 219-235.
7. Battin, Richard H.: Astronautical Guidance. McGraw-Hill Book Co., Inc. (New York, N. Y.), 1964.
8. Cicolani, Luigi S.: Linear Theory of Impulsive Velocity Corrections for Space Mission Guidance. NASA TN D-3365, 1966.
9. Murtagh, Thomas B.; Lowes, Flora B.; and Bond, Victor R.: Navigation and Guidance Analysis of a Mars Probe Launched from a Manned Flyby Spacecraft. NASA TN D-4512, 1968.
10. White, John S.; Callas, George P.; and Cicolani, Luigi S.: Application of Statistical Filter Theory to the Interplanetary Navigation and Guidance Problem. NASA TN D-2697, 1965.
11. Lowes, Flora B.; and Murtagh, Thomas B.: Navigation and Guidance Systems Performance for Three Typical Manned Interplanetary Missions. NASA TN D-4629, 1968.



TABLE I. - FIXED TIME OF ARRIVAL GUIDANCE LAW FUEL COST AND MISS DISTANCE FOR 1977  
MARS MISSION: COMPARISON WITH PREDICTED PERFORMANCE (RMS)

(a) Earth-based radar tracking to Earth sphere of influence, onboard tracking thereafter

N = 3			N = 4			N = 5		
Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps		Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps		Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps	
	Theory	Simulation		Theory	Simulation		Theory	Simulation
0.33	44.0	44.0	0.25	43.3	43.3	0.21	42.7	42.7
334.5	71.5	36.6	226.5	13.7	6.7	38.5	6.0	2.6
359.8	71.5	124.9	355.5	13.7	15.8	333.5	6.0	7.6
			359.8	13.7	119.5	357.8	6.0	7.1
						359.8	6.0	29.3
Total $\Delta V$ , fps	187.0	205.5		84.4	185.3		66.7	89.3
Radial miss, n. mi.		4.4			5.2			3.5
Down-range miss, n. mi.		80.1			85.8			81.5
Total miss, n. mi. <sup>a</sup>	1.25	80.2		1.25	86.0		1.25	81.6

(b) Earth-based radar tracking to Mars sphere of influence, onboard tracking thereafter

N = 3			N = 4			N = 5		
Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps		Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps		Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps	
	Theory	Simulation		Theory	Simulation		Theory	Simulation
0.33	44.0	44.0	0.25	43.3	43.3	0.21	42.7	42.7
334.5	71.5	36.6	226.5	13.7	6.7	38.5	6.0	2.6
359.8	71.5	125.5	355.5	13.7	16.3	333.5	6.0	7.7
			359.8	13.7	13.7	357.8	6.0	6.3
						359.8	6.0	13.9
Total $\Delta V$ , fps	187.0	206.1		84.4	80.0		66.7	73.2
Radial miss, n. mi.		4.3			2.0			2.6
Down-range miss, n. mi.		59.1			37.8			53.1
Total miss, n. mi. <sup>a</sup>	1.25	59.3		1.25	37.9		1.25	53.2

<sup>a</sup> Total miss is computed from RSS of radial, down-range and cross-range miss.

TABLE II. - VARIABLE TIME OF ARRIVAL GUIDANCE LAW FUEL COST AND MISS DISTANCE FOR  
1977 MARS MISSION: COMPARISON WITH PREDICTED PERFORMANCE (RMS) USING  
EARTH-BASED RADAR TRACKING TO MARS SPHERE OF INFLUENCE, ONBOARD  
TRACKING THEREAFTER

N = 3			N = 4			N = 5		
Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps		Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps		Time of midcourse $\Delta V$ , days from injection	Magnitude of midcourse $\Delta V$ , fps	
	Theory	Simulation		Theory	Simulation		Theory	Simulation
0.25	41.9	41.9	0.21	41.2	41.2	0.08	36.3	36.3
346.5	25.9	49.3	303.0	6.7	11.8	146.0	4.1	4.5
359.7	25.9	44.0	356.5	6.7	8.9	338.5	4.1	8.4
			359.7	6.7	8.9	357.8	4.1	5.0
						359.7	4.1	4.3
Total $\Delta V$ , fps	93.7	135.2		61.3	70.8		52.7	58.5
Radial miss, n. mi.		2.8			2.2			2.7
Down-range miss, n. mi.		77.9			42.9			48.2
Total miss, n. mi. <sup>a</sup>	1.25	3.0		1.25	2.6		1.25	3.1

<sup>a</sup>Total miss is computed from RSS of radial and cross-range miss.

TABLE III. - COMBINATION OF FIXED TIME OF ARRIVAL AND VARIABLE TIME OF ARRIVAL  
STRATEGIES USING OPTIMUM CORRECTION TIMES: COMPARISON WITH ALL  
FIXED TIME OF ARRIVAL AND VARIABLE TIME OF ARRIVAL SCHEDULES<sup>b</sup>

(a) 1977 Mars mission						
Guidance logic for corrections	Magnitude of RMS correction, fps					Radial miss at target, n. mi.
	$\Delta V_1$	$\Delta V_2$	$\Delta V_3$	$\Delta V_4$	Total $\Delta V$	
FTA	43.3	6.7	15.8	119.5	185.3	5.2
VTA	41.2	11.8	8.9	13.3	75.2	4.0
FTA, VTA (using optimum times)	43.3	6.7	15.8	12.3	78.1	4.2
FTA, VTA (Reference 11)	45.9	16.1	12.0	14.4	88.4	3.9
(b) 1975 Mars mission						
FTA	35.6	5.7	5.7	33.6	80.6	3.9
VTA	33.5	4.8	5.1	23.6	67.0	3.9
FTA, VTA (using optimum times)	35.6	5.7	5.7	21.7	68.7	4.0
FTA, VTA (Reference 11)	43.1	10.3	6.1	22.6	82.1	3.9

<sup>b</sup>Earth-based tracking to Earth sphere of influence, onboard tracking thereafter.

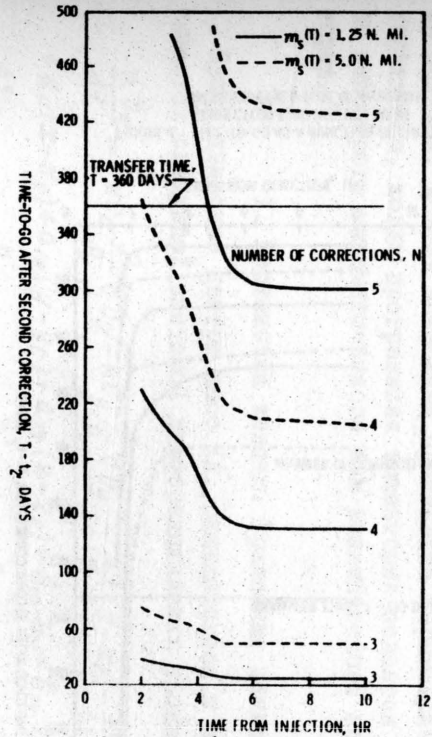


FIGURE 2 - TIME-TO-GO AS A FUNCTION OF FIRST CORRECTION TIME FOR 1977 MARS MISSION (FIXED TIME OF ARRIVAL).

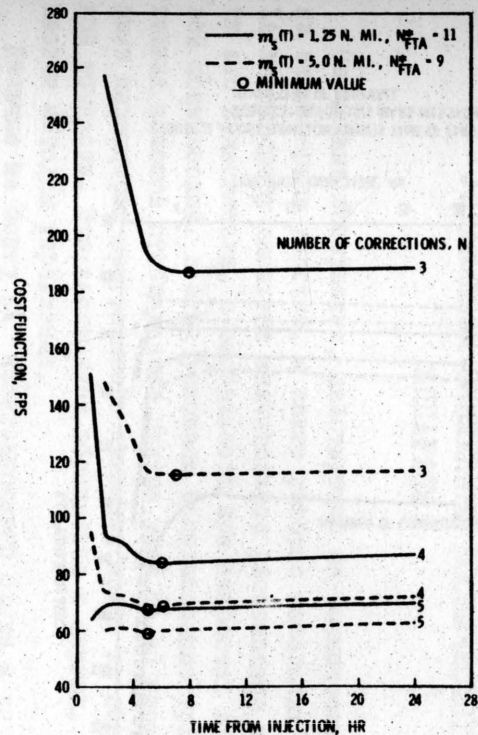


FIGURE 1 - COST FUNCTION VERSUS TIME OF FIRST CORRECTION FOR 1977 MARS MISSION (FIXED TIME OF ARRIVAL).

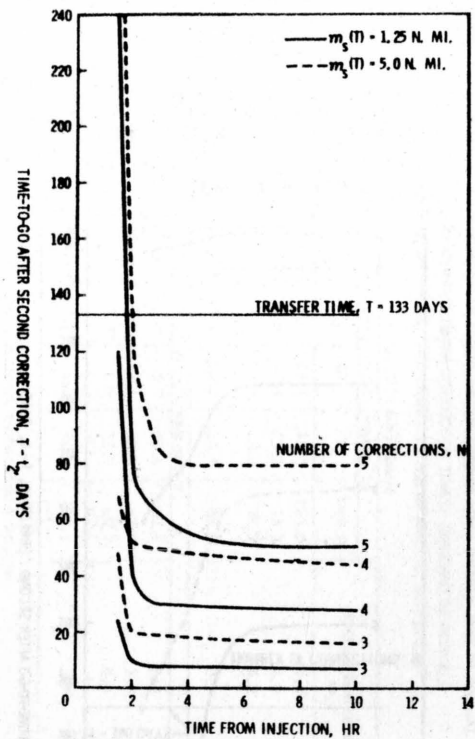


FIGURE 4. - TIME-TO-GO AS A FUNCTION OF FIRST CORRECTION TIME FOR 1975 MARS MISSION (FIXED TIME OF ARRIVAL).

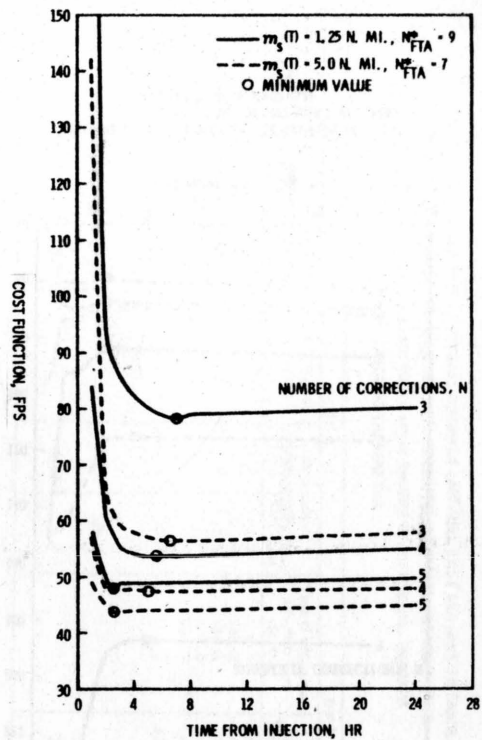


FIGURE 3. - COST FUNCTION VERSUS TIME OF FIRST CORRECTION FOR 1975 MARS MISSION (FIXED TIME OF ARRIVAL).

Пономарев В.М., Городецкий В.И.  
Ленинградский Государственный Университет  
им.А.А.Жданова. Ленинград, СССР.

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ СНИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Случайные возмущения, действующие на космический аппарат (КА) на атмосферном участке, а также разброс начальных условий входа КА в атмосферу вызывают значительное рассеивание координат точки его приземления, в особенности при скоростях входа выше первой космической. В этих условиях использование традиционных линейных законов стабилизации центра масс КА по изохронным вариациям параметров программного движения может не обеспечить высокой точности. Это заставляет обращаться к другим, более эффективным методам управления.

Наличие на борту КА навигационного блока и вычислительной машины, с помощью которых можно непрерывно определять параметры движения и формировать управляющие сигналы по довольно сложным алгоритмам, делает возможным применение параметрических программ управления, когда программная траектория задается в зависимости от некоторого кинематического или динамического параметра траектории.

### 1. Постановка задачи. Уравнения движения

Пусть движение центра масс КА, снижающегося в атмосфере, описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= -\kappa C_x \frac{\rho}{\rho_0} V V_x - \kappa C_y \frac{\rho}{\rho_0} V V_y - \frac{g^2}{2} (x - x_c) - \frac{g\omega}{\omega_3} \omega_{3x} + \\ &+ a_{11}(x - x_c) + a_{12}(y - y_c) + a_{13}(z - z_c) + b_{12} V_y + b_{13} V_z \\ \frac{dV_y}{dt} &= -\kappa C_x \frac{\rho}{\rho_0} V V_y + \kappa C_y \frac{\rho}{\rho_0} V V_x - \frac{g^2}{2} (y - y_c) - \frac{g\omega}{\omega_3} \omega_{3y} + \\ &+ a_{21}(x - x_c) + a_{22}(y - y_c) + a_{23}(z - z_c) + b_{21} V_x + b_{23} V_z \\ \frac{dV_z}{dt} &= -\kappa C_x \frac{\rho}{\rho_0} V V_z + \kappa C_z \frac{\rho}{\rho_0} V^2 - \frac{g^2}{2} (z - z_c) - \frac{g\omega}{\omega_3} \omega_{3z} + \end{aligned} \quad (I)$$



$$+ a_{31}(x-x_c) + a_{32}(y-y_c) + a_{33}(z-z_c) + b_{31}v_x + b_{32}v_y$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

Эти уравнения записаны в стартовой системе координат, связанной с вращающейся Землей. Начало этой системы взято в точке пересечения вертикали, проходящей через центр масс КА в начальный момент времени, с поверхностью Земли. Ось  $y$  совпадает с этой вертикалью, ось  $x$  направлена в расчетную точку приземления, а ось  $z$  образует правую систему координат.

В уравнениях (I) приняты следующие обозначения:

$v_x, v_y, v_z, x, y, z$  - составляющие вектора скорости и координаты центра масс КА в указанной системе координат,

$C_x, C_y, C_z^s$  - аэродинамические коэффициенты,

$$\frac{\rho}{\rho_0}$$

- относительная плотность воздуха,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- модуль вектора скорости,

$$x_c, y_c, z_c$$

- координаты центра Земли в указанной выше системе координат,

$$r = \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2}$$

- радиус-вектор центра масс КА, проведенный из центра Земли,

$$K = \frac{S \rho_0}{2m}$$

- баллистический коэффициент, зависящий от площади мишени  $S$  космического аппарата, его массы  $m$  и плотности атмосферы  $\rho_0$  у Земли,

$$g_z, g_a$$

- составляющие ускорения земного тяготения, направленные соответственно по радиусу  $r$  и оси вращения Земли,

$$\alpha, \beta$$

- углы атаки и скольжения

$$\omega_z, \omega_{zx}, \omega_{zy}, \omega_{z2}$$

- угловая скорость вращения Земли и составляющие угловой скорости по осям связанной с Землей системы координат,

$$a_{ij}, b_{ke}$$

- константы, выражающиеся через  $\omega_z, \omega_{zx}, \omega_{zy}, \omega_{z2}$ , широту точки входа и азимут траектории спуска  $1$ .

Как было указано выше, программную траекторию задают по какому-либо параметру движения с последующей стабилизацией центра масс КА на программной траектории по некоторому закону. Физически программирование номинальной траектории в зависимости от параметра эквивалентно наличию обратной связи в контуре программного движения, что позволяет косвенным образом учитывать действующие на КА случайные возмущения. В этом случае трубка возмущенных траекторий получается более узкой, а потому стабилизация даже по линейному закону оказывается достаточно эффективной.

Выбор параметра для задания программы - довольно сложная и теоретически пока не решенная проблема. В рассматриваемом случае в качестве параметра, по которому задается программа, выбран путь  $L$  по траектории космического аппарата. Примем, что управление в каналах продольного движения осуществляется с помощью угла атаки  $\alpha$ , а в канале бокового движения - угла скольжения  $\beta$ . Программы по  $\alpha$  и  $\beta$  задаются таким образом, чтобы обеспечить перегрузки на номинальной траектории не более трех. Эти программы выбраны в результате предварительных просчетов в виде:

$$\alpha_{np} = \begin{cases} 0,2 & \text{при} & L < 2730 \text{ км} \\ 0,1 & \text{при} & 2730 \text{ км} < L \leq 3350 \text{ км} \\ 0,05 & \text{при} & 3350 \text{ км} < L \leq 3428 \text{ км} \\ 0 & \text{при} & L > 3428 \text{ км} \end{cases} \quad (2)$$

$$\beta_{np} = 0$$

Закон управления, обеспечивающий стабилизацию КА на программной траектории, будем отыскивать в следующей форме:

$$\Delta\alpha = K_1(\mathcal{V}_x - \mathcal{V}_{xnp}) + K_2(\mathcal{V}_y - \mathcal{V}_{ynp}) + K_3(h - h_{np}) + \quad (3)$$

$$+ K_4(z - z_{np})$$

$$\Delta\beta = K_5(\mathcal{V}_z - \mathcal{V}_{znp}) + K_6(z - z_{np}) \quad (4)$$

где  $\mathcal{V}_{xnp}(L)$ ,  $\mathcal{V}_{ynp}(L)$ ,  $\mathcal{V}_{znp}(L)$ ,  $h_{np}(L)$ ,  $z_{np}(L)$  - программные значения составляющих вектора скорости, высоты и бокового отклонения соответственно,

- $K_1, \dots, K_6$  - искомые коэффициенты линейного закона управления,  
 $\Delta\alpha, \Delta\beta$  - отклонения углов атаки и скольжения от программных значений, предназначенные для стабилизации космического аппарата на программной траектории.

Тогда

$$\alpha = \alpha_{np} + \Delta\alpha \quad (5)$$

$$\beta = \Delta\beta \quad (6)$$

На величины  $\alpha$  и  $\beta$  наложены ограничения, связанные с ограниченной эффективностью рулевых органов, с одной стороны, а с другой - ограничивающие максимальные перегрузки, действующие на КА:

$$\begin{aligned} |\alpha| &\leq \bar{\alpha} \\ |\beta| &\leq \bar{\beta} \end{aligned} \quad (7)$$

Основная цель управления снижением КА - уменьшение рассеивания точек приземления его. Поэтому качество управления должно быть связано с рассеиванием точек приземления КА на местности.

Естественно в качестве минимизируемого критерия взять следующий:

$$I = D[L] + D[z] + (M[L] - L^p)^2 + (M[z] - z^p)^2 \quad (8)$$

где  $D[L]$ ,  $D[z]$ ,  $M[L]$ ,  $M[h]$  - дисперсии и математические ожидания дальности по трассе КА и координаты  $z$  в точке приземления КА ( $h = 0$ ),  $L^p$  и  $z^p$  - расчетные значения соответствующих параметров в точке приземления КА.

Минимизация такого функционала позволяет решать задачу приведения КА в заданную точку с минимальным рассеиванием.

Возмущения, действующие на КА, снижающийся в атмосфере, носят случайный характер. Основной разброс точек приземления КА вызывается вариациями плотности атмосферы по высоте, вариациями аэродинамического качества и отклонением начальных условий по координатам и углу входа КА в атмосферу.

Будем считать, что начальные условия задаются таким образом:

$$x_0 = 0 \quad y_0 = (100000 + w_1) M \quad z_0 = w_3 \quad (9)$$

$$v_0 = 7800 \text{ м/сек} \quad \theta_0 = (\bar{\theta}_0 + w_2) \text{ рад} \quad w_z = 0$$

Здесь  $w_1, w_2, w_3$  - некоррелированные случайные коэффициенты, распределенные по нормальному закону. Их математические ожидания равны нулю, а среднеквадратические отклонения известны:

$$\sigma(w_1) = 2000 \text{ м}$$

$$\sigma(w_2) = 0,0005 \text{ рад}$$

$$\sigma(w_3) = 3300 \text{ м}$$

Возмущения плотности атмосферы по высоте задаются каноническим разложением в виде

$$\rho = \rho_H \left( 1 + \sum_{i=1}^m w_{i+3} f_i(h) \right) \quad (10)$$

Дисперсии случайных коэффициентов будем считать равными единице. Координатные функции получаются путем обработки статистических данных о плотности атмосферы.

Будем считать, что вариации аэродинамического качества за счет вариаций коэффициента лобового сопротивления могут достигать 15%, и что это возмущение также распределено по нормальному закону.

Поставим следующую задачу терминального управления.

Для КА, описываемого уравнениями (I) и подверженного действию случайных возмущений (9), (10) найти такое управление в форме (3), (4), которое обеспечивает перевод КА из начального состояния  $(U_{x0}, U_{y0}, U_{z0}, x_0, y_0, z_0)$  и при ограничениях (7) минимизирует функционал (8).

## 2. Алгоритм решения задачи

При решении сформулированной выше задачи будем пользоваться методом последовательной оптимизации<sup>3</sup>. Этот метод предполагает на каждом шаге оптимизации замену исходной задачи задачей выпуклого квадратичного программирования с линейными ограничениями. В рассматриваемой задаче критерий качества в связи со случайностью возмущений носит статистический характер, поэтому возникают дополнительные трудности.

Алгоритм одного шага решения задачи в данном случае распадается на два самостоятельных этапа.

1. Получение квадратичного представления минимизируемого функционала и линеаризация ограничений.

2. Решение задачи квадратичного программирования.

Рассмотрим особенности каждого из этапов. Основная трудность получения квадратичной аппроксимации минимизируемого

функционала связана с тем, что он имеет статистический характер. Это означает, что его величина при некотором значении вектора управления

$$K = (K_1, K_2, \dots, K_n) \quad (II)$$

может быть сосчитана лишь приближенно (методом Монте-Карло, интерполяционным<sup>4</sup>, методом Доступова Б.Г.<sup>5</sup> и др.), а значит с какой-то ошибкой. Помимо этого в связи со сложным нелинейным характером связей в виде дифференциальных уравнений (I) нельзя утверждать, что критерий (8) будет выпуклым относительно вектора  $K$ . Но даже при наличии выпуклости из-за ошибки счета его значений после интерполяции квадратичным этот функционал может уже оказаться невыпуклым, а это препятствует применению хорошо разработанного аппарата выпуклого программирования<sup>6</sup>.

Поэтому при решении указанной задачи квадратичную интерполяцию исходного функционала целесообразно проводить с дополнительным ограничением

$$\lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (I2)$$

где  $\lambda_i$  — собственные числа матрицы квадратичной формы, полученной в результате интерполяции исходного функционала. Очевидно, что условие (I2) эквивалентно требованию выпуклости (не обязательно строгой) квадратичного приближения критерия (8). Тогда задача интерполяции решается как некоторая задача сглаживания. В этом случае нет необходимости находить частные производные первого и второго порядка от минимизируемого функционала по параметрам управления. Достаточно лишь иметь значения функционала в некотором числе точек пространства допустимых управлений.

Опишем кратко алгоритм наилучшей в среднеквадратичном выпуклой аппроксимации, который использовался при решении задачи синтеза параметрического закона управления снижением КА.

Пусть  $I^m$  — значение критерия качества системы управления в  $m$ -ой точке  $K^m$  ( $m = 1, \dots, \ell$ ) пространства управлений из допустимой ограничением области.

Пусть имеется некоторое начальное выпуклое приближение критерия (8) квадратичным. Оно может быть довольно далеким от самого функционала, поэтому получить его несложно.

Предположим, что оно имеет вид:

$$\bar{I}(K) = C^0 + \sum_{i=1}^n b_i^0 K_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 K_i K_j \quad (I3)$$



Все величины  $\kappa_j^m$  предполагаются заданными, а потому значения функционала  $\bar{I}$  в точках  $\kappa^m$ , в которых заданы точные значения функционала  $I$ , можно записать в виде

$$\bar{I} = c^0 + \sum_{i=1}^n \beta_i^0 \kappa_i^m + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \kappa_i^m \kappa_j^m \quad (I4)$$

Матрица  $(a_{ij}^0)$  симметрическая и положительно определенная. Поставим следующую задачу квадратичного программирования. Найти такие значения  $c$ ,  $\beta_i$ ,  $a_{ij}$ , которые реализуют минимум вспомогательного функционала

$$\Phi = \sum_{m=1}^l (\bar{I}^m - I^m)^2 \quad (I5)$$

и удовлетворяют ограничениям

$$\lambda_i \geq 0 \quad (I6)$$

$$|\bar{I}^m - I^m| \leq \delta \quad (I7)$$

$$m = 1, \dots, l$$

Ограничения (I7) накладываются для того, чтобы исключить резкое отличие значений функционала (8) и его выпуклой аппроксимации в какой-либо точке. В большинстве задач оно, однако, оказывается несущественным.

Введем вектор

$$Y^m = (y_0^m, y_1^m, \dots, y_p^m) \quad (I8)$$

по формулам

$$\begin{aligned} y_0^m &= 1 \\ y_1^m &= \kappa_1^m & y_2^m &= \kappa_2^m \dots y_n^m &= \kappa_n^m \\ y_{n+1}^m &= \kappa_1^m \kappa_1^m & y_{n+2}^m &= \kappa_p^m \kappa_2^m \dots y_{2n}^m &= \kappa_1^m \kappa_n^m \\ y_{2n+1}^m &= \kappa_2^m \kappa_2^m & y_{2n+2}^m &= \kappa_2^m \kappa_3^m \dots y_{3n-1}^m &= \kappa_2^m \kappa_n^m \\ &\dots \dots \dots \\ y_p^m &= \kappa_n^m \kappa_n^m \end{aligned} \quad (I9)$$

$$p = \frac{n(n+3)}{2}$$

Очевидно, что компоненты вектора  $Y^m$  - это упорядоченные коэффициенты при  $c$ ,  $\beta$  и  $a_{ij}$  в равенстве (I4).

Для сокращения записи введем также вектор

$$\Omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_p) \quad (20)$$

компоненты которого  $\omega_j$  суть коэффициенты  $c$ ,  $b_i$ ,  $a_{ij}$  в равенстве (14) при  $y_i$  в соответствии с обозначениями (19). Тогда минимизируемый функционал (8) является квадратичной функцией компонент вектора  $\Omega$ :

$$\Phi(\Omega) = \sum_{m=1}^{\ell} (I^m - \sum_{i=0}^p y_i^m \omega_i)^2 \quad (21)$$

Очевидно, что выбором величин  $y_i^m$  функционал  $\Phi$  всегда можно сделать выпуклым.

Ограничение (17) линейно. Ограничение (16) можно линеаризовать

$$\lambda_i(\Omega) \equiv \lambda_i(\Omega^0) + \sum_{j=n+1}^p \frac{\partial \lambda_i(\Omega^0)}{\partial \omega_j} (\omega_j - \omega_j^0) \geq 0 \quad (22)$$

что иначе можно написать так

$$-\sum_{j=n+1}^p \frac{\partial \lambda_i(\Omega^0)}{\partial \omega_j} \omega_j \leq \lambda_i(\Omega^0) - \sum_{j=n+1}^p \frac{\partial \lambda_i(\Omega^0)}{\partial \omega_j} \omega_j^0 \quad (23)$$

Итак, задача наилучшей в среднеквадратичном выпуклой аппроксимации исходного функционала сводится к задаче минимизации квадратичного выпуклого функционала (21) при линейных ограничениях (16), (23).

При программировании указанной задачи для решения на ЦВМ М-20 счет собственных чисел матрицы  $(a_{ij})$  производился с помощью стандартных подпрограмм счета коэффициентов характеристического полинома матрицы методом Данилевского и нахождения корней полинома с помощью метода Миллера<sup>7</sup>. Частные производные отыскивались численно по разностным отношениям. Задача выпуклого программирования решалась методом Хилдрета и Д'Эзопо<sup>6</sup>.

Рассмотрим некоторые особенности второго этапа решения задачи.

Известно, что минимизация функционалов, зависящих от большого числа параметров, даже если выполнены условия выпуклости функционала и ограничений, является достаточно громоздкой задачей, для решения которой требуется большое число итераций. Ниже предлагаются некоторые способы организации "спуска", позволяющие в большинстве случаев существенно снизить число итераций

и объем вычислений.

Нами широко использовался метод оптимизации квадратичных функционалов, в котором на каждом шаге производится оптимизация по подмножеству  $\tilde{U}$  меньшего числа измерений, чем размерность вектора управления  $K$ , т.е. каждая итерация состоит при этом в решении такой задачи

$$\min_{\tilde{u} \in U} \bar{I}(k_1, k_2, \dots, k_m) \quad (24)$$

где  $U$  - пространство допустимых управлений.

Основная трудность при таком методе решения состоит в выборе последовательности подмножеств  $\tilde{U}_i$ , т.е. в определении числа одновременно оптимизируемых коэффициентов и состава каждой из групп одновременно оптимизируемых коэффициентов.

В некоторых случаях существенную помощь может оказать известный факт о возможности независимой оптимизации функционала по различным группам коэффициентов при блочно-диагональной форме квадратичной части функционала.

При практических вычислениях элементы матрицы вторых производных редко обращаются в нуль, что связано как с приближенностью счета производных, так и с тем, что обычно "корреляция" все же имеет место. Однако, если величины некоторых вторых смешанных частных производных намного меньше, чем других, то при анализе матрицы вторых производных функционала на возможность независимой оптимизации параметров их можно считать равными нулю. Это позволяет снизить число итераций и объем каждой из них за счет разбиения исходной задачи на несколько более простых. Однако это не всегда может быть использовано. Можно указать еще один путь, который как сам по себе, так и в комбинации с вышеуказанным может улучшить процесс решения задачи как в смысле сокращения объема решения, так и в смысле скорости сходимости процесса.

При численном решении задач оптимизации целесообразно вводить некоторые масштабные коэффициенты по различным параметрам управления таким образом, чтобы при наличии ограничений на параметры типа

$$\bar{K}_i \leq K_i \leq \bar{\bar{K}}_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (25)$$

разности  $(\bar{\bar{K}}_i - \bar{K}_i)$  были величинами одинакового порядка. На это указано в работе<sup>8</sup>, численный опыт оптимизации подтверждает это.

Для выпуклых функционалов можно утверждать, что частные про-

изводные функционала по параметрам управления  $\partial \bar{I} / \partial K_j$  по мере приближения к оптимуму уменьшаются по абсолютной величине. Поэтому, получив на любом шаге оптимизации значения градиента

$$\partial \bar{I} / \partial K = (\partial \bar{I} / \partial K_1, \partial \bar{I} / \partial K_2, \dots, \partial \bar{I} / \partial K_m) \quad (26)$$

по формуле (27) можно грубо оценить возможность уменьшения функционала  $\bar{I}(K)$  за счет вариаций поочередно каждого из  $K_j$

$$|\Delta \bar{I}|_j^{\max} \leq \left| \frac{\partial \bar{I}}{\partial K_j} \right| |\Delta K_j^{\max}| \quad (27)$$

где  $\Delta K_j^{\max}$  — максимально возможное изменение параметра  $K_j$  в сторону, соответствующую уменьшению функционала в соответствии с нормированными ограничениями (25).

Часто оказывается, что производные по некоторым из параметров много меньше, чем по другим, а потому выполнено:

$$\left| \frac{\partial \bar{I}}{\partial K_j} \right| |\Delta K_j^{\max}| \gg \left| \frac{\partial \bar{I}}{\partial K_l} \right| |\Delta K_l^{\max}| \quad (28)$$

т.е. в этом случае

$$\left| \frac{\partial \bar{I}}{\partial K_j} \right| \gg \left| \frac{\partial \bar{I}}{\partial K_l} \right| \quad (29)$$

и величины  $\Delta K_j^{\max}$  и  $\Delta K_l^{\max}$  имеют в соответствии с нормировкой одинаковый порядок. Это дает основания на  $\tau$ -ом шаге оптимизации поиск минимума проводить в допустимом множестве тех из параметров  $K_1, \dots, K_n$ , производные от функционала по которым сравнимы друг с другом и много больше производных от функционала по другим параметрам. Этот прием следует повторять от шага к шагу, и таким образом будет определяться последовательность подмножеств параметров управления  $U_\tau$ , из которых выбираются решения на  $\tau$ -ом шаге.

В большинстве решенных задач, как и в рассматриваемой, этот прием упрощения алгоритма приводил к хорошим результатам.

Для задач с большой размерностью вектора управления  $U$  хорошие результаты может дать комбинирование обоих указанных методов.

### 3. Результаты решения задачи

Сформулированная ранее задача синтеза оптимального параметрического закона управления снижением КА была решена на вычислительной машине М-20 в соответствии с алгоритмом, описанным в п.2.



Была получена номинальная траектория, соответствующая программе (2) и отсутствию возмущений, т.е. случаю  $w_1, w_2, \dots, w_7 = 0$ . Эта траектория соответствует движению КА весом около семи тонн и при некоторых типичных аэродинамических характеристиках  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ .

При решении задачи было обнаружено, что оптимизацию коэффициентов  $K_1 \div K_4$  и  $K_5 \div K_6$  можно производить независимо вследствие квазидиагональной структуры матрицы квадратичной части функционала. Далее, анализ чувствительности функционала (8) к вариациям коэффициентов  $K_1 \div K_6$  в окрестности начального приближения

$$K_1 = K_2 = \dots = K_6 = 0$$

показал, что существенного уменьшения функционала можно добиться путем оптимизации на первом этапе коэффициентов  $K_1 \div K_3$  и  $K_5$ .

При решении использовался метод последовательной оптимизации<sup>3</sup>. Статистические характеристики  $L$  и  $Z$ , входящие в функционал (8), считались по методике Доступова Б.Г.<sup>5</sup>

Значение функционала в точке начального приближения было

$$I = 0,162 \cdot 10^{12}$$

причем максимальное отклонение точки приземления КА от математического ожидания (которое в начальной точке не совпадало с расчетным) было

$$\Delta R_{max} = 1298 \text{ км}$$

После первого шага оптимизации было получено решение

$$\begin{array}{lll} K_1 = -0,3 \cdot 10^{-3} & K_2 = -0,35 \cdot 10^{-3} & K_3 = -0,1 \cdot 10^{-4} \\ K_4 = 0 & K_5 = 0 & K_6 = 0,4 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

а значения функционала  $I$  и максимального кругового отклонения точки приземления КА от математического ожидания были такими:

$$I^{(1)} = 0,552 \cdot 10^8 \text{ м}^2$$

$$\Delta R_{max} = 14,02 \text{ км}$$

Снятие функций чувствительности на втором и третьем шагах позволило каждый раз правильно выбирать совокупность оптимизируемых коэффициентов. Окончательное решение задачи (после третьего шага) таково:



$$K_1 = -0,49 \cdot 10^{-3}$$

$$K_2 = -0,26 \cdot 10^{-3}$$

$$K_3 = -0,8 \cdot 10^{-5}$$

$$K_4 = -0,3 \cdot 10^{-5}$$

$$K_5 = 0,6 \cdot 10^{-4}$$

$$K_6 = 0,46 \cdot 10^{-4}$$

а качество управления конечным состоянием характеризуется такими цифрами:

$$I^{(3)} = 0,407 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$\Delta R_{\max} = 1,2 \text{ км}$$

Как показал анализ возмущенных траекторий движения центра масс КА, переходные процессы по составляющим вектора скорости и координатам получаются хорошими, а максимальные значения управляющих воздействий  $\Delta \alpha$  и  $\Delta \beta$  имеют место лишь при больших начальных рассогласованиях по координатам  $x$  и  $z$  и углу  $\theta$ .

Указанное решение получено для азимута траектории спуска  $A = 0$ . Проверка работоспособности указанного закона при азимутах спуска в диапазоне  $-90^\circ - +90^\circ$  дала удовлетворительные результаты, хотя для оптимальности законов (3), (4) при отличных от нуля азимутах спуска нужно увеличивать абсолютное значение коэффициента  $K_6$  и уменьшать абсолютное значение коэффициента  $K_3$ .

В результате анализа поведения решения в окрестности оптимального управления выяснена слабая чувствительность критерия (8) к вариациям коэффициентов  $K_1 - K_6$ , что позволяет снижать требования к точности их задания.

### Л и т е р а т у р а

1. Аппазов Р.Ф., Лавров С.С., Милин В.П. "Баллистика управляемых ракет дальнего действия". Издательство "Наука", 1966.
2. "Управление космическими летательными аппаратами". Под ред. К.Т.Леондеса. Издательство "Машиностроение", 1967.
3. Пономарев В.М. "Метод последовательной оптимизации в задачах управления". Известия АН СССР "Техническая кибернетика", № 2, 1967.
4. Чернецкий В.И. "Анализ точности нелинейных систем управления". Издательство "Машиностроение", 1968.

5. Доступов Б.Г. "Приближенное определение вероятностных характеристик выходных координат нелинейных систем автоматического регулирования". "Автоматика и телемеханика", т.18, 1957, № II.
6. Кюнци Г.П., Крелле В. "Нелинейное программирование". Издательство "Советское Радио", 1965.
7. Д.Дж.Уайльд. "Методы поиска экстремума". Издательство "Наука", 1967.

5. Доступов Б.Г. "Приближенное определение вероятностных характеристик выходных координат нелинейных систем автоматического регулирования". "Автоматика и телемеханика", т.18, 1957, № II.
6. Кюнци Г.П., Крелле В. "Нелинейное программирование". Издательство "Советское Радио", 1965.
7. Д.Дж.Уайльд. "Методы поиска экстремума". Издательство "Наука", 1967.

# СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ СПУСКОМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ

Власов А.Г., Митрошин Э.И., Уколов И.С.

Московский авиационный институт  
Москва

Среди задач, связанных с полетом пилотируемых космических аппаратов, актуальное место занимает задача безопасного спуска в атмосфере Земли. При ее решении возникают значительные трудности, особенно для случая входа в атмосферу со скоростями, превышающими первую космическую. Система управления спуском должна обеспечить посадку космического аппарата в заданный район при соблюдении ограничений по перегрузке, аэродинамическому нагреву и т.д.

Поскольку возмущающие факторы в процессе спуска (начальный разброс параметров входа, флуктуации плотности атмосферы и т.д.) являются случайными, с заданными вероятностными характеристиками, то задачу управления спуском следует рассматривать в стохастической постановке. Причем, не нарушая общности, можно считать, что последняя сводится к задаче оптимального управления конечным состоянием стохастической динамической системы, которая описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = X(x, u, h, t) \quad (I)$$

- где :
- $x$  - вектор состояния системы размерности ( $n \times 1$ );
  - $u$  - вектор управления размерности ( $r \times 1$ ), обычно принадлежащий замкнутой области  $U$ ;
  - $h$  - вектор случайных возмущений;
  - $X$  - известная вектор-функция;
  - $t$  - независимая переменная (время или одна из координат состояния; для простоты, в дальнейшем принимается, что  $t$  - время);  $t \in [0, T]$ ;
  - знак дифференцирования по  $t$ .

Информация о текущем состоянии системы по результатам наблюдений, производимых, обычно, с помощью автономных средств на борту космического аппарата, представляется в виде:

$$y = Y(x, \varepsilon, t) \quad (2)$$

где:  $y$  - вектор наблюдений размерности  $(c \times 1; c \leq n)$   
 (например, вектор перегрузки);  
 $\varepsilon$  - вектор случайных ошибок;  
 $Y$  - известная вектор-функция.

Требуется получить экстремум некоторой функции конечного состояния (например, минимум рассеивания по дальности спуска или минимум тепла, подводимого к космическому аппарату за время спуска и т.д.).

$$J = M \tilde{\omega}[x(t)] \quad (3)$$

где:  $M$  - знак математического ожидания;  
 $\tilde{\omega}$  - скалярная неотрицательная функция  
 при наличии следующих граничных условий:

$x(0)$  - вектор случайных величин, с определенными вероятностными характеристиками,

в момент  $T$ :

$$T \in \{T: \Omega[x(T), T] = 0\} \quad (4)$$

где  $\Omega$  - некоторая нелинейная функция,  
 должно с определенной степенью вероятности выполняться соотношение:

$$x(T) \in \{x: g_k(x) = 0\} \quad (5)$$

где  $g_k$  - некоторая нелинейная вектор-функция.

Для задач спуска космических аппаратов в атмосфере также характерно требование по выполнению текущих фазовых ограничений типа неравенства (например, ограничение по максимуму перегрузки), то-есть с определенной степенью вероятности должно выполняться:

$$g(t, x) \leq 0 \quad (6)$$



где  $g$  - некоторая нелинейная вектор-функция размерности  $(m \times 1)$ .

Вектора случайных возмущений  $h$  и ошибок измерений  $e$ , в общем случае, включают в себя и случайные параметры  $\eta$  (например, разброс по параметрам космического аппарата и начальным условиям входа) в случайные процессы  $g$  (например, флуктуации плотности атмосферы).

С помощью формирующих фильтров случайные процессы  $g$  можно приближенно представить в виде решений дифференциальных уравнений типа:

$$\dot{g} = fg + \varepsilon \quad (7)$$

где:  $f$  - известная матрица;  
 $\varepsilon$  - вектор случайных  $\delta$  - коррелированных процессов ("белых шумов").

Если для случайных параметров  $\eta$  формально записать уравнение формирующего фильтра в виде:

$$\dot{\eta} = 0 \quad (8)$$

и понимать теперь под  $x$  расширенный вектор состояния  $\begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}$ , а под  $X$  соответственно расширенную вектор-функцию, то не нарушая общности, можно считать, что уравнения (1), (2) записываются в виде:

$$\dot{x} = X(x, u, \varepsilon, t) \quad (9)$$

$$y = Y(x, \xi, t) \quad (10)$$

где  $\varepsilon, \xi$  - "белые шум".

При такой общей постановке, исследование задачи сильно осложняется из-за нелинейности системы уравнений (9, 10).

Однако, предположение о малости возмущающих факторов, и, вследствие этого, близости возмущенной траектории движения к некоторой теоретической (номинальной) траектории, позволяет использовать метод линеаризации для описания возмущенного движения, тем самым существенно упрощая исследование задачи.

Полагая, что для номинальной траектории возмущения равны 0, можно считать, что исследуемая динамическая система задается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x, u, t) \quad (II)$$

$$\dot{x}_1 = A(x, u, t)x_1 + B(x, u, t)\vartheta + E(x, u, t) \quad (I2)$$

$$y_1 = H(x, u, t)x_1 + \xi(x, u, t) \quad (I3)$$

где:  $x$  - вектор состояния системы при движении вдоль номинальной траектории;

$x_1$  - обобщенный вектор состояния системы для возмущенного движения;

$y_1$  - вектор наблюдений;

$E, \xi$  - "белые шумы";

$u$  - вектор управления при движении вдоль номинальной траектории  $u \in U$ ;

$\vartheta$  - вектор управления при возмущенном движении;

$X$  - известная вектор-функция, соответствующая движению вдоль номинальной траектории;

$A, B, H$  - матрицы, соответствующей размерности.

Граничные условия на концах записываются в виде:

$$x(0) \in g_0; \quad x(T) \in \{x: g_k(x) = 0\}; \quad T \in \{T: Q[x(T), T] = 0\} \quad (I4)$$

$x_1(0)$  - вектор случайных величин с определенными вероятностными характеристиками.

Для задач спуска космических аппаратов в атмосфере характерно следующее соотношение, накладываемое на вектора управления при номинальном и возмущенном движении.

$$u + \vartheta \in U \quad (I5)$$

Текущее ограничение типа неравенства (6) и оптимизируемый функционал (3), (в дальнейшем, для простоты, будем полагать его минимизируемым), с учетом сделанных допущений, можно переписать в виде:

$$g(t, x) + g_x(t, x)x, \leq 0 \quad (I6)$$

где  $g_x$  - матрица частных производных  $g$  по  $x$ ,

$$J = M\tilde{\omega}[x(t) + x_1(t)] \quad (17)$$

Если в качестве  $\tilde{\omega}$  рассматривать функцию:

$$\tilde{\omega} = [x(t) + x_1(t)]' \Lambda [x(t) + x_1(t)] \quad (18)$$

где:  $\int \int'$  - знак транспонирования;

$\Lambda$  - весовая матрица,

то выражение для  $J$  можно записать в следующей развернутой форме

$$J = \omega[x(t)] + M\omega_1[x_1(t)] + \varphi[x(t), Mx_1(t)] \quad (19)$$

где  $\omega, \omega_1, \varphi$  - скалярные функции, причем первые две - неотрицательные.

Задачи программирования номинального движения и обеспечения его фактической реализации, в обычной постановке, исследуются раздельно. Причем, первая из них рассматривается, как некоторая детерминированная задача оптимального управления из условия минимизации

$$J_0 = \omega[x(t)] \quad (20)$$

Вторая задача, в силу своей природы, являющаяся стохастической, сводится к синтезу оптимального регулятора из условия минимизации

$$J_1 = M\omega_1[x_1(t)] \quad (21)$$

Естественно, рассмотреть решение обеих задач совместно. Актуальность такого подхода при решении проблем оптимизации отмечалась в <sup>1</sup>.

Предварительно исследуем возмущенное движение, так как оптимальный регулятор, как это будет видно из дальнейшего, структурно инвариантен, относительно параметров номинального движения. Будем считать, что номинальное движение задано и матрицы  $A, B, H$  и "белые шумы"  $\epsilon, \xi$  в уравнениях (12, 13) являются только функциями времени. Для синтеза оптимального регулятора используем метод динамического программирования и понятие достаточных координат<sup>2</sup>. Достаточные координаты являются координатами пространства, в котором рассматривается

функциональное уравнение Беллмана и их введение позволяет формально разделить задачи обработки информации и оптимального синтеза. При решении первой из них определяются достаточные координаты с применением методов линейной и нелинейной оптимальной фильтрации. Полученные достаточные координаты используются во второй задаче, для оптимального синтеза, на основе решения уравнения Беллмана.

Полагаем, что  $x_1(0), \varepsilon(t), \xi(t)$  - независимы и нормально распределены

$$\begin{aligned} M[x_1(0)] &= 0; \quad M[\varepsilon(t)] = M[\xi(t)] = 0; \\ M[x_1(0)x_1^T(0)] &= K_0; \quad M[\varepsilon(t)\varepsilon^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau), \\ M[\xi(t)\xi^T(\tau)] &= G(t)\delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $K_0$  - априорная ковариационная матрица вектора  $x_1(0)$ ,  $Q(t), G(t)$  - известные матрицы интенсивностей гауссовых "белых шумов"  $\varepsilon(t), \xi(t)$ .

Тогда для исследуемой динамической системы (I2, I3) вектор достаточных координат совпадает с вектором апостериорного математического ожидания  $\hat{z}$  обобщенного вектора состояния  $x_1$ , который может быть также определен, как вектор оптимальных оценок по методу максимума апостериорной плотности вероятности из решения следующей системы дифференциальных уравнений (фильтр Калмана)

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + B\sigma + PH^TG^{-1}(y_1 - H\hat{z}) \quad (23)$$

где  $P$  - ковариационная матрица ошибок оценки, определяемая из дифференциального уравнения ) (24)

$[J]^{-1}$  - символ обращения матрицы

$$\dot{P} = AP + PA^T - PH^TG^{-1}HP + Q \quad (24)$$

Уравнения (23) (24) решаются с начальными условиями

$$\hat{z}(0) = M[x_1(0)] = 0; \quad P(0) = K_0 \quad (25)$$

С учетом этого, уравнение Беллмана записывается в следующем виде

$$-\frac{\partial R(z,t)}{\partial t} = \min [R_z(Az + Bv) + \frac{1}{2} Sp(R_{zz}\pi)]$$

$$v(t) \in U(t) \quad (26)$$

где  $R$  - функция потерь;  $R(z,t) = \min_{v(t), t \in [t, T]} M\{\omega[x_1(t)/z(t)]\}$ ;

$R_z$  - вектор градиента  $R$  по  $z$ ;

$R_{zz}$  - матрица вторых частных производных  $R$  по  $z$ ;

$Sp$  - след матрицы

$$\pi = PH^T G^{-1} HP$$

$M[\cdot]$  - символ условного математического ожидания  
и должно решаться при граничном условии:

$$R[z, T] = M\{\omega[x_1(T)/z(T)]\} \quad (27)$$

Синтез оптимального регулятора на основе решения уравнения Беллмана, в общем случае, крайне затруднителен. Рассмотрим упрощенную постановку задачи, положив, что  $v$  является скаляром, а функция  $\omega[x_1(t)]$  имеет вид:

$$\omega[x_1(t)] = \{\chi[x_1(t)]\}^2 \quad (28)$$

где  $\chi$  - некоторая линейная форма.

Тогда вводя скаляр  $\chi[x_1(t)]$  в состав вектора  $x_1(t)$ , можно многомерный синтез оптимального регулятора, свести к одномерному, путем перехода к новой переменной по формуле<sup>3</sup>:

$$\rho(t) = \Phi(t, t) x_1(t) \quad (29)$$

где  $\Phi(t, t)$  - фундаментальная матрица однородного уравнения, соответствующего уравнения (12).  $\Phi(t, t)$  удовлетворяет следующим соотношением:

$$\dot{\Phi}(t, t) = -\Phi(t, t) A; \quad \Phi(t, T) = E \quad (30)$$

где  $E$  - единичная матрица

$$\dot{\rho} = \bar{B}v + \bar{E}; \quad y_1 = \bar{H}\rho + \bar{\epsilon}; \quad \rho(T) = x_1(T); \quad (31)$$

где

$$\bar{B} = \Phi(t, t) B; \quad \bar{H} = H \Phi^{-1}(t, t); \quad \bar{E} = \Phi(t, t) E;$$

Уравнения для апостериорного математического ожидания  $\rho$  и апостериорной ковариационной матрицы ошибок оценки  $S$  записываются соответственно:



$$\dot{\bar{z}} = \bar{B}\sigma + \bar{P}\bar{H}^T G^{-1}(y_t - \bar{H}\bar{z}); \quad \dot{\bar{P}} = \bar{Q} - \bar{P}\bar{H}^T G^{-1} \bar{H}\bar{P};$$

где  $\bar{z}$  - вектор оптимальной оценки  $\rho$  ;

$\bar{P}$  - ковариационная матрица ошибок оценки  $\rho$  ;

$$\bar{Q} = \Phi(T, t) Q \Phi^T(T, t); \quad \bar{z}(0) = 0; \quad \bar{P}(0) = \Phi(T, 0) K_0 \Phi^T(T, 0)$$

Положим, что  $\chi[x_i(t)]$  является первой координатой расширенного вектора состояние  $x_i(t)$ , тогда понимая под знаком " ' ", здесь и в дальнейшем, первые координаты и первые строки соответственно векторов и матриц, можем записать уравнение Беллмана в следующем виде:

$$-\frac{\partial R(\bar{z}', t)}{\partial t} = \min_{\sigma(t) \in U(t)} [R\bar{z}'\bar{B}'\sigma + \frac{1}{2} R\bar{z}'\bar{z}'\bar{H}'] \quad (32)$$

где

$$\bar{H}' = (\bar{P}\bar{H}^T G^{-1}) G (\bar{P}\bar{H}^T G^{-1})'^T$$

Это уравнение должно решаться при граничном условии

$$R(\bar{z}', T) = M\{[p'(T)]^2 / \bar{z}'(T)\} \quad (33)$$

Однако, для оптимального синтеза, в данном случае, нет необходимости решать уравнение Беллмана.

Рассмотрим случай дискретного поступления информации, что является характерным для задач спуска в атмосфере, при условии, что информация обрабатывается бортовой цифровой вычислительной машиной. Будем считать, что информация поступает в дискретные моменты времени  $0 < t_N < t_{N+1} < \dots < t_i < t_0 (t \leq T)$  с интервалом дискретности  $\Delta t$ , на котором  $\sigma$  принимается const. Тогда дифференциальное уравнение для  $p'(t)$  и уравнение Беллмана заменяются рекуррентными соотношениями

$$p'_{k+1} = p'_k + \sigma_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{E} d\tau; \quad (34)$$

$$R_k(\bar{z}'_k) = \min_{\sigma_k \in U_k} M[R_{k+1}(\bar{z}'_{k+1} + \sigma_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau + V'_k) / \bar{z}'_k] \quad (35)$$

$$V'_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{E}' d\tau - \bar{\delta}'_k + \bar{\delta}'_{k+1}; \quad \bar{\delta}'_k = \bar{z}'_k - p'_k$$

где индекс "к" обозначает соответствие моменту  $t_k$ . Полагая, что область допустимых значений управления  $\sigma$  является асим-

метричной

$$v_{kmin} \leq v_k \leq v_{kmax} \quad (36)$$

что естественно ожидать, учитывая взаимосвязь управлений при номинальном и возмущенном движении из условия (15), можно показать, что оптимальное управление  $v_{kopt}$  на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  равно:

$$v_{kopt} = \begin{cases} v_{kmin}, \text{ если } \text{sign} \left\{ \left[ \bar{z}'_k + \sum_{i=k-1}^0 \frac{v_{imax} + v_{imin}}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{B}' d\tau \right] \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau \right\} = +1; \\ v_{kmax}, \text{ если } \text{sign} \left\{ \left[ \bar{z}'_k + \sum_{i=k-1}^0 \frac{v_{imax} + v_{imin}}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{B}' d\tau \right] \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau \right\} = -1; \\ \text{при } v_{kmax} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau \right| \leq - \left[ \bar{z}'_k + \sum_{i=k-1}^0 \frac{v_{imax} + v_{imin}}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{B}' d\tau \right] \text{sign} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau < v_{kmin} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau \right|; \\ \bar{z}'_k + v_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau + \sum_{i=k-1}^0 \frac{v_{imax} + v_{imin}}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{B}' d\tau = 0; \\ \text{при } v_{kmax} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau \right| > - \left[ \bar{z}'_k + \sum_{i=k-1}^0 \frac{v_{imax} + v_{imin}}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{B}' d\tau \right] \text{sign} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau > v_{kmin} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau \right|; \end{cases} \quad (37)$$

Отсюда видно, что для оптимального регулятора на каждом отрезке  $\Delta t$  характерно стремление с максимальным быстродействием совместить оптимальную оценку  $\bar{z}'$  с некоторой нулевой величиной  $-\left[ \sum_{i=k-1}^0 \frac{v_{imax} + v_{imin}}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{B}' d\tau \right]$ , обусловленной асимметрией области допустимых значений управления, за исключением некоторой области неоднозначности оптимального управления

$$v_{kmax} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau \right| > - \left[ \bar{z}'_k + \sum_{i=k-1}^0 \frac{v_{imax} + v_{imin}}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{B}' d\tau \right] \text{sign} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau > v_{kmin} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{B}' d\tau \right|; \quad (38)$$

зависящей от интервала дискретности  $\Delta t$  и допустимых значений по управлению.

Переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , в формуле (37) получим, что

$$v_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} v_{\min}(t), & \text{если } \bar{z}'(t) \text{Sign } \bar{B}'(t) > - \int_t^T \frac{v_{\max}(\tau) + v_{\min}(\tau)}{2} \bar{B}'(\tau) d\tau \text{Sign } \bar{B}'(t) \\ 0, & \text{если } \bar{z}'(t) = - \int_t^T \frac{v_{\max}(\tau) + v_{\min}(\tau)}{2} \bar{B}'(\tau) d\tau \\ v_{\max}(t), & \text{если } \bar{z}'(t) \text{Sign } \bar{B}'(t) < - \int_t^T \frac{v_{\max}(\tau) + v_{\min}(\tau)}{2} \bar{B}'(\tau) d\tau \cdot \text{Sign } \bar{B}'(t) \end{cases} \quad (39)$$

Таким образом, алгоритм оптимального управления при непрерывном поступлении информации полностью определен без непосредственного решения уравнения Беллмана. Причем, при непрерывном поступлении информации, в отличие от детерминированного случая ( $\xi(t) = \xi(t) = 0$ ), где имеет место неоднозначность оптимального управления в так называемой "зоне полной управляемости", в стохастической задаче оптимальное управление определяется на основании (39) однозначно: в каждый момент времени оптимальное управление стремится с максимальным быстродействием совместить оптимальную оценку  $\bar{z}'(t)$  с величиной  $-\int_t^T \frac{v_{\max}(\tau) + v_{\min}(\tau)}{2} \bar{B}'(\tau) d\tau$ , обусловленной асимметрией области допустимых значений управления. Подставив выражение для оптимального управления  $v_{\text{opt}}$  (39) в уравнение Беллмана (32), из решения последнего можно определить ту часть минимизируемого функционала  $J$ , которая обусловлена возмущенным движением  $J_1$ .

$$\min J_1 = \min M[p'(T)]^2 = R[\bar{z}'(0), t=0], \quad (40)$$

Поскольку получение точного решения уравнения Беллмана затруднительно, используем приближенный метод решения — метод параметров.

Сущность метода параметров заключается в том, что функция потерь  $R(\bar{z}, t)$  приближенно представляется, как функция конечного числа параметров

$$R(\bar{z}, t) = \psi'(\bar{z}') a(t) \quad (41)$$

где  $\psi$  — известная вектор-функция выбранных функций разложения;

$a$  — вектор искомых параметров размерности  $(S \times I)$ .

Накладывая на параметры  $a$  некоторые естественные условия по точности аппроксимации функции  $R(\bar{z}, t)$  и используя уравнение Беллмана, можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с граничным условием на конце  $T$ , опи-

сывающих эволюцию параметров в обратном времени.

Эти уравнения, соответственно для различных методов параметров, изложенных в 2, 4 имеют следующий вид:

$$1) \dot{\alpha} = - \left[ \int_{\bar{z}_H^*}^{\bar{z}_6^*} \Psi \Psi^T d\bar{z}' \right]^{-1} \int_{\bar{z}_H^*}^{\bar{z}_6^*} (\bar{B}' V_{opt} \Psi_{\bar{z}'}^T + \frac{1}{2} \Psi_{\bar{z}'\bar{z}'}^T \bar{H}') \alpha \Psi d\bar{z}';$$

$$2) \left[ \Psi^T /_{\bar{z}' = \bar{z}'_i(t)} - \Psi^T /_{\bar{z}' = \bar{z}'_k(t)} \right] \dot{\alpha} = \left[ (V_{opt} \bar{B}' \Psi_{\bar{z}'}^T + \frac{1}{2} \Psi_{\bar{z}'\bar{z}'}^T \bar{H}') /_{\bar{z}' = \bar{z}'_k(t)} - (V_{opt} \bar{B}' \Psi_{\bar{z}'}^T + \frac{1}{2} \Psi_{\bar{z}'\bar{z}'}^T \bar{H}') /_{\bar{z}' = \bar{z}'_i(t)} \right] \alpha; \quad K=2,3,\dots,(S+1)$$

$[\bar{z}_H^*, \bar{z}_6^*]$  - область допустимых значений  $\bar{z}'$ ;

$\bar{z}'_i(t)$  - некоторые заданные функции  $\bar{z}'$ ;

где  $\Psi_{\bar{z}'}$  - вектор градиента  $\Psi$  по  $\bar{z}'$ ;

$\Psi_{\bar{z}'\bar{z}'}$  - матрица вторых частных производных  $\Psi$  по  $\bar{z}'$

Уравнения решаются при граничном условии

$$\alpha(\tau) = \alpha_\tau \quad (44)$$

где  $\alpha_\tau$  - выбирается из условия обеспечения (33)

Априорная оценка  $\min J_1$  записывается в следующем виде

$$\min J_1 = R[\bar{z}'(0), t=0] = \Psi^T[\bar{z}'(0)] \cdot \alpha(0) \quad (45)$$

Как отмечалось выше, вследствие того, что компоненты вектора случайны, можно говорить о выполнении неравенства (16) только с каким-то априорным уровнем вероятности, для чего необходимо знать априорную плотность вероятности вектора  $x_1$  или параметры ее заменяющие, в каждый момент времени  $t$ . В данном случае, под оценкой точности случайного вектора будем понимать получение вектора априорного математического ожидания и априорной матрицы ковариаций.

Поскольку нас интересует оценка точности случайного вектора  $y_x x_1$  (размерности  $m \times I$ ), то вводя расширенный вектор состояния  $x_2 = \begin{pmatrix} y_x x_1 \\ x_1 \\ \frac{p}{z} \end{pmatrix}$ , можно записать, что для системы вида

$$\dot{x}_2 = S(t)x_2 + F(t, x_2) + G(t) \quad (46)$$



где матрица  $S(t)$ , нелинейная вектор-функция  $F(t, x_2)$  и "белый шум"  $G(t)$  соответствуют расширенному вектору состояния  $x_2$ , требуется определить первые  $m$  компонент вектора

$$\bar{x}_2(t) = M x_2(t) \quad (47)$$

и матрицу, состоящую из первых  $m$  строк и столбцов матрицы

$$\bar{\bar{x}}_2(t) = M[x_2(t) - \bar{x}_2(t)][x_2(t) - \bar{x}_2(t)]^T \quad (48)$$

Полагая, что  $x_2(0)$  и  $G(t)$  - независимы и нормально распределены

$$\bar{x}_2(0) = x_{20}, \quad \bar{\bar{x}}_2(0) = K_{20}, \quad M G(t) = 0, \quad M[G(t)G^T(\tau)] = K(t)\delta(t-\tau) \quad (49)$$

и используя метод статистической линеаризации можно показать, что  $\bar{x}_2(t)$  и  $\bar{\bar{x}}_2(t)$  приближенно удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\bar{x}}_2 = S(t)\bar{x}_2 + \Psi_1(t, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2); \quad \bar{x}_2(0) = x_{20}; \quad (50)$$

$$\dot{\bar{\bar{x}}}_2 = [S(t) + \Psi_2(t, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2)]\bar{\bar{x}}_2 + \bar{\bar{x}}_2[S(t) + \Psi_2(t, \bar{x}_2, \bar{\bar{x}}_2)]^T + K \quad (51)$$

$$\bar{\bar{x}}_2(0) = K_{20}$$

где  $\Psi_1, \Psi_2$  - некоторые функциональные соотношения, определение которых, в конечном итоге, сводится к вычислению следующей величины

$$P(t, M\bar{z}', \bar{G}_{\bar{z}}') = \frac{1}{2} [\bar{v}(t) + \bar{\bar{v}}(t)] \cdot [\bar{v}(t) - \bar{\bar{v}}(t)] \Phi \left[ \frac{\bar{z}'^* - M\bar{z}'}{\bar{G}_{\bar{z}}'} \right] \quad (52)$$

где  $M\bar{z}'$  и  $\bar{G}_{\bar{z}}'^2$  - являются компонентами  $\bar{x}_2$  и  $\bar{\bar{x}}_2$ , соответствующими координате  $\bar{z}'$ :

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} v_{\max}(t), & \text{если } \text{Sign } \bar{B}' = +1; \\ v_{\min}(t), & \text{если } \text{Sign } \bar{B}' = -1; \end{cases} \quad \bar{\bar{v}}(t) = \begin{cases} v_{\max}(t), & \text{если } \text{Sign } \bar{B}' = -1 \\ v_{\min}(t), & \text{если } \text{Sign } \bar{B}' = +1 \end{cases}$$

$$\bar{z}'^* = - \int_t^T \frac{v_{\max}(\tau) + v_{\min}(\tau)}{2} \bar{B}'(\tau) d\tau; \quad (53)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$\Phi$  - интеграл вероятности.

Пренебрегая, для простоты, корреляцией между компонентами вектора  $(x_2 - \bar{x}_2)$  можно считать, с привлечением правила "3  $\sigma$ ", что требование по выполнению стохастического



неравенства (16) сводится к необходимости выполнения следующего детерминированного неравенства:

$$g(t, x) + \bar{x}_m(t, x) \pm 3b_m(t, x) \leq 0 \quad (54)$$

где  $\bar{x}_m$  - вектор, состоящий из первых  $m$  компонент вектора  $\bar{x}_2$ ;

$b_m$  - вектор, состоящий из квадратных корней первых  $m$  диагональных элементов матрицы  $\bar{x}_2$ .

Теперь, после определения структуры оптимального регулятора, оценки части функционала, обусловленной возмущенным движением, и оценки точности обобщенного вектора состояния при возмущенном движении, можно заключить, что совместное рассмотрение детерминированной задачи программирования номинального движения и стохастической задачи обеспечения его фактической реализации сводится к следующей детерминированной экстремальной задаче.

Дана системы обыкновенных дифференциальных уравнений (обозначения см. выше), заданная на отрезке  $[a, T]$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, u, t); \quad \dot{\Phi}(T, t, x, u) = -\Phi(T, t, x, u) A(x, u, t); \\ \dot{P}(x, u, t) &= \bar{Q}(x, u, t) - \bar{P}(x, u, t) \bar{H}^T(x, u, t) \bar{G}^{-1}(x, u, t) \bar{H}(x, u, t) \bar{P}(x, u, t); \\ \dot{\alpha}(x, u, t) &= - \left[ \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_n^*} \bar{\Psi}(\bar{z}') \bar{\Psi}^T(\bar{z}') d\bar{z}' \right]^{-1} \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_n^*} [\bar{v}_{om}(x, u, t, \bar{z}') \bar{B}'(x, u, t) \bar{\Psi}_{\bar{z}'}^T(\bar{z}') + \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{\bar{z}'}^T(\bar{z}') \bar{\pi}'(x, u, t)] \alpha(x, u, t) \bar{\Psi}(\bar{z}') d\bar{z}'; \\ \dot{\bar{x}}_2(x, u, t) &= S(x, u, t) \bar{x}_2(x, u, t) + \bar{\Psi}_1(x, u, t); \\ \dot{\bar{x}}_2(x, u, t) &= [S(x, u, t) + \bar{\Psi}_2(x, u, t)] \bar{x}_2(x, u, t) + \bar{x}_2(x, u, t) [S(x, u, t) + \\ &\quad + \bar{\Psi}_2(x, u, t)]^T + K(x, u, t); \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &\in g_0; \quad x(T) \in \{x: g_\infty(x) = 0\} \quad T \in \{T: \Omega[x(T), T] = 0\}; \\ \Phi(T, T) &= E; \quad \bar{P}(0) = \Phi(T, 0) K_0 \Phi^T(T, 0); \quad \alpha(T) = \alpha_T; \\ \bar{x}_2(0) &= x_{20}; \quad \bar{x}_2(0) = K_{20} \end{aligned} \quad (56)$$

Требуется выбрать программу  $u(t)/u \in U$  и начальные условия  $x(0)$ , исходя из условия:

$$\min J = \min \left\{ \omega[x(T) + \psi^T[\bar{z}'(0)]\alpha(0) + \varphi[x(T), \bar{x}_2(T)]] \right\} \quad (57)$$

при выполнении текущих ограничений типа неравенства

$$g(t, x) + \bar{x}_m(x, u, t) + 3\sigma_m(x, u, t) \leq 0 \quad (58)$$

Поставленная задача является детерминированной задачей оптимального управления при наличии ограничений на управление и фазовые координаты и может быть решена с помощью известных приближенных вычислительных методов. Таким образом, алгоритм получения оптимального номинального движения полностью определен.

Реализация оптимальных алгоритмов управления возмущенным движением для задач спуска, полученных на основании вышеизложенного, требует наличия на борту космического аппарата быстродействующей цифровой вычислительной машины (БЦВМ).

Специфика условий движения космического аппарата в атмосфере, со скоростями превышающими первую космическую, определяет полностью автономный характер системы управления. Поэтому в качестве источника информации могут быть использованы время и перегрузка, измеряемая в инерциальных или связанных осях космического аппарата.

БЦВМ позволяет путем статистической обработки результатов измерений перегрузок получить полную информацию о параметрах движения космического аппарата. Необходимая информация о номинальном движении, которое заранее выбирается описанным выше оптимальным образом, хранится в бортовом запоминающем устройстве. Отклонения действительных значений параметров движения от номинальных используются для выработки необходимого управляющего воздействия.

#### Л и т е р а т у р а

1. Летов А.М. "Теория оптимального управления". Труды II конгресса ИФАК. Изд. "Наука" 1965 г., том "Оптимальные системы. Статистические методы".

2. Стратонович Р.Л. "Новейшее развитие методов динамического программирования и их применение для синтеза оптимальных систем". Труды II конгресса ИФАК. Изд. "Наука" 1965 г. том "Оптимальные системы. Статистические методы".
3. Богуславский И.А. "О статистически оптимальном управлении конечным состоянием" Журнал "Автоматика и телемеханика", 1966 г. № 5.
4. Кротов В.Ф. "Приближенный синтез оптимального управления". Журнал "Автоматика и телемеханика" 1964 г. № II.

## УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ

Д.Е.Охотимский, А.П.Бухаркина, Ю.Ф.Голубев

Институт прикладной математики

Москва

СССР

1. Постановка задачи. Данная работа посвящена проблеме построения алгоритма управления движением космического аппарата при возвращении в атмосферу Земли со скоростью порядка второй космической. Предполагается, что аппарат снабжен стабилизированной платформой, имеющей три акселерометра, установленные по взаимно-перпендикулярным осям. Управление полетом производится за счет изменения направления подъемной силы аппарата при изменении угла крена. Расчет необходимого угла крена производится с помощью бортовой вычислительной машины на основе анализа измерительной информации.

В работах <sup>1,2</sup> был дан пример построения алгоритма управления продольным движением аппарата. В работе <sup>3</sup> был построен алгоритм управления пространственным движением, обеспечивающий достижение заданной точки посадки как по дальности, так и по боку. В работе <sup>4</sup> был изложен алгоритм определения условий входа в атмосферу и расчета начальных условий для интегрирования системы навигационных уравнений, а также был проведен анализ влияния методических, инструментальных и исполнительных ошибок и разброса параметров атмосферы на работу алгоритма.

Алгоритм управления на участке первого погружения I, построенный и проанализированный в указанных работах, обеспечивал надежное приведение аппарата в конце участка свободного полета II в достаточно узкую область параметров, допускающую компенсацию получавшихся отклонений по дальности и боку при использовании ограниченных возможностей управления на участке второго погружения III (рис. I). Алгоритм оказался

достаточно стойким по отношению к ошибкам и к неспределенностям в знании распределения параметров атмосферы и обеспечивал управление практически во всем физически допустимом диапазоне высот перигея порядка  $\pm 15$  км.

Полученные результаты открыли путь к построению более совершенных алгоритмов. В частности, представлялось желательным вместо ступенчатой зависимости угла крена  $\gamma$  от времени получать непрерывную зависимость, которая точнее могла бы быть реализована при движении аппарата около центра масс. Представлялось также желательным учесть ограничения на величину управляющего момента при развороте по крену и произвести учет времени, необходимого для переработки измерительной информации и получения решения об изменении угла крена. Настоящая работа является продвижением в указанном направлении.

2. Логика принятия решения. Остановимся вначале на алгоритме, который был построен в предположении, что переработка информации происходит мгновенно. Затем покажем, как был проведен учет времени вычислений, необходимых для принятия решения.

Разобьем промежутки времени в пределах участка первого погружения на интервалы постоянной длины. Будем предполагать, что решение об управлении принимается в моменты перехода с одного интервала на другой, что мгновенные изменения угла крена на конечную величину невозможны и что в пределах одного временного интервала скорость изменения угла крена  $\dot{\gamma}$  постоянна. Зависимость  $\gamma(t)$  будет представлять собой ломаную линию, точки излома которой совпадают с границами временных интервалов.

Примем также, что изменение  $\dot{\gamma}$  при переходе через границу интервала ограничено определенными пределами, именно

$$|\dot{\gamma}_{i+1} - \dot{\gamma}_i| \leq \Gamma \quad (2.1)$$

Такое предположение моделирует ограниченность управляющих моментов по крену. Величина  $\Gamma$  моделирует приращение угло-



вой скорости, которое можно получить при действии управляющих моментов в течение одного временного интервала. В принятой модели импульсы сообщаются мгновенно в моменты перехода через границы интервалов.

Полученная зависимость  $\gamma(t)$  близка к движению по крену, которое может быть фактически реализовано аппаратом при действии ограниченных по величине управляющих моментов.

В каждый момент принятия решения величина  $\gamma$ , а следовательно, и углы крена на ближайший предстоящий временной интервал выбираются из условия, что вместе с углами крена в оставшееся время движения на участке первого погружения будет обеспечена необходимая дальность полета. Подобно тому, как это было принято в работах I-4, проводится двукратное интегрирование уравнений движения вперед от момента принятия решения до конца участка первого погружения, на основании результатов которого можно определить как величину дальности, получающуюся при выборе некоторого значения  $\gamma$  на ближайший интервал, так и величину влияния на дальность изменений в выборе  $\gamma$ . Эти данные позволяют вычислить необходимое значение  $\gamma$ .

Логике принятия решения оказалось целесообразным принять различную на начальном этапе движения вплоть до момента, близкого к достижению максимума скоростного напора, и на оставшейся части участка первого погружения. Опишем некоторые из числа рассмотренных вариантов логики и приведем доводы в обоснование принятого варианта.

Одним из простейших может явиться вариант, когда изменение угла крена задается по тем или иным соображениям вне пределов ближайшего интервала ( $t_i, t_{i+1}$ ), на котором  $\gamma$  выбирается из условия получения требуемой дальности. В конце ближайшего интервала допускается разрыв  $\gamma$  (рис. 2). Поскольку в точке  $t_i$  скачка не допускается, повторное применение алгоритма в точке  $t_{i+1}$  и т.д. дает зависимость  $\gamma(t)$  в виде ломаной. Однако допущение разрыва в конце интервала приводит к появлению нежелательных пилообразных изменений  $\gamma(t)$ .

Этого можно избежать, если производить выбор не одного, а одновременно двух ближайших звеньев ломаной, как это показано на рис.3. Начало первого из подбираемых звеньев определяется значением  $\gamma$ , имеющимся к моменту  $t_i$ , конец второго звена определяется условием непрерывного сопряжения с принятой уже зависимостью  $\tilde{\gamma}(t)$  после момента времени  $t_{i+2}$ . Значение  $\gamma$  в момент  $t_{i+1}$  определяется выбором  $\tilde{\gamma}$  на первом интервале и меняется при его изменении. Для всех допустимых значений  $\tilde{\gamma}$  на первом интервале рассматриваемые зависимости  $\gamma(t)$  являются непрерывными функциями. Использование описанного двухзвенника позволило избавиться от пилообразности.

Рассмотрение рис.3 показывает, что если бы все условия, при которых принималось решение в точке  $t_i$ , сохранились и в дальнейшем, и построенный двухзвенник не противоречил условию (2.1), то в момент  $t_{i+1}$  первое звено нового двухзвенника совпало бы со вторым звеном предыдущего, а второе звено совпало бы с участком принятой зависимости  $\tilde{\gamma}(t)$  для последующих значений времени, т.е. был бы осуществлен переход на  $\tilde{\gamma}(t)$  с помощью двухзвенника, найденного в точке  $t_i$ . Это означает, в частности, что если бы мы отклонились по каким-то причинам от заданной зависимости  $\tilde{\gamma}(t)$ , то через два временных интервала мы снова вернулись бы на нее. Это означает также, что если в качестве  $\tilde{\gamma}(t)$  взята любая ломаная из числа допустимых, то в процессе регулирования угол  $\gamma$  выйдет на нее и будет ее отслеживать.

В действительности из-за незнания истинного распределения плотности атмосферы условия принятия решения меняются от точки к точке, и указанный процесс в чистом виде не происходит. Кроме того в зависимости от обнаруживаемого по ходу полета характера изменения плотности атмосферы целесообразно производить изменение  $\tilde{\gamma}(t)$ . Тем не менее алгоритм, использующий логику двухзвенника, оказался достаточно эффективным и был принят первоначально на второй части участка первого погружения.

Применение двухзвенника на первой части движения ока-

залось недостаточно удачным, т.к. стремление обеспечить выбор параметров двухзвенника в условиях малой эффективности и ее последующего увеличения по мере роста скоростного напора приводит к необходимости сильного варьирования параметрами двухзвенника, в результате чего процесс регулирования оказывается не имеющим достаточной плавности. В условиях же падающей эффективности использование двухзвенника оказывается вполне целесообразным.

На первой части движения оказалось удобным варьировать более протяженный интервал изменения угла крена, состоящий из участка постоянного значения угла  $\gamma$ , охватывающего несколько временных интервалов, одного звена, выводящего на этот участок от имеющегося значения угла  $\gamma$  в точке  $t_i$ , и участка вынужденной вариации дальнейшего хода  $\gamma$  (рис.4) для обеспечения непрерывности сопряжения с  $\tilde{\gamma}(t)$ . Варьированное положение функции  $\gamma(t)$  показано пунктиром. По мере продвижения к области максимальных скоростных напоров участок постоянного  $\gamma$  выбирается все короче, и происходит достаточно плавное сопряжение описанной логики с логикой двухзвенника.

Для повышения способности алгоритма бороться с неопределенностью в распределении плотности оказалось целесообразным несколько уменьшить временные интервалы и чаще производить принятие решения. В этом случае протяженность временной базы двухзвенника может оказаться недостаточной, что приведет к сильному возмущению его параметров и нарушению плавности регулирования, подобно тому, как это имело место при использовании двухзвенника на первом участке движения до зоны наибольших скоростных напоров. Для преодоления этой трудности оказалось удобным несколько модифицировать логику двухзвенника, увеличив вдвое протяженность обоих его звеньев. В принятой схеме каждое из звеньев двухзвенника составляло по два временных интервала. После прихода в точку  $t_{i+1}$  (рис.5) происходило построение нового двухзвенника с той же временной протяженностью звеньев, но сдвинутого на один временной интервал, и т.д.

Логика первого этапа движения на участке первого по-

гружения также оказалось целесообразным несколько модифицировать за счет того, что звено, выводящее на участок постоянства  $\gamma$ , выбиралось равным двум временным интервалам, а пересмотр решения производился после прохождения каждого интервала.

При решении краевой задачи о достижении заданной дальности может оказаться, что скачок угла наклона получится больше, чем это возможно согласно ограничению (2.1). В этом случае выбирались предельно возможные для рассматриваемого интервала значения  $\gamma$ .

Для управления дальностью полета достаточно иметь возможность изменять угол  $\gamma$  в диапазоне от 0 до  $\pi$ . При  $\gamma = 0$  вся подъемная сила направлена вверх, при  $\gamma = \pi$  — вниз. При промежуточных значениях  $\gamma$  вертикальная проекция подъемной силы имеет промежуточное значение. В частности, при  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  составляющая подъемной силы в плоскости продольного движения равна нулю, и продольное движение подобно движению аппарата без подъемной силы.

В процессе регулирования может происходить выход угла крена на верхний ( $\gamma = \pi$ ) и на нижний ( $\gamma = 0$ ) упор и пребывание на нем в течение некоторого времени. Для того, чтобы избежать при выходе на упор возникновения изломов, превышающих ограничение (2.1) было предусмотрено ограничение на величину  $\dot{\gamma}$ , обеспечивающее плавный выход на упор.

Для эффективного преодоления неопределенности знания параметров атмосферы в процессе полета проводился анализ отклонения плотности от некоторого стандартного распределения. Используя кинематические параметры движения, получаемые интегрированием системы навигационных уравнений на основе начальных условий и текущих значений компонент ускорений от аэродинамических сил, можно вычислить в каждый момент движения величину плотности  $\rho$  и величину

$$\xi = \frac{\rho}{\rho_{ст}},$$

дающую отношение фактической плотности в данной точке к ее значению из принятого стандартного распределения. Вдоль дви-



жения величина  $\xi$  окажется некоторой функцией времени, поведение которой в прошлом будет известно в каждый момент времени. Предполагая, как и в работах I-4, что  $\xi$  является достаточно гладкой функцией координат, получим, что зависимость  $\xi(t)$  вдоль движения также будет достаточно плавной, допускающей экстраполяцию вперед на небольшой интервал времени. Использование такой экстраполяции оказалось полезным при проведении интегрирования уравнений движения вперед в процессе принятия решения.

Сведения о возможном характере изменения  $\xi(t)$  в ближайшем будущем использовались также при выборе  $\tilde{\gamma}(t)$  вне пределов того интервала времени, на котором подбор  $\gamma$  производился из условия обеспечения заданной дальности. Таким образом можно было обеспечить адаптацию и резервирование запаса управляемости для преодоления отклонений плотности, появление которых, судя по ходу функции  $\xi(t)$ , можно было ожидать в ближайшем будущем.

Исходная зависимость  $\tilde{\gamma}(t)$  принималась в виде ломаной линии, представленной на рис.6. Участок постоянного значения  $\gamma = \ell$  сопрягается наклонной линией с другим участком постоянного значения, принимаемого первоначально равным  $\frac{\pi}{2}$ . Моменты изломов  $t_1$  и  $t_2$  выбираются заранее и фиксируются. При варьировании  $\ell$  в процессе решения краевой задачи наклонный участок также варьировался, как это показано на рис.6 пунктиром. При переходе от одного временного интервала к другому длина варьлируемого участка естественно убывает. Вблизи момента  $t_1$ , происходит переход на логику двухзвенника или ее модифицированный вариант.

Адаптация производится путем внесения изменений в положение участка кривой  $\tilde{\gamma}(t)$  после точки  $t_2$ . Величина  $m$  (рис.6) вычислялась по формуле

$$m = \frac{\pi}{2} + \Delta \tilde{\gamma}, \quad (2.2)$$

где второе слагаемое, так же как и в работах I-4, определялось по формуле



$$\Delta \tilde{y} = f(t) [A \dot{\xi} + B \ddot{\xi}], \quad (2.3)$$

где  $A$  и  $B$  — подбираемые экспериментально константы,  $\dot{\xi}$  и  $\ddot{\xi}$  — значения первой и второй производной функции  $\xi(t)$ , вычисляемые в момент принятия решения по многочлену, аппроксимирующему ход  $\xi(t)$  на некотором интервале времени, предшествующем этому моменту,  $f(t)$  — некоторая функция времени, равная нулю до зоны максимальных скоростных напоров, потом линейно возрастающая и после достижения заданного значения остающаяся постоянной. Параметры функции  $f(t)$  подбирались экспериментально. Соображения, приводящие к введению адаптации такого типа, подробно обсуждались в работах 1,2.

3. Учет времени переработки информации. В предшествующем изложении предполагалось, что расчеты, связанные с переработкой измерительной информации и принятием решения производятся мгновенно. Отведем на выполнение расчетов один временной интервал. Будем считать, что все расчеты, связанные с выбором управления, производятся на основе информации, полученной к началу интервала. Одновременно с этими расчетами проводится интегрирование уравнений навигационной задачи и накапливается информация о ходе функции  $\xi(t)$ , однако эти данные используются только в следующем акте принятия решения на следующем временном интервале. Между концом поступления информации для принятия решения и началом исполнения решения имеется запаздывание, равное одному временному интервалу.

Можно провести учет запаздывания внесением небольших изменений в алгоритм, логика которого была описана в предыдущем разделе. Именно, будем считать, что вся логика сохраняется, но выбор  $y$  на ближайшем временном интервале происходит на основе информации, полученной к моменту на один временной интервал раньше. Чтобы войти в логику алгоритма без запаздывания, нужно произвести досчет величин за один

временной интервал. Значения функции  $\xi(t)$  получим экстраполяцией. Пересчет координат и компонент скорости получим интегрированием уравнений движения на один интервал, используя экстраполированные значения  $\xi(t)$ . Величины, входящие в формулу для добавки к функции  $\tilde{f}(t)$ , также получим путем экстраполяции. После такого пересчета все происходит так же, как если бы указанные данные были получены из решения навигационной задачи на основе измерений, проведенных на временном интервале, отведенном в данном случае для выполнения расчета.

Такой подход оказался удобным, т.к. позволил достаточно просто исследовать влияние запаздывания небольшой модификацией алгоритма, построенного без учета запаздывания.

Принятое допущение, что на временном интервале, отведенном для принятия решения, никакая поступающая измерительная и навигационная информация не может быть использована, является весьма простым и удобным для построения алгоритма. Вместе с тем результаты, полученные при этом допущении, дают верхнюю оценку отрицательного влияния запаздывания, поскольку информация, поступившая за время расчета, могла бы в принципе частично использоваться, что положительно сказалось бы на свойствах алгоритма управления.

4. Результаты моделирования. Отработка и испытание алгоритма проводились на цифровой вычислительной машине. Компоненты аэродинамического ускорения вычислялись интегрированием системы уравнений, имитирующих движущийся объект. В эти уравнения вводились отклонения параметров атмосферы от стандартного распределения и те решения по выбору угла крена, которые вырабатывались алгоритмом управления. Алгоритм управления, реализованный в виде программного комплекса, воспринимал информацию от имитирующих уравнений как измерительную, проводил интегрирование системы навигационных уравнений, осуществлял прогнозирование движения, решение краевой задачи, адаптацию, прогнозирование функции  $\xi(t)$  и производил другие действия, предусмотренные логикой его работы, вырабатывая решение об изменении угла

крена на ближайший временной интервал.

В качестве возмущений параметров атмосферы был использован тот же набор отклонений, который был применен при отработке предыдущих алгоритмов и описан в работах <sup>2</sup> и <sup>3</sup>. Эти возмущения имитируют как вариации распределения плотности по вертикали, так и вариации вдоль трассы полета. Величина их видимо несколько превышает вариации, которые могут иметь место в реальном полете, и алгоритм, способный их успешно преодолевать, будет иметь некоторый запас надежности.

Некоторые результаты моделирования представлены на рис.7 и далее. Жирной ломаной линией представлено изменение угла крена  $\gamma$  во время полета на участке первого погружения. Отсчет времени ведется от точки с высотой 150 км. Включение алгоритма происходит в момент, когда интеграл от перегрузки достигает некоторой заданной величины. Вначале, в зоне, где эффективность еще не велика, управление не ведется, и угол устанавливается равным значению  $\gamma_0$ , выбираемому в зависимости от высоты условного перигея. После прохождения интервала времени, принятого равным 45 сек, вступает в действие логика прогнозирования и принятия решения. Тонкой сплошной линией представлена зависимость  $\xi(t)$ , формирующаяся вдоль траектории полета. Пунктиром дана по времени величина  $m$ , равная высоте правой полочки на фиг.6. Эта величина меняется в зависимости от хода функции  $\xi(t)$  согласно формулам (2.2) и (2.3).

Видим, что для варианта, изображенного на рис.7, протекание  $\gamma$  вначале достаточно спокойное. Обнаруживающаяся тенденция к отклонению плотности в сторону увеличения парируется уменьшением угла  $\gamma$  и ростом компоненты подъемной силы, влияющей на продольное движение. Возрастание  $\xi(t)$  довольно быстро прекращается и сменяется убыванием. В предвидении такой ситуации производится заблаговременный переход к возрастанию  $\gamma$  и направлению подъемной силы аппарата вниз с целью воспрепятствовать вылету аппарата из атмосферы до того, как его скорость бу-

дет в достаточной степени заторможена.

Быстрое изменение ситуации в отношении хода функции  $\xi$  требует весьма быстрого реагирования. Вследствие принятых ограничений на величину скачка  $\gamma$  и наличия временного интервала, отделяющего момент поступления информации от момента принятия решения, в системе имеется некоторая инерционность, уменьшающая быстроту реакции. Резкое изменение хода  $\xi(t)$  приводит к выходу угла  $\gamma$  на верхний упор, где он и остается до конца движения на участке первого погружения. Имевшее место запаздывание с поворотом всей подъемной силы аппарата вниз приводит к тому, что несмотря на принятые меры, аппарат выходит на участок свободного полета с избытком скорости, и точка входа в атмосферу на участке второго погружения оказывается сдвинутой в сторону перелета на 210 км. Такое отклонение может быть без труда компенсировано управлением на участке второго погружения, т.к. находится глубоко внутри допустимого диапазона отклонений.

Отметим, что вариант, представленный на рис.7 явился наиболее тяжелым из всех рассмотренных вариантов отклонений в распределении плотности атмосферы. Данная вариация распределения плотности оказалась трудной для отработки в частности потому, что после резкого изменения хода  $\xi(t)$  происходит уменьшение плотности по сравнению со стандартным. Вследствие этого располагаемый запас воздействия подъемной силы аппарата на его движение оказывается недостаточным. Как показали расчеты, столь же крутые переходы от убывания функции  $\xi(t)$  к возрастанию оказались значительно более легко преодолимыми.

Остальные рассмотренные варианты отклонений плотности привели к отклонениям дальности точки входа, значительно меньшим, чем вариант, представленный на рис.7. В тех случаях, когда процесс регулирования заканчивался не на упорах, отклонение по дальности было обычно в пределах нескольких десятков километров и определялось в основном точностью интегрирования вперед при решении краевой задачи.

Графики на рис.8 показывают, что более плавный, чем



на рис.7, ход функции  $\xi(t)$  при переходе от возрастания к убыванию хотя и влечет кратковременный выход угла крена на упор, но процесс регулирования завершается во внутренней области и обеспечивает высокую точность в положении точки входа для участка второго погружения.

Более продолжительное пребывание на упоре имеет место для варианта, представленного на рис.9, однако в конце движения происходит сход с упора.

На фиг.10 приведен вариант отклонений плотности, характерный тем, что отклонения происходят в основном в сторону повышения плотности. Довольно быстрая перемена в ходе  $\xi(t)$  от убывания к возрастанию приводит к выходу на нижний упор, который отвечает использованию всей располагаемой подъемной силы для возможно более быстрого выхода из атмосферы с тем, чтобы предотвратить излишнее гашение скорости и связанное с этим отклонение точки входа в сторону недолёта. В результате своевременного выхода на упор недолет получился незначительным.

На рис.11 весь процесс регулирования протекает без выхода на упоры. Отклонение по дальности мало. Видно, как протекание функции  $\xi(t)$  влияет на величину параметра адаптации  $\gamma$  и на ход угла крена.

На рис.12 представлен вариант, где интенсивное убывание  $\xi$  привело к выходу на верхний упор на некоторое время. Отклонение по дальности также весьма мало.

Результаты моделирования показали, что разумным выбором параметров алгоритма, можно сделать его достаточно стойким по отношению к вариациям распределения плотности и обеспечить в точке входа на участок второго погружения надежное приведение аппарата в область параметров, обеспечивающую возможность эффективного решения задачи управления полетом на втором погружении и посадку аппарата в заданном районе с высокой точностью.



ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Е.Охоцимский, Г.И.Бельчанский, А.П.Бухаркина, Ю.Ф.Голубев, Н.И.Золотухина, Ю.Н.Иванов. Оптимальное управление при входе в атмосферу. Космические исследования, т.VI, вып.I, 1968г.
2. Д.Е.Охоцимский, А.П.Бухаркина, Ю.Ф.Голубев, Ю.Н.Иванов. Управление продольным движением при входе космического аппарата в атмосферу. Отчет ИПМ АН СССР, 1967 г.
3. А.П.Бухаркина, Ю.Ф.Голубев, Д.Е.Охоцимский. Управление пространственным движением при входе космического аппарата в атмосферу. Отчёт ИПМ АН СССР, 1968 г.
4. Ю.Ф.Голубев. Определение условий входа в атмосферу и анализ влияния погрешностей. Отчет ИПМ АН СССР, 1968 г.

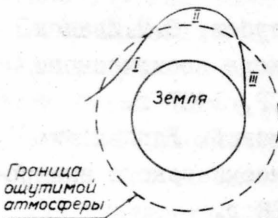


Рис. 1. Общий вид траектории спуска в атмосфере

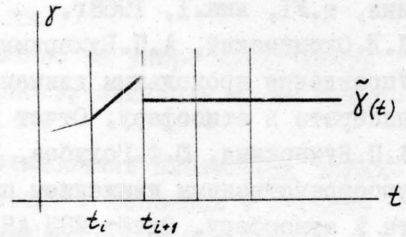


Рис. 2

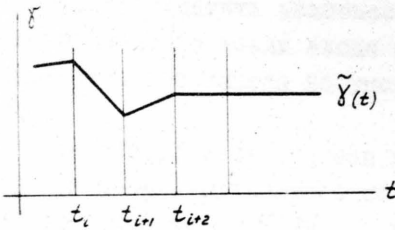


Рис. 3

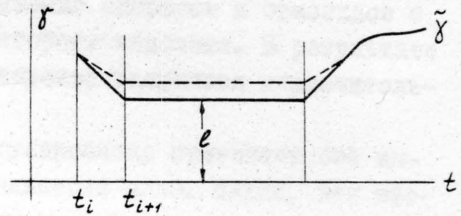


Рис. 4

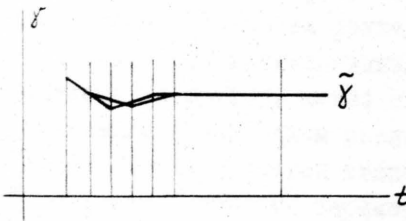


Рис. 5

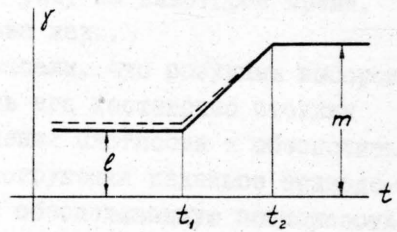


Рис. 6

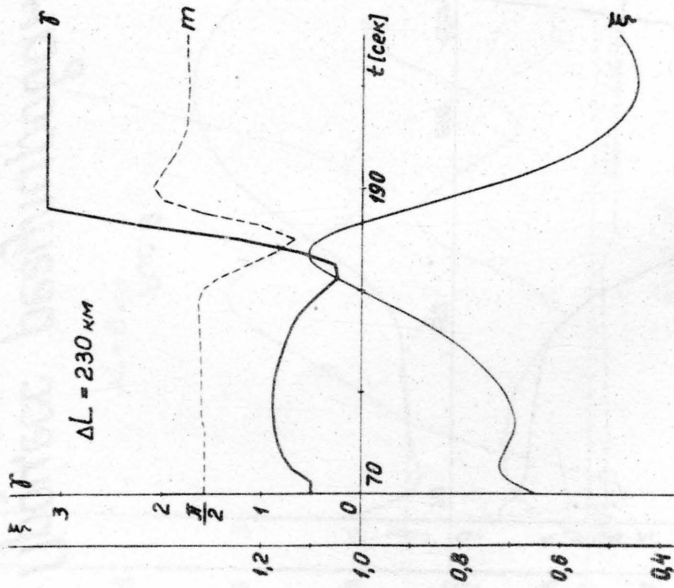


Рис. 7

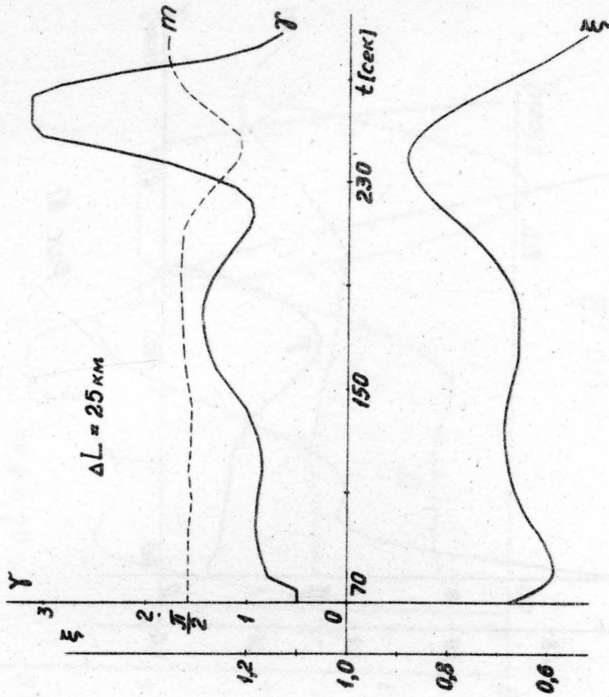


Рис. 8

Процесс регулирования. Высота перегиба 47 км.

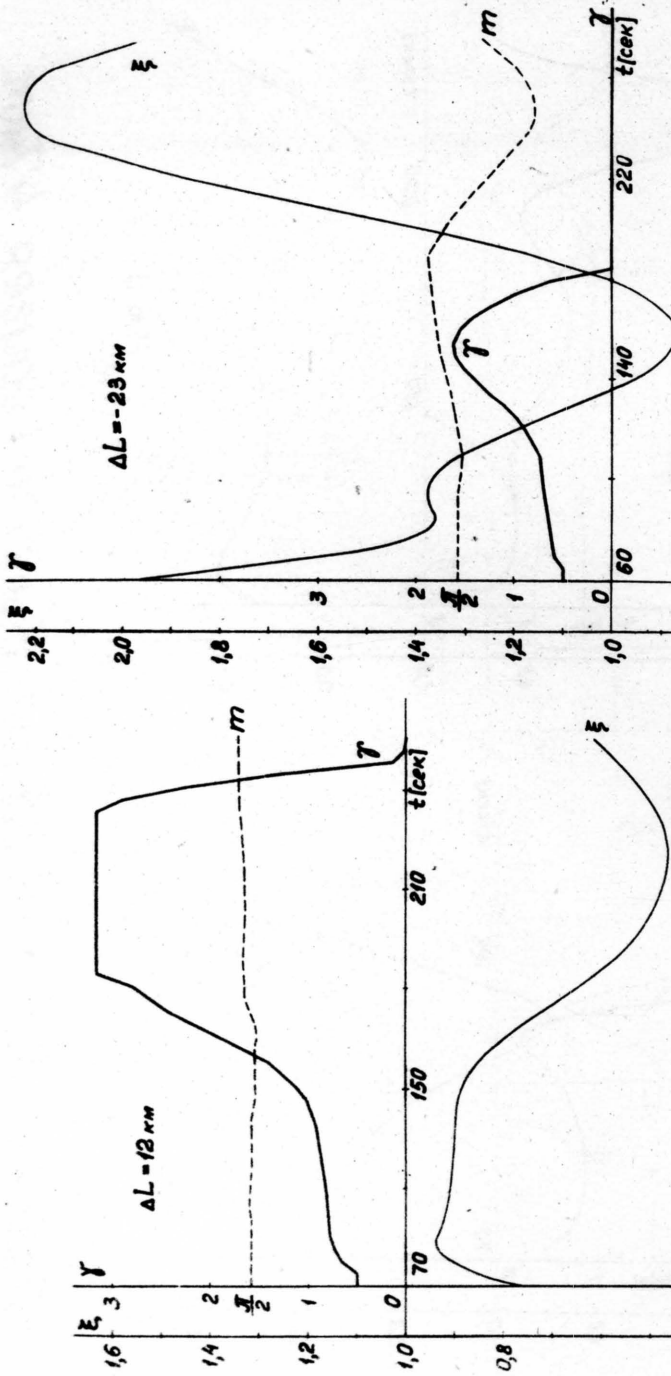


Рис. 9

Рис. 10

Процесс регулирования. Высота перегиба 47 км.

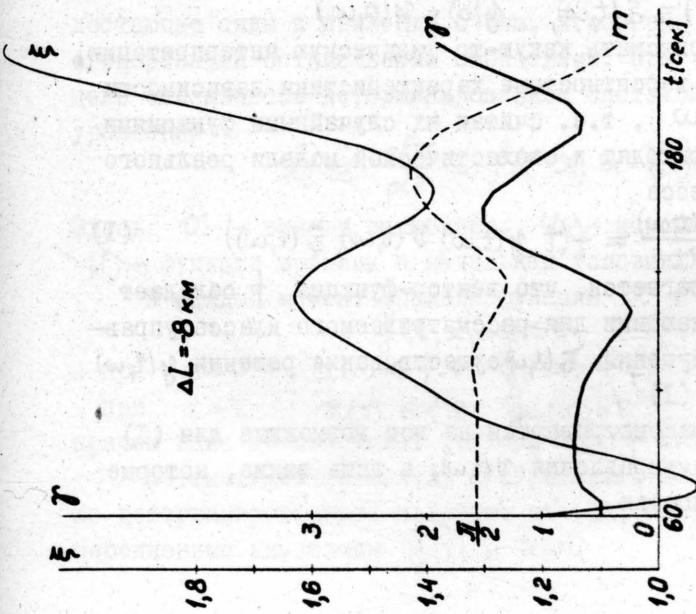


Рис. 11

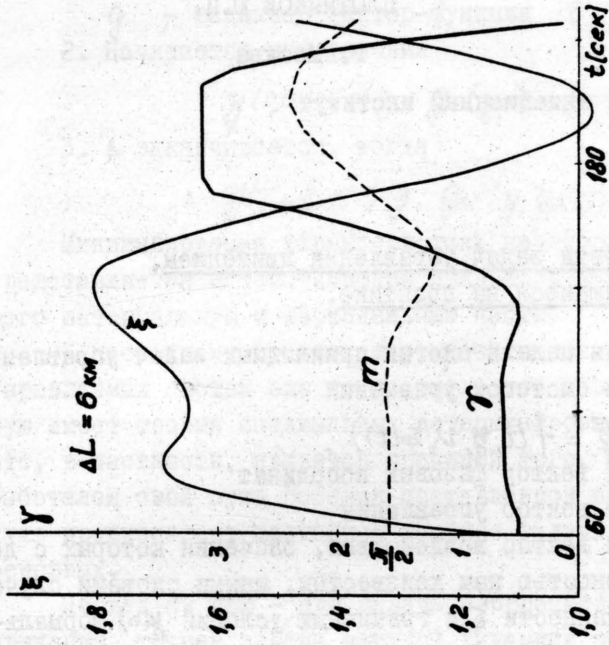


Рис. 12

Процесс регулирования: Высота перигея 47 км.



# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ РАКЕТОДИНАМИКИ

ПЛОТНИКОВ Ю.П.

г. Москва

Московский авиационный институт  
СССР

## § I. Постановки задач управления движением, встречающиеся на практике.

Математическая модель многих прикладных задач управления движением задается системой уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, v, \xi(t))$$

$y$  -  $n$  - мерный вектор фазовых координат

$v$  -  $m$  - мерный вектор управления

$\xi$  -  $r$  - мерный вектор воздействий, значения которых с достоверностью нам неизвестны, иными словами случайны.

Утверждение о случайности  $\xi$  и граничных условий  $y(0)$  формально сводится к зависимости  $\xi$  и  $y(0)$  от "случая"  $\omega$ .

$$\xi(t) = \xi(t, \omega), \quad y(0) = y(0, \omega)$$

Здесь  $\omega$  может допускать какую-то физическую интерпретацию, либо нет. Задавая вероятностные характеристики зависимости  $\xi(t)$  и  $y(0)$  от  $\omega$ , т.е. считая их случайными функциями или величинами, приходят к стохастической модели реального управляемого процесса

$$\frac{dy(t, \omega)}{dt} = f(t, y(t, \omega), v(t, \omega), \xi(t, \omega)) \quad (I)$$

Здесь предполагается, что вектор-функция  $f$  обладает свойствами, допускающими для рассматриваемого класса управлений  $v(t, \omega)$  и возмущений  $\xi(t, \omega)$  существование решения  $y(t, \omega)$  системы уравнений (I).

На практике рассматриваются не все возможные для (I) траектории  $y(t, \omega)$  и управления  $v(t, \omega)$ ; а лишь такие, которые с заданной вероятностью

1. Принадлежат к области

$$\bar{g}(t, y, v) \leq 0 \quad (2)$$

$\bar{g}$  - заданная вектор-функция  $t, y$  и  $v$ .

2. Начинается при условии

$$y(q\omega) \in \{y: \bar{g}_n(y, \xi(0)) = 0\} \quad (3)$$

3. А заканчивается, когда

$$y(\tau, \omega) \in \{y: \bar{g}_k(y, \xi(\tau)) = 0\} \quad (3')$$

Минимизируемая характеристика качества движения обычно представляется математическим ожиданием функционала, включающего интегральную и терминальные части.

К настоящему времени теория оптимизации стохастических управляемых систем еще не достигла той завершенности, которую имеет теория оптимальных детерминированных систем. И это, в частности, является причиной того, что на практике выработался свой путь решения поставленной выше проблемы. Этот путь предполагает поэтапное решение задачи, разбивая ее на две основных.

Первая из них - это задача программирования оптимальных движения, точнее задача частной динамики объекта управления, где частично заданы и силы и движение, требуется найти недостающие силы и движение с тем, чтобы оно обладало заранее оговоренными оптимальными свойствами. При этом физическая модель описывается детерминированной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(t, x, u, \xi) \quad (4)$$

Здесь  $x$  - вектор состояния,  $u$  - искомый вектор управления,  $\xi$  - функция времени и начальных условия.

В каждый момент времени функции  $x$  и  $u$  таковы, что

$$\bar{g}(t, x, u) \leq 0$$

а при  $t=0$   $x(0) \in \{x: \bar{g}_n(x) = 0\}$

при  $t=\tau$   $x(\tau) \in \{x: \bar{g}_k(x) = 0\}$

причем одна из координат вектора  $x(\tau)$  - оптимизируется.

Математическую модель программного движения (как правило детерминированную) получают из (1), заменив  $\bar{g}(t, \omega)$  и  $y(q\omega)$  осредненным значением  $\bar{g}(t)$  и  $x(0)$ .

Рассмотрение первой задачи принадлежит сфере интересов ученых и инженеров той области динамики, к которой данный объект относится.

Процесс, рассматриваемый в первой задаче по своему построению отличается от первоначального. Причиной этому является как иные начальные условия, так и разница в величине правых частей уравнений движения в каждый момент времени.

Смысл рассмотрения первой задачи состоит в том, что, зная ее решение  $x(t), u(t)$  фактическое движение можно представить в виде

$$y = x(t) + z, \quad v = u(t) + w, \quad \xi(t, \omega) = \bar{\xi}(t) + \xi^*(t, \omega)$$

Возмущенное движение  $(z, w)$  определяется как

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(t, y, v, \xi(t, \omega)) - f(t, x(t), u(t), \bar{\xi}(t)) = \\ &= A(t)z + B(t)w + C(t)\xi^*(t, \omega) + R(t, z, w, \xi^*) \end{aligned} \quad (5)$$

причем

$$\begin{aligned} g(t, x(t) + z, u(t) + w) &= g^0(t, z, w) \leq 0 \\ z(0, \omega) \in \{z: g_*(x(0) + z, \bar{\xi}) = 0\} &= \{z: g_*(z, \bar{\xi}^0) = 0\} \end{aligned} \quad (6)$$

а в конце движения с некоторой вероятностью

$$z(t, \omega) \in \{z: g_*(x(t) + z, \xi(t, \omega)) = 0\} = \{z: g_*(z, \xi^*) = 0\}$$

Правая часть (5) есть разложение в ряд Телора, поэтому матрицы  $A, B$  и  $C$  имеют вид

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f(t, y, v, \xi)}{\partial y} \Big|_{y=x(t), v=u(t), \xi=\bar{\xi}} \\ B(t) &= \frac{\partial f(t, y, v, \xi)}{\partial v} \Big|_{y=x(t), v=u(t), \xi=\bar{\xi}} \\ C(t) &= \frac{\partial f(t, y, v, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{y=x(t), v=u(t), \xi=\bar{\xi}} \end{aligned}$$

Обычная линейная модель возмущенного движения получается, если в (5) можно пренебречь остатком  $R$ .

Вторая основная задача формулируется для системы (5). Она состоит в определении закона  $W$  преобразования информации о возмущенном движении с тем, чтобы выбранное управление  $w(t, z)$  наилучшим образом гасило это движение, причем  $w(t, z)$  может зависеть явно лишь от измеренных координат процесса.

## § 2. Недостатки общепринятых постановок задач

Специалист по регулированию, призванный указать метод и средства фактической реализации программного движения, относится к нему как к данному, что находит, в частности, свое отражение в представлении возмущенного движения в виде (5), где матрицы  $A, B$  и  $C$  — функции времени. Такими они становятся лишь после построения программного движения в виде ( $x = x(t), u = u(t)$ ), причем система уравнений (4), которая определяет эти  $x(t)$  и  $u(t)$ , не несет в себе никакой информации о будущем возмущенном движении.<sup>1,2</sup>

Этот уже ставший в литературе каноническим подход к решению исходной задачи связан с необходимостью упрощения уравнений движения (I), для того, чтобы получить ответ при наших ограниченных вычислительных и алгоритмических возможностях. Вместе с тем раздельное рассмотрение первой и второй задач и вносимое с этим огрубление исходной системы (I) имеет следствием неадекватность ее свойств свойствам нашей дифференциальной модели (4-5).

Причина неадекватности, в частности, состоит в пренебрежении связи между задачей выбора программного ( $x, u$ ) и проблемой управления возмущенным движением ( $z, w$ ). Но связь, причем двусторонняя имеет место независимо от того является ли ( $x(t), u(t)$ ) решением некоторой вариационной задачи, или они выбраны по каким-либо <sup>иным</sup> соображениям.

С одной стороны взаимозависимость проявляется в том, что свой конкретный вид система (5) принимает лишь на решениях системы (4), когда матрицы  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial u}$  и  $\frac{\partial f}{\partial z}$  становятся известными функциями времени, соответствующими конкретным  $y = x(t), u = u(t), z = z(t)$ . Тем самым все свойства возмущенного движения, такие как управляемость, стабилизируемость и их количественные эквиваленты находятся в явной зависимости от выбора  $x$  и  $u$ .<sup>3</sup>

Приемлемость же программного движения определяется в значительной степени той точностью, с которой данное движение может быть реализовано при заданной структуре управления возмущенным движением. Чтобы сразу выбрать программное движе-

ние, экстремальное в каком-либо смысле и удовлетворяющее ограничениям точности, необходимо совместное рассмотрение систем (4) и (5). Это же диктуется и необходимостью обособленного выделения в области, определяемой неравенством (2) подобластей изменения координат программного и возмущенного движений. В первую очередь это касается области изменения  $V(t)$  векторов управления  $u$  и  $w$ . Необходимо вектор выбирать так, чтобы множество  $V(t) - u(t)$  было достаточно содержательным, если мы хотим, чтобы задача управления возмущенным движением, в частности, его оптимизация имела смысл.

### § 3. Некоторые новые постановки задач управления движением

Сказанное позволяет считать целесообразным не фиксировать управление программного движения при описании возникающего в его окрестности возмущенного движения. Для этого наряду с системой уравнений возмущенного движения необходимо рассматривать и систему уравнений программного движения, тем самым реформулировать задачи, поставленные для исходной системы уравнений (I) нижеприведенной системе

$$\dot{x} = f(t, x, u, \bar{\xi}) \quad (7)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial f(t, y, v, \bar{\xi})}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial v} w + \frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi}^0(t, w) + R \quad (7')$$

$(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial v})$  и  $\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}}$  вычислены при  $y=x$ ,  $v=u$  и  $\bar{\xi} = \bar{\xi}$  при этом

$$g(t, x+z, u+w) \leq 0 \quad (8)$$

$$x(0) \in \{x: \bar{g}_\mu(x) = 0\}; \quad x(\tau) \in \{x: \bar{g}_\mu(x) = 0\} \quad (9)$$

$$z(0, w) \in \{z: g_\mu(x(0) + z, \bar{\xi}) = 0\} \quad (10)$$

$$z(\tau, w) \in \{z: g_\mu(x(\tau) + z, \bar{\xi}) = 0\} \quad (11)$$



$T - T_n$  - разница временных интервалов существования возмущенного и программного движения, обусловленная неодновременностью выполнения условий конца движениями.

Прежде всего обратим внимание на те задачи, где определено управление возмущенным движением  $w(t, z)$  и требуется найти такое программное управление  $u(t)$ , с которым в системе (7) достигалось минимальное (или максимальное) значение одной из координат вектора  $x(t_n)$  при условии, что с заданной вероятностью выполнены (8-9) и (10-11). Взаимной данной проблеме является следующая: выбрать управление в программном движении (7), так, чтобы при соблюдении (8)-(10) максимизировалась вероятность события (11).

В этой формулировке задача определения управления в программном движении (4) является новой, не встречающейся ни при построении программного, ни стабилизации возмущенного движений. Практический прообраз такой задачи встречается в первую очередь там, где управление возмущенным движением  $w(t, z)$  в силу ограниченности состава измеряемых в процессе движения величин допускает существование наряду с компенсируемыми этим управлением возмущениями, также и некомпенсируемых. В уменьшении влияния последних и заключена практическая ценность такой постановки задачи.

Достижение поставленных выше целей возможно не только выбором программного управления  $u(t)$ . Допустимо считать  $w(t, z)$  заданным не полностью, а лишь структурно, например,

$$w(t, z) = K(t) \dot{z}$$

$\dot{z}$  - измеряемая часть вектора  $z$ .

Для определения управления  $w$  нам необходимо задать матрицу  $K(t)$ , причем ее выбор совместно с управлением  $u(t)$  позволяет достичь желаемых целей в этой постановке исходной задачи.

Если не ограничиваться заданной структурой управления в возмущенном движении, то решение поставленной задачи (максимизация вероятности события (II) при выполнении остальных ограничений на систему (7)), означает совместное нахождение как  $u(t)$  - управления по программной траектории, так и

синтеза управления  $W(t, z)$  в возмущенном движении, т.е. нахождение его как функции времени и измеряемых координат.

В задачах ракетодинамики те из них, где очевидна необходимость совместного исследования систем программного и возмущенного движений (причем последнее является стохастическим), составляет круг проблем, которые можно назвать стохастическими задачами ракетодинамики.

Путь, на котором мы ищем решение подобных стохастических задач, опираясь на основную лемму, изложенную в <sup>4</sup>.

#### § 4. Достаточные условия абсолютного минимума стохастических систем.

Отправную точку данного направления можно найти в работе <sup>4</sup>. Полученные нами результаты<sup>X</sup> справедливы для широкого класса случайных процессов  $\xi(t, \omega)$ . Пределы ему оговариваются ниже.

Пусть правые части системы (I) или (7)

$$\dot{y}(t, \omega) = f(t, y(t, \omega), v(t, \omega), \xi(t, \omega)) \quad t \in [0, T]$$

где  $\xi(t, \omega)$  — случайная вектор-функция, заданная на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ , удовлетворяет при фиксированном управлении  $v$  ( $m$ -мерный вектор) условиям, определяющим  $y(t, \omega)$  как  $n$ -мерный случайный процесс. В момент  $T$  нам известен, вычисленный на решениях системы, функционал

$$\begin{aligned} J &= M \left[ \int_0^T f^0(t, y(t, \omega), v, \xi(t, \omega)) dt + F(y(T, \omega), y(0, \omega)) \right] = \\ &= \int_0^T M f^0(t, y(t, \omega), v, \xi(t, \omega)) dt + M F(y(T, \omega), y(0, \omega)) \end{aligned} \quad (I2)$$

Здесь функции  $F(y(T, \omega), y(0, \omega))$  и  $f^0(t, y(t, \omega), v, \xi(t, \omega))$  интегрируются на  $\Omega$  и  $\Omega \times [0, T]$  соответственно для встречающихся ниже функций  $y$ ,  $v$  и  $\xi$ . <sup>5,6</sup>

Управление  $v$ , вектор-функция  $y(t, \omega)$  в каждый момент времени принадлежат некоторым множествам  $Q(t, y)$  и  $B(t)$  пространств  $R_m^0$  и  $R_n^0$  (см. (2), (3)) или (8)–(II)). Совокупность "пар" вектор-функций  $y(t, \omega)$  и  $v(t, \omega)$ , удовлетворяющую дифференциальным связям и отмеченным ограничениям обозначим че-

X/ Эти результаты составляют часть совместной работы автора с В.Ф. Кротовым.

рез<sup>x</sup>/D.

Поставим задачу: на множестве  $D$  "пар"  $y(t, \omega), v(t, \omega)$  найти такую, на которой функционал  $J$  имел бы наименьшее значение. (если эта пара в классе  $D$  отсутствует, необходимо искать минимизирующую последовательность  $(y_n(t, \omega), v_n) \in D$ , на которой  $J_n \rightarrow \inf_D J > c > -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

Лемма позволяет заменить задачу минимизации функционала  $J$  на множестве  $D$  аналогичной задачей на более широком множестве  $E$  независимых пар вектор-функций  $(y(t, \omega), v)$ , удовлетворяющих всем поставленным выше условиям, кроме уравнения (I).<sup>4</sup>

Введем в рассмотрение функционал

$$\varphi[t, y(\omega)], \quad y(\omega) \in R_n^\infty, \quad t \in [0, T]$$

дифференцируемый по  $t$ , а также имеющий ограниченную непрерывную производную Гато  $D_y \varphi$  для произвольной случайной величины  $y(\omega)$  из  $R_n^\infty$ .<sup>8</sup>

Положим 
$$R[t, y(\omega), v(\omega)] = \frac{\partial \varphi[t, y(\omega)]}{\partial t} + D_y \varphi[t, y(\omega)] \cdot f(t, y(\omega), v, \xi) - M f^0(t, y(\omega), v, \xi(t, \omega)) \quad (I3)$$

$$\bar{\Phi}[y(0, \omega), y(t, \omega)] = M F(y(0, \omega), y(t, \omega)) + \varphi[T, y(t, \omega)] - \varphi[0, y(0, \omega)] \quad (I4)$$

Теорема А. Пусть имеется "пара" функций  $\bar{y}(t, \omega), \bar{v}(t, \omega)$  тогда, для того, чтобы эта пара минимизировала функционал  $J$  на  $D$ , достаточно существования такого функционала  $\varphi[t, y(\omega)]$  с упомянутыми свойствами, что

$$1. \quad R[t, \bar{y}(t, \omega), \bar{v}] = \sup_{y(\omega) \in B(t), v \in Q} R[t, y(\omega), v] = m(t) \quad (I5)$$

$$2. \quad \bar{\Phi}[\bar{y}(t, \omega), \bar{y}(0, \omega)] = \inf_{y(t, \omega), y(0, \omega)} \bar{\Phi}[y(t, \omega), y(0, \omega)] = \lambda \quad (I6)$$

$y(t, \omega), y(0, \omega)$  принадлежат множествам (3)<sup>xx</sup>.

Когда абсолютная минималь в  $D$  не существует, то условия 1 и 2 определяющие минимизирующую последовательность  $(y_n(t, \omega), v_n)$ , совпадут с приведенными, если заменить знак равенства на символ:  $\xrightarrow[\text{при } n \rightarrow \infty]{\text{не}}$

х/ мы указываем здесь функцией каких "параметров" является управление, ибо в каждом случае это определяет свой класс  $D$ . В этом общем случае нам важно лишь указание на то, что при  $t \in [0, T]$   $v$  принадлежит заданному множеству.

xx/ Теорема справедлива в том случае, когда  $y(\omega)$  и  $v(\omega)$  являются элементами банахова пространства

Для доказательства теоремы определим на множестве  $E$  функционал

$$L = MF(y(t, \omega), y(0, \omega)) + \varphi[T, y(t, \omega)] - \varphi[0, y(0, \omega)] - \int_0^T \left\{ \frac{\partial \varphi[t, y(\omega)]}{\partial t} + D_y \varphi[t, y(\omega)] \times f(t, y(\omega), v, \xi) - M f^0(t, y, v, \xi(t, \omega)) \right\} dt \quad (I7)$$

Этот функционал является продолжением на множество  $E$  функционала  $J$ , определенного на  $D$ . Действительно, на  $D$  в силу (I) и того, что при этом

$$\begin{aligned} d\varphi[t, y(t, \omega)] &= \left[ \frac{\partial \varphi[t, y(t, \omega)]}{\partial t} + D_y \varphi[t, y(t, \omega)] \times f(t, y(t, \omega), v, \xi(t, \omega)) \right] dt \\ L &= MF(y(t, \omega), y(0, \omega)) + \varphi[T, y(t, \omega)] - \varphi[0, y(0, \omega)] - \\ &\quad - \int_0^T [d\varphi[t, y(t, \omega)] - M f^0(t, y(t, \omega), v, \xi(t, \omega))] dt = J \end{aligned}$$

Если существует функционал  $\varphi$  и пара  $\bar{y}(t, \omega)$  и  $\bar{v}$ , удовлетворяющие условиям 1 и 2 теоремы, тогда из (I5) - (I7) следует, что эта пара минимизирует  $L$  на  $E$ , а тогда по лемме и функционал  $J$  на  $D$ .

Обратим внимание на тот случай, когда  $y(t, \omega)$  и  $v \in L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ , то есть когда допустимое управление и соответствующий ему  $(\in D)$  вектор  $y(t, \omega)$  являются случайными векторами (для каждого  $t \in [0, T]$ ), с суммируемыми по мере  $P(\cdot)$  квадратами координат. Пусть и  $\xi(t, \omega) \in L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ ,  $t \in [0, T]$ . Тогда при тех же условиях на правые части системы (I), которые обеспечивали существование у (I) решения  $y(t, \omega)$ ,  $f(t, y(t, \omega), v, \xi(t, \omega)) \in L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$  для  $t \in [0, T]$ . А так как линейный функционал в  $L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$  есть интеграл по мере  $P(\cdot)$ , то

$$\begin{aligned} D_y \varphi[t, y(\omega)] \times f(t, y(\omega), v, \xi(t, \omega)) &= \\ &= \int_{\Omega} \varphi^y(t, y(\omega), \omega) f(t, y(\omega), v(\omega), \xi(t, \omega)) P(d\omega) \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi^y(t, y(\omega), \omega) \in L_2(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ ,  $\varphi^y$  - вектор-строка. Условия теоремы А, накладывая ограничения на  $\varphi$  и  $f$  на минимали  $(\bar{y}(t, \omega), \bar{v}(t, \omega))$ , доставляют достаточно широкий произвол в задании функционала  $\varphi[t, y(\omega)]$  вне ее. Это позволяет для решения задач выбирать наиболее подходящий алгоритм.

Остановимся на двух из них.

К первому алгоритму приходим, если потребовать от  $R[t, y(\omega), v(\omega)]$  удовлетворения тождественно некоторым условиям в области  $[0, T] \times B(t) \times Q$  — это аналог формализма Гамильтона-Якоби-Беллмана для детерминированного случая.<sup>4</sup>

Если ограничиться выполнением условий теоремы только на искомой минимали, то придем к аналогу формализма Лагранжа. Как и там задачу сводим к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных (но уже стохастических) уравнений.

### § 5. Аналог формализма Гамильтона-Якоби-Беллмана.

#### Системы линейные относительно фазовых координат

Пусть здесь и далее область изменения  $y(t, \omega)$  для  $t \in (0, T]$  открыта и  $\mathcal{P}[t, y(\omega)] = \sup_{v \in Q} R[t, y(\omega), v] = \frac{\partial \Phi[t, y(\omega)]}{\partial t} +$   
 $+ \sup_{v \in Q} \int_0^T [\Psi^y(t, y(\omega), \omega) f(t, y(\omega), v, \xi) - f^0] \pi(d\omega)$  (18)

Подберем  $\Phi[t, y(\omega)]$  так, чтобы  $\mathcal{P}$  не зависело от

$$y(\omega), \quad \text{т.е.} \quad \mathcal{P}[t, y(\omega)] = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sup_v \int_0^T [\Psi^y f - f^0] \pi(d\omega) = C(t)$$

$C(t)$  — функция времени. Тогда  $\mathcal{P}[t, y(\omega)] = \mu(t)$  для

любого  $y(\omega)$

Если при  $\bar{v} = \bar{v}[t, y(\omega)]$   $R[t, y(\omega), \bar{v}]$  имеет супремум в точке  $t, \bar{y}(\omega)$ :

$$R[t, \bar{y}(\omega), \bar{v}] = \mathcal{P}[t, \bar{y}(\omega)] \quad (19)$$

то решение системы (I) —  $\bar{y}(t, \omega)$  в паре с  $\bar{v}$  принадлежит  $D$ , удовлетворяя условию теоремы А. Для соблюдения второго условия достаточно потребовать, чтобы при  $t = T$   $\Phi$  не зависела от  $y(\omega)$ , т.е.

$$\Phi[\dots, y(T, \omega)] = \text{const} \quad (20)$$

Примером применения вышеизложенного могут быть системы линейные относительно фазовых координат.

Пусть правые части системы (I) имеют вид

$$\dot{y} = A(t, \omega)y + h(t, \omega, v) \quad (21)$$



$$\dot{f}^0 = a^0(t, \omega) \dot{y} + h^0(t, \omega, \dot{y}), \quad F=0 \quad (22)$$

Здесь  $A$  - матрица,  $a^0$  и  $h$  - векторы,  $h^0$  - скалярная функция.

Считая пределы изменения управления зависящими только от  $t$ , найдем минимум функционала

$$\text{Для нашего функционала } J \text{ имеет вид } \dot{S}[t, y(\omega)] = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_{\Omega} [\psi^* A - a^0] y(\omega) P(d\omega) + \mathcal{L}(t), \quad \mathcal{L}(t) = \sup_{y \in Q(t)} \int_{\Omega} [\psi^* h - h^0] P(d\omega) \quad (23)$$

Чтобы удовлетворить системе (I), требуется подобрать функционал  $\varphi[t, y(\omega)]$  так, чтобы функционал  $\dot{S}[t, y(\omega)]$  не зависел от  $y(\omega)$ .

$$\text{Пусть} \quad \varphi[t, y(\omega)] = \int_{\Omega} \psi(t, \omega) y(\omega) P(d\omega) \quad (24)$$

$$\text{тогда} \quad \dot{S}[t, y(\omega)] = \int_{\Omega} \left( \frac{d\psi(t, \omega)}{dt} + \psi A - a^0 \right) y(\omega) P(d\omega) + \mathcal{L}(t)$$

$$\mathcal{L}(t) = \sup_{y \in Q} \int_{\Omega} [\psi h - h^0] P(d\omega)$$

Задав вектор (строку) - функцию  $\psi(t, \omega)$  системой

$$\frac{d\psi(t, \omega)}{dt} + \psi A = a^0(t, \omega) \quad (25)$$

$$\psi(t, \omega) = 0 \quad (26)$$

получим, что  $\dot{S}[t, y(\omega)] = \mathcal{L}(t)$  не зависит от  $y(\omega)$  и  $\varphi[t, y(t, \omega)] = 0$  ( $\varphi[0, y(\omega, 0)] = \text{const}$ , так как  $y(\omega, 0)$  считаем заданной). Итак выполнены оба условия, наложенные на функционал в алгоритме Гамильтона. В данном случае построение функционала  $\varphi[t, y(\omega)]$  свелось к решению задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений.

## § 6. Аналог формализма Лагранжа

Допустим, что функционал  $\varphi[t, y(\omega)]$  дважды дифференцируем по Гато и вторая смешанная производная  $D_y \varphi_t[t, y(\omega)]$  непрерывна. Будем искать этот функционал совместно с минималью  $\bar{y}, \bar{v}$  из условия максимума  $R[t, y(\omega), v]$  по  $y$  и  $v$  на этой минимали.

Условие стационарности  $R$  и  $\Phi$  по  $y(\omega)$  в точке  $(\bar{y}(t, \omega), \bar{v})$  можно записать как равенство нулю линейной части приращения  $R$  для некоторого

$$y(t, \omega) = \bar{y}(t, \omega) + h(t, \omega), \quad h(t, \omega) \in L_2(\Omega, \mathcal{B}, P)$$

и достаточно малое, Именнно:  $D_t \Psi[t, \bar{y}] h + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}(t, \bar{y}, \omega) h + (t, \bar{y}, v, \xi) P(d\omega) + \right.$   
 $\left. + \int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial f}{\partial y} h + \Psi'(t, \bar{y}, \omega) \frac{\partial}{\partial y} f(t, \bar{y}, v, \xi) h \right] P(d\omega) = 0 \right.$

Обозначим

$$\Psi'(t, \bar{y}(t, \omega), \omega) = \Psi'(t, \omega),$$

тогда первые два члена равенства есть

$$\int_{\Omega} \Psi'(t, \omega) h(t, \omega) P(d\omega),$$

ибо в силу непрерывности второй смешанной производной

$$D_y \Psi_t = \frac{\partial}{\partial t} D_y \Psi.$$

Поэтому последнее равенство можно переписать так:  $\int_{\Omega} [\Psi'(t, \omega) +$

$$+ H_y(t, \bar{y}, v, \xi)] h P(d\omega) = 0, \quad H(t, \bar{y}(t, \omega), v, \xi) = \Psi(t, \omega) + f(t, \bar{y}(t, \omega), v, \xi) - f^0$$

В силу произвольности  $h(t, \omega)$  условие стационарности  $R$  по  $y(\omega)$  эквивалентно

$$\dot{\Psi}(t, \omega) - \Psi(t, \omega) f_y(t, \bar{y}(t, \omega), v, \xi(t, \omega)) = f_y^0 \quad \text{н.н.} \quad (27)$$

с таким граничным условием (условие стационарности  $\bar{\Phi}$  по  $y(t, \omega)$ , (если  $y(0, \omega)$  фиксирован),

$$\Psi(t, \omega) = -\frac{\partial}{\partial y} F(y(\omega))|_{t=\tau} \quad (28)$$

Поскольку  $\Psi_t[t, \bar{y}(t, \omega)]$ ,  $t \in [0, \tau]$  есть число, то супремум  $R[t, y, v]$  по  $v$  — условие определяющее оптимальное  $\bar{v}$  принимает вид  $\mathcal{H}[t, \bar{y}, \bar{v}] = \int_{\Omega} H(t, \bar{y}, \bar{v}, \xi) P(d\omega) =$

$$= \sup_v \int_{\Omega} H(t, \bar{y}, v, \xi) P(d\omega) = \sup_v \mathcal{H}[t, \bar{y}, v] \quad (29)$$

Когда при  $t = \tau$  заданы граничные условия на  $y(\tau, \omega)$ , например, такие

$$\int_{\Omega} G(y(\tau, \omega)) P(d\omega) = C, \quad (30)$$

то условие стационарности

$$M F(y(\tau, \omega)) + \Psi[\tau, y(\tau, \omega)]$$

при этом ограничении имеет вид

$$\Psi(\tau, \omega) = - \left[ \frac{\partial}{\partial y} F(y(\omega)) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} G(y(\omega)) \right]_{t=\tau} \quad (28')$$

$\lambda$  — изопериметрическая постоянная, определяемая равенством (30).

Если в окрестности экстремали  $(\bar{y}(t, \omega), \bar{v}(t, \omega))$   $\Psi[t, \bar{y}(\omega)]$  можно задать так, чтобы на самой экстремали имели место и достаточные условия максимума  $R[t, y(\omega), v]$  для  $t \in [0, \tau]$ , то данная экстремаль в силу теоремы А есть абсолютная минималь. Последнюю теорему можно реформулировать так:

**Теорема В.** Пусть совокупность вектор-функций  $\bar{y}(t, \omega), \bar{v}(t, \omega)$   $\Psi(t, \omega)$  есть результат решения системы (I), (27) и (29). Для того, чтобы экстремаль  $\bar{y}(t, \omega), \bar{v}(t, \omega)$  была абсолютной минималью

функционала  $\bar{J}$  достаточно существования функционала  $\Psi[t, y(\omega)]$  такого, что

1.  $\bar{J}^*(t, \bar{y}(t, \omega), \omega) = \Psi(t, \omega)$
2.  $R[t, \bar{y}(t, \omega), \bar{v}(t, \omega)] = \sup_{y, v} R[t, y(\omega), v], \quad t \in [0, T]$
3.  $\bar{\Phi}[\bar{y}(0, \omega), \bar{y}(T, \omega)] = \inf_{y(0, \omega), y(T, \omega)} \Phi[y(0, \omega), y(T, \omega)]$

### § 7. Линейная задача.

В качестве примера рассмотрим задачу минимизации функционала (22) для системы (I) и справа частями (23), причем начальный  $y(0, \omega)$  и конечный вектор  $y(T, \omega)$  фиксированы.

Воспользуемся теоремой В.

Решая систему (27) совместно с (I) и уравнением

$$\int_{\Omega} [\Psi(t, \omega) h(t, \omega, \bar{v}) - h^0(t, \omega, \bar{v})] p(d\omega) = \sup_{\bar{v}} \int_{\Omega} [\Psi(t, \omega) h(t, \omega, v) - h^0] p(d\omega) \quad (31)$$

при указанных граничных условиях, получим экстремаль  $\bar{y}(t, \omega), \bar{v}(t, \omega), \Psi(t, \omega)$ . Покажем, что эта экстремаль есть абсолютная минималь функционала  $\bar{J}$

Пусть

$$\Psi[t, y(\omega)] = \int_{\Omega} \Psi(t, \omega) y(\omega) p(d\omega)$$

тогда условие I теоремы В выполнено.

В этом же случае в силу (25) и (31)

$$\begin{aligned} R[t, \bar{y}(t, \omega), \bar{v}(t, \omega)] &= \int_{\Omega} \left[ \frac{d\Psi}{dt} + \Psi A(t, \omega) - \alpha^0 \right] y + \Psi h(t, \omega, \bar{v}) - h^0(t, \omega, \bar{v}) p(d\omega) = \\ &= \int_{\Omega} [\Psi h(t, \omega, \bar{v}) - h^0(t, \omega, \bar{v})] p(d\omega) = \sup_{y, v} R[t, y(\omega), v(\omega)], \end{aligned}$$

то есть выполнено и второе условие теоремы В.

### § 8. О возможности решения I-й и 2-й постановок

#### исходной задачи

Используем результаты § 6 (аналог формализма Лагранжа) для решения задачи, которую при необходимости можно считать эквивалентом первой или второй постановки исходной задачи (§ 3).

Зададим процесс на отрезке  $[0, T]$  системой

$$\dot{x} = f(t, x, u); \quad \dot{z} = Q(t, x, u)z + R(t, x, u)\xi(t, \omega) \quad (32)$$

Пусть  $x(0) = x_0$ , а также фиксированы значения части координат вектора  $x(T)$ .

Случайные воздействия  $z(q, \omega)$  и  $\xi(t, \omega)$  определены своими вероятностными распределениями.

Характеристика процесса:

$$P\{|a(x(t))z(t, \omega)| < c\}, \quad (33)$$

выбором  $u(t)$  будем максимизировать эту вероятность.

Заметим, что

$$P\{|a(z(t, \omega))| < c\} = - \int_{\Omega} F(a z(t, \omega)) P(d\omega)$$

где  $-F(p)$  — характеристическая функция отрезка

Эта функция в обычном смысле не дифференцируема, поэтому ее производную мы будем рассматривать как предел по  $-c \leq p \leq c$  производных функций  $F_k(p) \rightarrow F(p)$ . В связи с этим все соотношения, включающие производные этой функции следует рассматривать как предельные по  $k$

Теорема В позволяет искать оптимальные  $u(t)$  среди тех, которые максимизируют интеграл  $\mathcal{J}$ :

$$\int_{\Omega} \{ \Psi f + \mu [Q z(t, \omega) + R \xi(t, \omega)] \} P(d\omega)$$

при условии, что вектор (строки) — функции  $\Psi$  и  $\mu$  удовлетворяют системам уравнений:

$$\dot{\Psi}_j = - [ \Psi(t, \omega) f_{x_j} + \mu(t, \omega) (Q_{x_j} z(t, \omega) + R_{x_j} \xi(t, \omega)) ], \quad j=1, \dots, n \quad (34)$$

и  $\Psi_j(t) = - \frac{dF}{dp} \cdot \left( \frac{\partial a}{\partial x_j} z(t, \omega) \right)$  если координата  $x_j(t)$  не фиксирована.

$$\dot{\mu} = - \mu(t, \omega) Q(t, x, u), \quad \text{а } \mu(t, \omega) = - \frac{dF}{dp} a \quad (35)$$

Из последнего следует, что

$$\mu(t, \omega) = \frac{dF}{dp} \bar{\mu}(t),$$

где

$$\dot{\bar{\mu}} = - \bar{\mu} Q(t, x, u), \quad \bar{\mu}(t) = -a \quad (35')$$

Поэтому последний интеграл можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \Psi f + \frac{dF}{dp} \bar{\mu} (Q z + R \xi(t, \omega)) \} P(d\omega) = \\ & = \int_{\Omega} \Psi(t, \omega) P(d\omega) f + \bar{\mu} \left[ Q \int_{\Omega} \frac{dF}{dp} z(t, \omega) P(d\omega) + \right. \\ & \left. + R \int_{\Omega} \frac{dF}{dp} \xi(t, \omega) P(d\omega) \right] = \bar{\Psi}(t) f + \bar{\mu}(t) [Q \bar{z}_c(t) + R \bar{\xi}_c(t)] \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь

$$\bar{\Psi}(t) = \int_{\Omega} \Psi(t, \omega) P(d\omega)$$

$$\bar{z}_c(t) = \int_{\Omega} \frac{dF}{dP} z(t, \omega) P(d\omega) = \gamma(c) M \bar{z} |_{\alpha z(t, \omega) = c} = e^{-\gamma(-c)} M \bar{z} |_{\alpha z(t, \omega) = -c}$$

$$\bar{\xi}_c(t) = \int_{\Omega} \frac{dF}{dP} \xi(t, \omega) P(d\omega) = \gamma(c) M \bar{\xi} |_{\alpha z(t, \omega) = c} = e^{-\gamma(-c)} M \bar{\xi} |_{\alpha z(t, \omega) = -c}$$

В этих выражениях  $\gamma(c)$  и  $\gamma(-c)$  есть значение плотности распределения случайной величины  $\chi = \alpha z(t, \omega)$  для значений  $\chi = \alpha z(t, \omega) = c$  и  $\chi = -c$ .

Из (32) следует:

$$\dot{\bar{\Psi}}_j = [\bar{\Psi} f_{x_j} + \bar{p} (Q_{x_j} \bar{z}_c + R_{x_j} \bar{\xi}_c)], \quad j=1, \dots, n \quad (37)$$

$\bar{\Psi}_j(t) = -\frac{\partial a}{\partial x_j} \bar{z}_c(t)$ , если  $x_j(t)$  нефиксирован, а из уравнений процесса:

$$\dot{\bar{z}}_c = Q \bar{z}_c + R \bar{\xi}_c(t) \quad (38)$$

Итак, мы получим возможность вычислять компоненты гамильтониана (36), интегрируя детерминированную систему уравнений (35'), (37), (38) (граничные условия для них тоже неслучайны). Сложность ее интегрирования заключается в том, что нам не известны в правых частях (37) и (38) условные математические ожидания  $\bar{z}_c(0)$  и  $\bar{\xi}_c(t)$ , ибо их величина зависит от выбора управления  $u(t)$  на всем интервале движения.

Рассмотрим один из тех случаев, когда эту сложность можно преодолеть.

Пусть  $\xi(t, \omega) = \xi(\omega)$  и  $z(0, \omega) = z(0)$  — центрированные случайные векторы (представленный случай охватывает тот класс встречающихся на практике возмущений, когда их можно считать зависящими от некоторой конечной совокупности параметров — случайных величин), причем у совместного распределения  $z(0)$  и  $\xi$  линии уровня — гиперболы<sup>9</sup>. Тогда в силу линейности системы для  $\bar{z}$ ,  $\bar{z}_c$  и  $\bar{p}$  имеем:

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\alpha A(t), \quad \dot{\bar{z}}_c(t) = B(t) \bar{z}_c(0) + S(t) \bar{\xi}_c$$

Здесь  $A(t)$  и  $B(t)$  — фундаментальные системы решений (35') и (38) соответственно, причем  $A(0) = B(0) = E$ ;  $S(t)$  — матрица частных решений системы (38) при нулевых начальных условиях, здесь  $Q$ -тый столбец ее есть решение, которое соответствует воздействию  $Q$ -ой компоненты вектора  $\bar{\xi}$ . Далее в силу отмеченных свойств распределения

$$\bar{z}_{jc}(0) = \bar{z}_{jc}(t) |_{t=0} = \frac{2\gamma(c) B^j(t)}{\sqrt{\alpha B(t) B^j(t) \alpha + \alpha S(t) S^j(t) \alpha}}, \quad j=1, \dots, n$$

$$\bar{\xi}_{\ell c} = \frac{2\gamma(c) \alpha S^{\ell}(t)}{\sqrt{\alpha B(t) B^j(t) \alpha + \alpha S(t) S^j(t) \alpha}}, \quad \ell=1, \dots, m$$



Вследствие этого гамильтониан (36) равен

$$\bar{\Psi} f - \sum_{j=1}^n \frac{2\gamma(c) \alpha B^j(\tau)}{\sqrt{a B(\tau) B'(\tau) a' + a S(\tau) S'(\tau) a'}} \alpha A(t) Q B^j(t) - \\ - \sum_{\ell=1}^r \frac{2\gamma(c) \alpha S^\ell(\tau)}{\sqrt{a B(\tau) B'(\tau) a' + a S(\tau) S'(\tau) a'}} (Q S^\ell(t) + R^\ell).$$

Если положить

$$\bar{M}^j = -\bar{M}^j Q(t, x, u), \quad M^j(\tau) = -\frac{2\gamma(c) B^j(\tau) \alpha}{\sqrt{a B(\tau) B'(\tau) a' + a S(\tau) S'(\tau) a'}} \quad (39)$$

$$\dot{B}^j = Q(t, x, u) B^j, \quad B^j(0) = E^j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$S^\ell = Q(t, x, u) S^\ell + R^\ell(t, x, u), \quad S^\ell(0) = 0$$

$$\ell = 1, \dots, r \quad (40)$$

$$\dot{\theta}^\ell = -\theta^\ell Q(t, x, u), \quad \theta^\ell(\tau) = -\frac{2\gamma(c) \alpha S^\ell(\tau) \alpha}{\sqrt{a B(\tau) B'(\tau) a' + a S(\tau) S'(\tau) a'}}$$

$$\dot{\bar{\Psi}}_j = -\left[ \bar{\Psi} f_{x_j} + \sum_{i=1}^n \bar{M}^i Q_{x_j} B^i + \sum_{\ell=1}^r \theta^\ell [Q_{x_j} S^\ell + R_{x_j}^\ell] \right] \quad (41)$$

$$M^j(\tau) = -\frac{2\gamma(c) \frac{\partial Q}{\partial x_j} [B(\tau) B'(\tau) a' + S(\tau) S'(\tau) a']}{\sqrt{a B(\tau) B'(\tau) a' + a S(\tau) S'(\tau) a'}}, \quad j = 1, \dots, n$$

если  $\alpha_j(\tau)$  нефиксировано, то окончательное выражение (36) таково

$$\mathcal{H} = \bar{\Psi} f + \sum_{i=1}^n \bar{M}^i Q B^i + \sum_{\ell=1}^r \theta^\ell [Q S^\ell + R^\ell] \quad (35')$$

причем оптимальное управление максимизирует этот гамильтониан при каждом фиксированном  $t$ .

Сейчас мы ограничиваемся решением тех практических задач, математические модели которых соответствуют двум первым постановкам исходной. Их мы сводим к решению краевой задачи для системы (39)-(41), (36') и (32').<sup>10</sup>

## Л и т е р а т у р а

1. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, т. XXI № 4,5,6, т. XXIII № II
2. Летов А.М. Теория оптимальных систем. Труды II Конгресса ИФРАК. Изд. Наука, 1965 г.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. "Наука" 1968г.
4. Кротов В.Ф. Докторская диссертация, МАИ, 1963 г.
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, 1936 г.
6. Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Изд. Наука, 1965 г.
7. Зубов В.И. Теория оптимального управления. "Судо-строение", 1966 г.
8. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов, ЛИТН, 1956 г.
9. Пономарев В.М. Теория управления движением космических аппаратов, Изд. Наука, 1965 г.
10. Кожевников Ю.В. ПММ т. XXV № 4.

# СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ПО СТРУКТУРЕ СИСТЕМЫ

А.Я.Андрюенко

Институт автоматики и телемеханики  
(технической кибернетики)

Москва,  
СССР

## В в е д е н и е

При разработке бортовых систем автоматического управления космических объектов важное значение имеют требования надежности, выполнение которых облегчается в случае простых структурных схем систем управления. Поэтому синтез оптимальных систем целесообразно проводить с учетом ограничений, накладываемых на структуру. Можно указать три вида таких ограничений.

1. Ограничение по емкости памяти управляющего устройства.
2. Ограничение по числу устройств, воспроизводящих коэффициенты алгоритма работы управляющего устройства.
3. Ограничение по виду операций, которые могут быть реализованы в управляющем устройстве.

При разработке систем управления, использующих бортовую цифровую вычислительную машину (БЦВМ), проектировщики иногда стремятся реализовывать в этих системах законы управления, выбранные ранее для непрерывных систем. Эти законы обычно предусматривают формирование сигналов воздействия по мгновенным производным регулируемой координаты. В результате ужесточаются требования, предъявляемые к быстродействию БЦВМ и снижается эффект использования цифровой техники, особенно в случаях, когда регулируемые координаты измеряются

со случайными ошибками. А между тем БЦВМ позволяет на основе анализа предыстории процесса управления осуществить специфически дискретные алгоритмы формирования управления. Кроме того, становится возможным дополнительное повышение качества управления за счет оптимизации временной последовательности интервалов квантования импульсной системы.

В настоящей работе предлагаются статистические методы синтеза импульсных систем с учетом указанных выше ограничений. Эти методы излагаются применительно к системам терминального управления, к которым можно отнести ряд классических систем управления летательными аппаратами и их силовыми установками.

# 1. Постановка задачи синтеза импульсной системы управления с ограничением по емкости памяти управляющего устройства

Рассматривается объект управления, выходная координата которого измеряется в дискретные моменты времени. Считаются известными уравнения, описывающие объект, из которых могут быть получены конечно-разностные уравнения

$$\begin{aligned} x_{j(i+1)} &= F_{j(i+1)}(\bar{x}_i, \bar{V}, u_i) \\ (j &= 1, 2, \dots, N; i = 0, 1, \dots, I), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni})$  - вектор координат объекта в  $i$ -ый момент времени;

$\bar{V} = (V_1, V_2, \dots, V_R)$  - случайный вектор возмущений, действующих на объект;

$u_i$  - значение управляющей координаты.

Измеренное со случайной ошибкой  $f_i$  значение  $y_i$  выходной координаты  $x_i = x_{1i}$  объекта поступает на вход управляющего устройства. При этом

$$y_i = x_i + f_i \quad (i = 1, 2, \dots, I). \quad (2)$$

Управление должно удовлетворять неравенству вида

$$|u_i| \leq U_i \quad (i = 0, 1, \dots, I), \quad (3)$$

где  $U_i$  - предельно допустимое значение управления  $u_i$ .

Априорные плотности вероятности  $P(\bar{V})$ ,  $P(\bar{x}_0)$  векторов  $\bar{V}$  и  $\bar{x}_0$  полагаются заданными. Помехи - ошибки измерения  $f_i$  - представляют собой последовательность независимых случайных величин с известными плотностями распределения  $P(f_i)$ .

В качестве критерия оптимальности принимается функция риска

$$R = M[w(x_{I+1})]. \quad (4)$$

Задача состоит в определении алгоритма работы управляющего устройства системы, при котором достигается минимальное значение риска  $R$ , причем формирование очередного управления должно производиться с использованием ограниченного объема информации о ходе процесса управления так, чтобы управление являлось функцией вида

$$u_i = u_i(\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}) \quad (i=0, 1, \dots, I; j=i-n), \quad (5)$$

либо вида

$$\Delta u_i = \Delta u_i(\bar{y}_{ji}, \bar{\Delta u}_{j(i-1)}) \quad (i=0, 1, \dots, I; j=i-n). \quad (5a)$$

Здесь  $\bar{y}_{ji} = (y_1, y_2, \dots, y_i)$  - временной вектор координат системы, измеренных в дискретные моменты времени  $j, j+1, \dots, i$ ;

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1};$$

$\bar{u}_{ji} = (u_j, u_{j+1}, \dots, u_i)$  - временной вектор управления;

$\Delta u_{ji} = (\Delta u_{jj}, \Delta u_{j(j+1)}, \dots, \Delta u_{ji})$  - временной вектор приращения управления;

$$\Delta u_{ji} = u_i - u_{j-1}.$$

Ограничение по емкости памяти управляющего устройства осуществляется заданием числа  $n$ .

Алгоритм работы управляющего устройства, соответствующий (5a), оказывается удобным, в частности, для реализации, когда исполнительный орган системы является интегрирующим звеном, а алгоритм, соответствующий (5), в случае, когда исполнительным органом является повициснер.



## 2. Решение задачи синтеза с учетом ограни- чения по емкости памяти управляющего устройства

Введем в рассмотрение вектора  $\bar{V}_s = (\bar{V}, \bar{x}_s; u_s = 0)$ ,  $\bar{V}_s^{(a)} = (\bar{V}, \bar{x}_s, u_s)$ , называемые в дальнейшем векторами приведенных возмущений.

При формировании управления в  $i$ -ый дискретный момент времени на основании информации в ходе процесса управления на интервале времени наблюдения  $(j \div i)$  следует полагать известными функции, определяющие алгоритм работы управляющего устройства во все моменты времени  $S$ , предшествующие  $j$ -му  $(S = 0, 1, \dots, j)$ . Поэтому могут быть определены по априорным законам распределения вектора  $\bar{V}$  и помех  $\bar{f}_{1(s-1)} = (f_1, f_2, \dots, f_{s-1})$  плотности  $P(\bar{V}_s)$ ,  $P(\bar{V}_s^{(a)})$  вероятности векторов приведенных возмущений  $[I]$ .

Система уравнений (I), разрешенная относительно выходной координаты  $x_i$  при фиксированном векторе  $\bar{V}_s$  имеет вид:

$$x_{i+1} = \psi_{i+1}(\bar{V}_s, \bar{u}_{si})$$

$$(i = 0, 1, \dots, I; s = 0, 1, \dots, j; j = i - n), \quad (6)$$

а при фиксированном векторе  $\bar{V}_{s-1}^{(a)}$  вид:

$$x_{i+1} = \psi_{i+1}^{(a)}(\bar{V}_{s-1}^{(a)}, \bar{\Delta u}_{si})$$

$$(i = 0, 1, \dots, I; s = 0, 1, \dots, j; j = i - n). \quad (6a)$$

Введем также совокупность вспомогательных функций

$$\gamma_{sI}(\bar{y}_{sI}, \bar{u}_{sI}) = \int_{\Omega(\bar{V}_s)} w[\psi_{I+1}(\bar{V}_s, \bar{u}_{sI})] P(\bar{V}_s) \prod_{\ell=s}^I P(y_\ell / \bar{V}_s,$$

$$\bar{u}_{s(\ell-1)}) d\Omega(\bar{V}_s) \quad (s = 1, 2, \dots, I - n),$$

$$\gamma_{sI}^{(a)}(\bar{y}_{sI}, \bar{\Delta u}_{sI}) = \int_{\Omega(\bar{V}_{s-1}^{(a)})} w[\psi_{I+1}^{(a)}(\bar{V}_{s-1}^{(a)}, \bar{\Delta u}_{sI})] P(\bar{V}_{s-1}^{(a)}) \prod_{\ell=s}^I P(y_\ell / \bar{V}_{s-1}^{(a)},$$

$$\bar{\Delta u}_{s(\ell-1)}) d\Omega(\bar{V}_{s-1}^{(a)}) \quad (s = 1, 2, \dots, I - n).$$

Можно показать, что оптимальное в классе функций (5) управление  $u_i = u_i^*$  вычисляется при последовательной минимизации по  $u_I, u_{I-1}, \dots, u_i$  функций  $\gamma_{jI}, \gamma_{(j-1)(I-1)}, \dots, \gamma_{ji}$  ( $j = I-n$ ), так что

$$\gamma_{ji}^* = \min_{u_i \in \omega(u_i)} \gamma_{ji}(\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)}; u_i) \quad (i=0,1,\dots,I),$$

где  $\gamma_{ji} = \int \gamma_{ji}(\bar{y}_{jI}, \bar{u}_{ji}; u_{i+1}^*, u_{i+2}^*, \dots, u_I^*) d\Omega(\bar{y}_{(i+1)I}),$   
 $\Omega(\bar{y}_{(i+1)I})$

$\omega(u_i)$  — область допустимых по (3) управлений.

Оптимальное в классе функций (5а) приращение управления  $\Delta u_i = \Delta u_i^*$  вычисляется при последовательной минимизации по  $\Delta u_I, \Delta u_{I-1}, \dots, \Delta u_i$  функций  $\gamma_{jI}^{(a)}, \gamma_{(j-1)(I-1)}^{(a)}, \dots, \gamma_{ji}^{(a)}$  ( $j = I-n$ ), так что

$$\gamma_{ji}^{(a)*} = \min_{\Delta u_i \in \omega(\Delta u_i)} \gamma_{ji}^{(a)}(\bar{y}_{ji}, \Delta \bar{u}_{j(i-1)}; \Delta u_{j(i-1)} + \Delta u_i) \quad (i=0,1,\dots,I),$$

где  $\gamma_{ji}^{(a)} = \int \gamma_{ji}^{(a)}(\bar{y}_{jI}, \Delta \bar{u}_{ji}; \Delta u_{i+1}^*, \Delta u_{i+2}^*, \dots, \Delta u_I^*) d\Omega(\bar{y}_{(i+1)I}).$   
 $\Omega(\bar{y}_{(i+1)I})$

### 3. Оптимальная импульсная система управления с независимой идентификацией объекта

Приведенные выше соотношения не позволяют в общем случае получить в явном виде алгоритм работы управляющего устройства системы. Основные трудности определения управления оказываются теми же, что и при вычислении дуального управления при отсутствии ограничений на структуру.

Ограничиваясь рассмотрением задачи синтеза в постановке, определяемой соотношениями (1 ÷ 5), изложив способ построе-

ния субоптимальной системы управления, предполагающий отдельные функции изучения некоторых составляющих вектора приведенных возмущений от функции управления. Этот способ позволяет получать алгоритм работы управляющего устройства в явном виде.

Произведем разбиение координат вектора  $\bar{V}_j$  на две группы

$$\bar{V}_j = (\bar{V}_j^{(1)}, \bar{V}_j^{(2)})$$

Случайные векторы  $\bar{V}_j^{(1)}$  и  $\bar{V}_j^{(2)}$  различаются характером воздействия их на объект управления. Вектор  $\bar{V}_j^{(1)}$  состоит из таких составляющих вектора приведенных возмущений  $\bar{V}_j$ , действие которых на объект приводит к тому, что объект теряет свойство нейтральности [2]. Вектор  $\bar{V}_j^{(2)}$  включает все остальные составляющие, в присутствии которых, если нет возмущений из числа компонентов  $\bar{V}_j^{(1)}$ , объект остается нейтральным.

Заменяем объект управления, описываемый (6), его моделью, переменной в дискретном времени  $i$ :

$$x_{i+s} = \Psi_{i+s}(\bar{V}_{ji}^*, \bar{V}_j^{(2)}, \bar{u}_{j(i+s-1)})$$

$$(i = 0, 1, \dots, I; \quad s = 1, 2, \dots, I - i + 1; \quad j = i - n), \quad (7)$$

где  $S$  - в данном случае дискретное время "последней истории" процесса управления, отсчитываемой от момента времени  $i$ .

Здесь вектор  $\bar{V}_{ji}^*$  - оценка вектора  $\bar{V}_j^{(1)}$  - считается известным, по последовательно уточняемым на каждом интервале  $i$  в результате минимизации некоторой принятой функции риска

$$R_i^{(1)} = M\{w^{(1)}[\bar{V}_j^{(1)}, \bar{V}_{ji}^*(\bar{y}_{ji}, \bar{u}_{j(i-1)})]\} \\ (i = 0, 1, \dots, I).$$

Соответственно критерий оптимальности (4) заменяется последовательностью функций риска

$$R_i = M[w(x_{i+s})] = M[W(\bar{V}_{ji}^*, \bar{V}_j^{(2)}, \bar{u}_{jI})] \\ (i = 0, 1, \dots, I; \quad S = I - i + 1).$$

Модель (7) объекта управления относится к нейтральным объектам [2], и поэтому определение оптимального по риску  $R_i$  управления может быть проведено по изложенным в предшествующем разделе соотношениям достаточно просто. Полученная при этом функция управления  $u_i$  не зависит от функции изучения вектора  $V_j^{(i)}$  на интервалах  $i+1, i+2, \dots, I$ . Информация о величине  $V_j^{(i)}$  уточняется на  $(i+1)$ -ом интервале в результате наблюдения реакции реального объекта управления (6) на управление  $u_{(j+1)i}$  и минимизации функции риска  $R_{i+1}^{(i)}$  так, как это делается обычно при идентификации объекта. Поэтому реализованную по предложенному способу систему можно назвать системой управления с независимой идентификацией объекта.

#### 4. Замечание об интервалах квантования систем управления

Точность системы, оцениваемая функцией риска (4), при оптимальном управлении может быть повышена либо за счёт увеличения числа  $I$  интервалов квантования импульсной системы, либо за счёт оптимизации программы изменения во времени интервалов квантования. В некоторых случаях эффективность оптимизации программы изменения интервалов оказывается такой же, какая достигается при увеличении на несколько порядков числа  $I$  равных между собой интервалов.

Задача оптимизации программы изменения интервалов квантования формулируется как задача определения минимизирующих функцию риска (4) координат "управления" (интервалов), независимых от текущих значений координат импульсной системы. Каждое "управление", очевидно, должно быть положительно определенным, и в системах терминального управления сумма всех координат "управления" должна равняться заданной величине.

Решение этой задачи может быть получено на основе метода статистической оптимизации нелинейных импульсных автоматических систем [3]. Этот метод предусматривает замену исходной системы, находящейся под воздействием случайных возмущений, статистически эквивалентной системой, находящейся под

воздействием определенного сочетания возмущений. Статистически эквивалентная система имеет одинаковые с исходной координаты оптимального "управления", и к ней применим дискретный аналог принципа максимума.

5. Приближенный синтез систем с ограничением по числу устройств, воспроизводящих коэффициенты алгоритма управления

Постановка задачи синтеза оптимальной системы, определяемая условиями (1 ÷ 5), дополняется при учете ограничения второго вида заданием числа  $L$  максимально допустимых изменений коэффициентов алгоритма управления и заданием номеров  $i_k$  ( $i_1 = 0$ ;  $k = 1, 2, \dots, L$ ) интервалов, на которых разрешается проводить изменения коэффициентов.

Введем в рассмотрение  $L$  объектов управления с уменьшенными числами интервалов квантования, описываемыми уравнениями

$$x_{i+1}^{(k)} = \psi_{i+1}(\bar{v}_{jk}, \bar{u}_{jk i})$$

$$(k = 1, 2, \dots, L; i = j_k, j_k + 1, \dots, I; j_k = i_k - n), \quad (8)$$

полученными из (6) и находящимися под воздействием векторов возмущений  $\bar{v}_{jk} = (\bar{v}, \bar{x}_{jk}; u_{jk} = 0)$ , совпадающих с векторами приведенных возмущений в искомой системе. Для каждого объекта (8) определим оптимальную функцию управления  $u_i^{(k)} = u_i^{(k)}(\bar{y}_{ji}^{(k)}, \bar{u}_{j(i-1)}^{(k)})$  без учета ограничения второго вида. Если временная последовательность интервалов квантования является оптимальной для системы, построенной с учетом принятых ограничений по структуре, то оказывается, что искомая функция управления на интервалах ( $i_{k-1} \div i_k$ ) приближенно совпадает с оптимальной функцией управления объектом (8) на интервале  $i_k$ :

$$u_{i_k}(\bar{y}_{j_k i_k}, \bar{u}_{j_k(i_k-1)}) \equiv u_{i_k}^{(k)}(\bar{y}_{j_k i_k}^{(k)}, \bar{u}_{j_k(i_k-1)}^{(k)}). \quad (9)$$

Это управление практически может быть вычислено итерационными методами с использованием соотношений, приведенных



в предшествующих разделах. Погрешность приближенного решения (9) оценивается для типовых объектов потерей точности управления  $(0,05 - 0,15) \Delta R$ , где  $\Delta R = R - R^*$ ;  $R, R^*$  - значения функции риска при оптимальном управлении, определенном соответственно с учетом и без учета ограничения второго вида.

6. Постановка задачи синтеза системы управления с учетом ограничения по виду операций, которые могут быть реализованы в управляющем устройстве

Рассматривается объект управления, состоящий из последовательно соединенных нелинейной безынерционной части и линейной части объекта, находящейся под воздействием случайных возмущений. Выходная координата объекта измеряется в дискретные моменты времени  $l$ . Считается известной функция, описывающая нелинейную часть объекта:

$$v_l = v_l(u_l) \quad (l = 1, 2, \dots, I), \quad (10)$$

а также уравнения линейной части объекта, из которых могут быть получены конечно-разностные уравнения

$$x_{\nu(l+1)} = \sum_{\nu=1}^N a_{\nu l} x_{\nu l} + \sum_{\tau=1}^R b_{\tau l} v_{\tau} + c_l (1 + \delta c) v_l \quad (11)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, N; \quad l = 0, 1, \dots, I),$$

где  $v_l$  - значение выходной координаты нелинейной части системы,

$\delta c$  - случайное отклонение коэффициента  $c_l$ .

Полагаем, что априорные плотности  $P(\bar{V})$ ,  $P(\bar{x}_0)$ ,  $P(\delta c)$  и  $P(\bar{f}_{1,I})$  векторов  $\bar{V}$ ,  $\bar{x}_0$  величины  $\delta c$  и ошибок измерения  $\bar{f}_{1,I}$ , с которыми по способу (2) измеряется выходная координата, описываются нормальными законами распределения с нулевыми математическими ожиданиями.

В качестве критерия оптимальности примем функцию риска

$$R = M(x_{I+1}^2). \quad (12)$$

Учитывая особенности ЦВМ, целесообразно принять в качестве операций, которые могут быть реализованы в управляющем устройстве, алгебраические операции. Рассматривая вначале случай, когда дисперсия  $D_C$  величины  $\delta C$  равна нулю, будем определять минимизирующее риск (12) управление в классе линейных функций вида

$$u_i = \sum_{l=j}^i A_{jl} y_l + \sum_{l=j}^{i-1} B_{jl} v_l \quad (i=1,2,\dots,I; j=i-n). \quad (13)$$

Для случая, когда  $D_C \neq 0$ , поставим задачу приближенного определения оптимального управления в классе дробно-рациональных функций от измеренных координат  $\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}$ .

### 7. Решение задачи

Для линейной части объекта (II) уравнение (6) при  $D_C = 0$  имеет вид:

$$x_{i+1} = \sum_{q=1}^Q \alpha_{siq} V_{sq} + \sum_{l=s}^i \beta_{jl} v_l$$

( $i=1,2,\dots,I$ ;  $s=1,2,\dots,j$ ;  $j=i-n$ ),  
где  $V_{s1}, V_{s2}, \dots, V_{sQ}$  - координаты вектора приведенных возмущений  $\bar{V}_s$ .

Определяя условное математическое ожидание  $M(V_{jq}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)})$  как  $q$ -ый элемент столбца-матрицы  $|M(V_{jq}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)})|$ , вычисляемого по соотношению

$$|M(V_{jq}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)})| = |\alpha_{j\ell q}|^T |K_f|^{-1} |Z_\ell| \times (|K_V|^{-1} + |\alpha_{j\ell q}|^T |K_f|^{-1} |\alpha_{j\ell q}|)^{-1},$$

где  $|\alpha_{j\ell q}|$  - матрица коэффициентов  $\alpha_{j\ell q}$  ( $\ell=j, j+1, \dots, i$ ;  
 $q=1,2,\dots,Q$ ;  $\ell$  - номер строки,  $q$  - номер столбца)  
 $|K_f|$  - корреляционная матрица вектора  $\bar{f}_{ji}$ ,  
 $|K_V|$  - корреляционная матрица вектора  $\bar{V}_j$ ,  
 $|Z_\ell|$  - столбец-матрица, состоящий из элементов

$$Z_\ell = y_\ell - \sum_{k=j}^{\ell-1} \beta_{jk} v_k,$$

знак  $T$  - транспонирование, а  $(-I)$  - обращение матрицы,

получим, что величина  $M(x_{I+1}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}; \bar{v}_{iI}=0)$  является линейной функцией измеренных координат системы

$$M(x_{I+1}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}; \bar{v}_{iI}=0) = \sum_{q=1}^Q \alpha_{jIq} M(v_{jq}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}) + \\ + \sum_{\ell=j}^{i-1} \beta_{j\ell} v_{\ell} = \sum_{\ell=j}^i A_{j\ell}^* y_{\ell} + \sum_{\ell=j}^{i-1} B_{j\ell}^* v_{\ell}.$$

Можно показать, что искомые коэффициенты  $A_{j\ell}$ ,  $B_{j\ell}$  управления (I2) должны удовлетворять условиям

$$2A_{j\ell}^* M(y_{\ell}^2) + \sum_{\substack{k=j \\ k \neq \ell}}^i A_{jk}^* M(y_{\ell} y_k) + \sum_{k=j}^{i-1} B_{jk}^* M(y_{\ell} v_k) = \\ = -2\beta_{jI} M[v_i(u_i) y_{\ell}] \quad (\ell=j, j+1, \dots, i), \\ 2B_{j\ell}^* M(v_{\ell}^2) + \sum_{k=j}^i A_{jk}^* M(y_k v_{\ell}) + \sum_{\substack{k=j \\ k \neq \ell}}^{i-1} B_{jk}^* M(v_{\ell} v_k) = \\ = -2\beta_{jI} M[v_i(u_i) v_{\ell}] \quad (\ell=j, j+1, \dots, i-1). \quad (I4)$$

Корреляционные моменты, входящие в соотношения (I4), целесообразно вычислять с помощью ЭВМ, используя специальные методы оценки точности нелинейных систем [4]. Определение величин  $A_{j\ell}$ ,  $B_{j\ell}$  удовлетворяющих условиям (I4) может быть проведено итерационным методом.

В случае, когда  $D_c \neq 0$ , оптимальное в классе дробно-рациональных функций управление приближенно может быть определено из соотношения

$$u_i = K_i M(x_{I+1}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}; \bar{v}_{iI}=0; \delta c = \delta c^*),$$

где коэффициент  $K_i$  вычисляется из условия

$$-\beta_{jI} M[M(x_{I+1}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}; \bar{v}_{iI}=0; \delta c = \delta c^*) v_i(u_i)] = \\ = M\{[M(x_{I+1}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}; \bar{v}_{iI}=0; \delta c = \delta c^*)]^2\},$$

а  $\delta c^*$  представляет собой оценку величины  $\delta c$ , вычисленную из условия минимизации функции риска

$$R_{ci} = M\{[\delta c - \delta c^*(\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)})]^2\}.$$

Аналогичные результаты могут быть получены для случая, когда определяется оптимальное приращение управления в функции координат

### 8. Статистический синтез инвариантных импульсных систем с учетом ограничений по структуре

В ряде случаев точность системы, полученной при статистическом синтезе с учетом ограничений по структуре, оказывается недостаточно высокой сопоставительно с предельными точными возможностями системы, построенной без учета ограничений.

Повышение точности управления может быть достигнуто либо за счет ослабления требований по ограничению структуры, либо за счет использования принципа инвариантности при синтезе системы.

Будем полагать, что объект управления описывается уравнениями (I0) и (II). Поставим задачу определения линейной по координатам векторов  $\bar{y}_{ji}$ ,  $\bar{v}_{j(i-1)}$  функции управления, минимизирующей функцию риска (I2) при условии минимального влияния на риск  $R$  изменений параметров закона распределения группы возмущений  $V_1, V_2, \dots, V_r$  (т.е. при условии статистической инвариантности до  $\varepsilon$  значений координаты  $x_{I+1}$  относительно указанных возмущений).

Такое управление для первых  $r$  интервалов может быть определено из условия

$$M_i^* = \min_{u_i \in \omega(u_i)} [M_{i(I+1)}(x_{I+1}/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}; \bar{v}_{iI}=0) + v_i(u_i) \sum_{k=i}^I c_k] \quad (i=1, 2, \dots, r), \quad (I5)$$

где  $M_{iI}(x_e/\bar{y}_{ji}, \bar{v}_{j(i-1)}; \bar{v}_{i(i-1)}=0)$  - оценка величины  $x_e$ , вычисленная по априорной плотности

$$P(V_1, V_2, \dots, V_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{V}) dV_{r+1} dV_{r+2} \dots dV_R$$

величин  $V_1, V_2, \dots, V_r$ , а также по информации о процессе управления с первых  $i$  интервалов ( $i \leq r$ ); при вычислении этой оценки предполагается, что ошибки измерения на указанных интервалах, а также управления на следующих интервалах равны нулю.

Введем на интервале управления  $(r+1) \div (I+1)$  новую регулируемую координату

$$y_i^* = y_i - x_i^*,$$

где значения  $x_i^*$  вычисляются по соотношению

$$x_i^* = M_{ri}(x_i / \bar{y}_{j,i}, \bar{v}_{1(r-1)}; \bar{v}_{ri} = 0) + v_r^* \sum_{k=r}^{i-1} c_k,$$

а величина  $v_r^*$  определяется так, чтобы  $x_{I+1}^* = 0$ .

Тогда искомое управление  $u_i$  на интервалах  $i = r+1, r+2, \dots, I$  может быть определено из условия

$$M_i^* = \min_{u_i \in \omega(u_i)} \left\{ M(x_{I+1} / \bar{y}_{j,i}^*, \Delta \bar{v}_{j,i-1}; \Delta \bar{v}_{iI} = 0) + [v_i(u_i) - v_r] \sum_{k=i}^I c_k \right\}$$

$$(i = r+1, r+2, \dots, I; j_i = i - n + r),$$

где  $\Delta \bar{v}_{j,i} = (\Delta v_{rj_i}, \Delta v_{r(j_i+1)}, \dots, \Delta v_{ri})$ ,  $\Delta v_{rk} = v_k - v_r$ .

Здесь  $\omega(u_i)$  — область допустимых функций  $u_i$ , являющихся линейными относительно измеренных координат системы  $y_k^*, \Delta v_{rk}$ .

Условия (I5) и (I6) приводят к соотношениям типа (I4), которые могут быть решены итерационными методами.



Л и т е р а т у р а

1. В.С.Пугачев. "Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления". Физматгиз, 1962.
2. А.А.Фельдбаум. "Основы теории оптимальных автоматических систем". Физматгиз, 1963.
3. А.Я.Андрienко. "Метод статистической оптимизации нелинейных импульсных систем автоматического управления". Техническая кибернетика, № 4, 1967.
4. А.Я.Андрienко, Б.Н.Петров, Ю.П.Портнов-Соколов.  
"Оценка точности систем управления космических объектов". Труды II симпозиума ИФАК по управлению в космосе, сентябрь 1967.

# СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОРБИТОЙ СТАЦИОНАРНОГО ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

А.А.Лебедев, М.Н. Красильщиков, В.В. Малышев.

Московский авиационный институт

Москва

СССР

В настоящем докладе рассматривается решение технической задачи оптимизации процесса перевода стационарного искусственного спутника Земли (СИСЗ) в заданное положение с требуемой точностью при минимальных энергетических затратах.

Под СИСЗ понимается спутник, движущийся по 24-часовой экваториальной круговой орбите. Для наблюдателя, находящегося на Земле, такой спутник будет казаться неподвижным. Благодаря этому свойству спутник может быть использован для создания глобальной системы связи. В силу ряда технических причин спутник не может быть выведен непосредственно на заданную долготу. Для перевода СИСЗ на заданную долготу применяется метод блуждающего эллипса <sup>I</sup> (фиг. I), существо которого состоит в том, что спутник движется по эллиптической орбите с апогеем (перигеем) на высоте, соответствующей радиусу стационарной орбиты и периодом обращения, меньшим (большим) одних суток. За счет этого спутник будет дрейфовать в восточном (западном) направлении.

Характерной особенностью синтезируемой системы является очень высокая требуемая точность в конце процесса перевода. Достаточно указать, что допустимый дрейф СИСЗ за счет остаточных ошибок перевода не должен превышать величины порядка 2,5 градусов за два месяца. Повышенные требования к конечной точности приводят, с одной стороны, к необходимости построения системы управления по принципу обратной связи, реализуемой за счет измерения текущего углового положения (азимута)  $\alpha_u$  и дальности  $r_u$  СИСЗ в координатах измерительного пункта, а с другой, к необходимости учета при выработке алгоритма управления всевозможного рода помех, среди которых основную роль, с точки зрения конечной точности играют так называемые мультипликативные ошибки реализации корректирующих импульсов (последние обусловлены случайными отклонениями величины тяги двигателя от номинала. В связи с этим возникает задача

Определении алгоритма оптимальной коррекции движения СИСЗ. Так как на конечную точность и суммарные энергетические затраты, кроме алгоритма управления, влияет и начальная скорость выведения спутника, то представляет интерес и решение задачи об оптимальной расчетной скорости выведения спутника на высоту стационарной орбиты.

Сформулированная задача является задачей управления по неполным данным, и точное её решение в указанной постановке затруднительно. Поэтому применяется приближенный прием<sup>2</sup>, состоящий в том, что задача синтеза разбивается на две задачи, решаемые независимо. Первая состоит в оптимизации процесса перевода в предположении, что имеется вся необходимая для управления информация. Вторая задача состоит в получении этой информации путем оптимальной обработки данных измерений.

Предполагается, что движение СИСЗ происходит в экваториальной плоскости и в центральном поле тяготения Земли. В качестве возмущений учитываются начальные ошибки вывода, ошибки реализации корректирующих импульсов и ошибки измерения.

1. Введем в рассмотрение вектор фазовых координат СИСЗ  $x$ , составляющими которого являются:  $x_1$  - отклонение спутника от заданного положения по долготе в момент прохождения им апогея (перигея),  $x_2$  - скорость дрейфа, т.е. величина видимого смещения спутника по долготе за один оборот по орбите блуждающего эллипса. Уравнения движения спутника в терминах этих координат имеют следующий вид:

$$x_{i+1} = \Phi x_i + V(1 + \mu_i)u_i + V\epsilon_i, \quad (i=1, \dots, N), \quad (I)$$

где

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$x_i$  - вектор состояния  $x$  в момент  $i$ -го апогея,

$u_i$  - расчетная величина  $i$ -го корректирующего импульса скорости  $\mu_i$ ,  $\epsilon_i$  - соответственно мультипликативная и аддитивная составляющие ошибки управляющего воздействия,  $N$  - заданное число оборотов спутника по орбите блуждающего

эллипса. Предполагается, что  $\mu_i$  и  $\varepsilon_i$  случайные центрированные независимые гауссовы величины, причем

$$M[\mu_i^2] = \sigma_\mu^2, \quad M[\varepsilon_i^2] = \sigma_\varepsilon^2. \quad (3)$$

Математически задача отыскания алгоритма оптимальной коррекции формулируется следующим образом.

Требуется найти такую последовательность  $\{U_i\}$  ( $i=1, \dots, N$ ), которая обеспечивает требуемую конечную точность, характеризуемую риском

$$R_1 = M[x_{N+1}^T \lambda x_{N+1}] \quad (4)$$

при минимальных энергетических затратах, оцениваемых риском

$$R_2 = M\left[\sum_{i=1}^N U_i^2\right]. \quad (5)$$

Решение такой задачи было получено в <sup>3</sup> и сводится к следующему.

Алгоритм оптимальной коррекции имеет вид

$$U_i = -L_i x_i, \quad (6)$$

причем

$$L_i = \frac{1}{\Gamma_i} V' \lambda_{i+1} \Phi, \quad \Gamma_i = V' \lambda_{i+1} V (1 + \sigma_\mu^2) + \lambda. \quad (7)$$

Матрица  $\lambda_i$  определяется согласно рекуррентному соотношению

$$\lambda_i = \Phi_i' \left[ \lambda_{i+1} - \frac{1}{\Gamma_i} \lambda_{i+1} V V' \lambda_{i+1} \right] \Phi_i \quad (8)$$

с "начальным" условием  $\lambda_{N+1} = \lambda$ .

Определение множителя  $\lambda$  должно быть проведено методом последовательных приближений (или графическим путем) из условия

$$R_1^* = \bar{x}_0^T \lambda_{10} \bar{x}_0 + C_{10} + S_P(\lambda_{10} K_{x_0}), \quad (9)$$

где  $\bar{x}_0$  - математическое смещение вектора  $x_0$ ,  $K_{x_0}$  - его корреляционная матрица,  $R_1^*$  - требуемое значение риска  $R_1$ .

Матрица  $\lambda_{10}$  и коэффициент  $C_{10}$  определяются согласно рекуррентным соотношениям

$$\lambda_{ii} = \Phi' \lambda_{ii+1} \Phi - \Phi' \lambda_{ii+1} V L_i - L_i' V' \lambda_{ii+1} \Phi + \frac{1}{\Gamma_{ii}} L_i' L_i, \quad (I0)$$

$$C_{ii} = C_{ii+1} + G_{\epsilon}^2 \cdot S_p (\lambda_{ii+1} V V'), \quad (II)$$

где

$$\Gamma_{ii} = V' \lambda_{ii+1} V - (1 + G_{\mu}^2),$$

с "начальными" условиями  $\lambda_{1N+1} = \lambda$ ,  $C_{1N+1} = 0$ .

Оптимальная расчетная скорость дрейфа спутника при выведении его на высоту стационарной орбиты согласно <sup>3</sup> равна

$$\bar{x}_{20_{\text{онт}}} = - (\lambda_{22})_0^{-1} (\lambda_{21})_0 \bar{x}_{10}, \quad (I2)$$

где  $(\lambda_{22})_0$ ,  $(\lambda_{21})_0$  - соответствующие элементы матрицы  $\lambda_0$ .

2. Из вышеизложенного следует, что для оптимального управления необходимо знать составляющие вектора состояния  $x$  и момент  $\tau_k$  прохождения СИСЗ через апогей. Поскольку эти компоненты недоступны измерению, и возникает задача об их оптимальной оценке. Система (I) неудобна для построения оптимальных оценок вектора  $x$  по данным измерений, поскольку в эту систему вектор измерений непосредственно не входит. Поэтому для построения оптимальных оценок используются уравнения движения спутника во вращающейся геоцентрической системе координат, ли- неаризованные относительно опорной круговой орбиты. При условии, что измерения осуществляются дискретно, эти уравнения имеют вид:

$$\bar{x}_k = A(t_k - t_{k-1}) \bar{x}_{k-1} + B(1 + \mu_{k-1}) U_{k-1} + B \epsilon_{k-1}, \quad (I3)$$

где  $\bar{x}_k$  - вектор состояния в момент  $k$ -го измерения  $t_k$ , компонентами которого являются:  $\bar{x}_1 = \Delta z$  - отклонение высоты СИСЗ от высоты соответствующей расчетной круговой орбите,

$\bar{x}_2 = \Delta \lambda$  - отклонение СИСЗ по долготе от положения на расчетной круговой орбите,  $\bar{x}_3 = \dot{z} = \Delta V_r$  - радиальная составляющая отклонения скорости спутника,  $\bar{x}_4 = \Delta V_s$  - отклонение тангенциальной составляющей скорости СИСЗ;  $A(t_k - t_{k-1})$  - матрицант



движения, соответствующий опорной круговой орбите;

$$(t_k - t_{k-1}) = A(\tau) = \begin{vmatrix} 4 + 3 \cos \omega_0 \tau & 0 & \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0} & \frac{2}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 \tau) \\ -\frac{6}{z_0} (\omega_0 \tau - \sin \omega_0 \tau) & 1 & -\frac{2}{\omega_0 z_0} (1 - \cos \omega_0 \tau) & -\frac{3}{z_0} + \frac{4 \sin \omega_0 \tau}{z_0 \omega_0} \\ 3 \omega_0 \sin \omega_0 \tau & 0 & \cos \omega_0 \tau & 2 \sin \omega_0 \tau \\ -6 \omega_0 (1 - \cos \omega_0 \tau) & 0 & -2 \sin \omega_0 \tau & -3 + 4 \cos \omega_0 \tau \end{vmatrix}, \quad (14)$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{vmatrix}, \quad b = \frac{V_0}{6\pi} = 2.85 \frac{\text{м/сек}}{\text{град/оборот}} \quad (15)$$

Измеряемые координаты  $\alpha_{u_k}$  и  $z_{u_k}$  связаны с составляющими вектора состояния  $\tilde{x}_k$  соотношениями:

$$\alpha_{u_k} = \arctg \left[ \tg(-x_{10} - \Delta \lambda_k - \lambda_u + \arctg \frac{R_3 \cos \varphi \sin(-x_{10} - \Delta \lambda_k - \lambda_u)}{-R_3 \cos \varphi \cos(-x_{10} - \Delta \lambda_k - \lambda_u) + z_0 + \Delta z_k} \right. \\ \left. \times \cos \arctg \frac{R_3 \sin \varphi}{z_0 + \Delta z_k - R_3 \cos \varphi} \right]; \quad (16)$$

$$z_{u_k} = \frac{\sqrt{[R_3 \cos \varphi \sin(-x_{10} - \Delta \lambda_k - \lambda_u)]^2 + [z_0 + \Delta z_k - R_3 \cos \varphi \cos(-x_{10} - \Delta \lambda_k - \lambda_u)]^2}}{\cos \arctg \frac{R_3 \sin \varphi}{z_0 + \Delta z_k - R_3 \cos \varphi}} \quad (17)$$

Здесь  $R_3, \lambda_u, \varphi$  — соответственно радиус Земли, долгота и широта измерительного пункта.

С целью получения более простого алгоритма оценок проводится линейризация соотношений (16), (17). При этом, для

обеспечения лучшей сходимости оценок, используется линейризация относительно оптимальной прогнозируемой оценки на предыдущем шаге измерения<sup>4</sup>. В данном случае это соответствует линейризации соотношений (16), (17) в окрестности прогнозированного на основе оптимальных оценок облучающего эллипса после очередной коррекции. Тогда (16) и (17) можно переписать в виде

$$\mathcal{Y}_k = H_k \mathcal{Z}_k + \mathcal{V}_k, \quad (18)$$

здесь  $\mathcal{Y}_k$  - вектор измерений,  $H_k$  - матрица частных производных (2x4), элементы которой являются функциями предыдущих оптимальных оценок;

$\mathcal{V}_k$  - вектор ошибок измерений, которые представляют собой центрированные гауссовы независимые случайные величины, причем

$$M [\mathcal{V}_k \mathcal{V}_k^T] = Q_{\mathcal{V}}$$

Следует отметить, что при необходимости точность оценки составляющих вектора состояния СИСЗ во вращающейся геоцентрической системе координат может быть существенно повышена при том же объеме и точности измерений. Этого можно достигнуть путем линейризации уравнений движения не в окрестности опорной круговой орбиты, а, по аналогии с линейризацией соотношений (16), (17), в окрестности оптимальной оценки вектора состояния на предыдущем шаге. При этом роль переходной матрицы  $A$  будет играть также некоторая матрица частных производных, элементы которой являются функциями оптимальных оценок на предыдущем шаге<sup>4</sup>.

С учетом сказанного, оптимальные оценки вектора состояния  $\mathcal{Z}_k$  представляют собой оптимальные оценки по Байесу  $\mathcal{Z}_k^*$ ,  $\hat{\mathcal{Z}}_k$  и определяются следующими соотношениями<sup>5</sup>

$$\mathcal{Z}_k^* = \hat{P}_k (P_k')^{-1} \hat{\mathcal{Z}}_k + \hat{P}_k H_k^T Q_{\mathcal{V}}^{-1} \mathcal{Y}_k, \quad (19)$$

$$\hat{P}_k = [(P_k')^{-1} + H_k^T Q_{\mathcal{V}}^{-1} H_k]^{-1}, \quad (20)$$

$$P_k' = A_{k,k-1} \hat{P}_{k-1} A_{k,k-1}^T + B_{k-1} G_{\mathcal{E}}^2 B_{k-1}^T + B_{k-1} G_{\mathcal{U}}^2 U_k^2 B_{k-1}^T, \quad (21)$$

$$\hat{z}_k = A_{k,k-1} z_{k-1}^* \quad (22)$$

где  $P'_0$  - матрица ковариаций ошибок вывода СИЗ на орбиту обслуживающего эллипса.

После осуществления цикла измерений, когда ошибка оценки составляющих  $z_k$  не превосходит аддитивной ошибки реализации корректирующего импульса, происходит определение момента прохождения спутника через апогей из условия  $\dot{z} = \Delta V_2 = 0$ . Оптимальная (с точностью до линейного приближения) оценка  $\tau_d$  имеет вид

$$\tau_d^* = \frac{1}{\omega_0} \arctg \left( - \frac{\Delta V_2^*}{3\omega_0 \Delta z^* + 2\Delta V_3^*} \right) \quad (23)$$

Оценка составляющих вектора  $z$  определяется для момента  $\tau_d^*$ .

3. При численных расчетах в качестве примера рассматривался 24-часовой спутник  $I^6$ , для которого  $\bar{\alpha}_{10} = -35^\circ$ . Параметры стационарной орбиты:  $V_0 = 3075$  м/сек,  $r_0 = 42164,888$  км,  $T_0 = 86164$  сек. Процесс перевода СИЗ считается завершенным, если выполняются условия: 1) спутник находится в области допустимых отклонений по долготе  $|x_1| \leq \Delta \lambda_m$ ; 2) остаточная скорость дрейфа  $z_2$  такова, что гарантируется пребывание спутника в области  $|x_1| \leq \Delta \lambda_m$  в течение времени  $t_g$ . Было принято  $\Delta \lambda_m = 2,5^\circ$ ,  $t_g = 60$  оборотов  $\approx 60$  суток,  $N = 5,0$ . Область допустимых конечных ошибок на фазовой плоскости ( $x_1, x_2$ ) приведена на фиг. 2.

Аппроксимируем границу области  $\Gamma$  эллипсом  $\Gamma'$

$$\frac{1}{t_g^2} x_1^2 + \frac{1}{t_g} x_1 x_2 + x_2^2 = \frac{3}{4} \frac{\Delta \lambda_m^2}{t_g^2} = \Omega \quad (24)$$

Желая гарантировать обеспечение допустимой конечной точности с вероятностью 0,997, в качестве требуемой величины риска  $R_1$  следует принять величину  $\frac{1}{9} \Omega$ , т.е.

$$R_1^* = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} \frac{\Delta \lambda_m^2}{t_g^2} = 1,45 \cdot 10^{-4} \frac{\text{град}^2}{\text{оборот}^2} \quad (25)$$

Из (24) следует, что матрица  $\lambda$  в риске  $R(4)$  равна

$$\lambda = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_6^2} & \frac{1}{2t_6} \\ \frac{1}{2t_6} & 1 \end{vmatrix} \quad (26)$$

С учетом (25), (26) по формулам (7) - (10) были проведены расчеты при  $G_{\mu}^2 = 25 \cdot 10^{-4}$ ,  $G_{\epsilon}^2 = 0,003$  град/оборот и различных  $\lambda$ ,  $N$ . Результаты расчетов представлены на фиг.3, 4, 5, откуда для  $N=5$  находим

$$\lambda = 0,25 \cdot 10^{-4}; \quad \bar{x}_{20 \text{ опт.}} = 11,93 \text{ град/оборот.}$$

Определение потребного интервала измерений и их числа на каждом обороте осуществлялось из условия, что ошибка оценки составляющих скорости спутника не должна превышать аддитивной ошибки реализации корректирующих импульсов по скорости. На основании расчетов дисперсий оценки по формулам (20), (21) интервал между измерениями был принят равным 1 часу, а число их было принято 5. Кривые, характеризующие сходимость оценок координат вектора состояния  $\bar{x}$ , приведены на фиг.6. При этом  $G_{\Delta u} = 0,003^0$ ,  $G_{\Delta u} = 25\text{м}$  начальные ошибки вывода:  $G_{\Delta z} = 50\text{км}$ ,  $G_{\Delta \lambda} = 1^0$ ,  $G_{\Delta V_1} = G_{\Delta V_2} = 1,7 \text{ м/сек}$  <sup>1, 6</sup>.

4. С целью проверки реальных возможностей удовлетворительного перевода СИЗ в заданное положение с помощью предлагаемого алгоритма управления было проведено моделирование замкнутой системы управления на ЦВМ методом Монте-Карло. При моделировании учитывались ошибки ориентации и стабилизации СИЗ во время коррекции в предположении, что они не превышают  $\pm 2^0$ , ошибки измерения и ошибки реализации корректирующих импульсов. Динамика спутника описывалась уравнениями эллиптической теории <sup>7</sup>. Кроме того, предполагалось, что  $\lambda_u$  и  $\tau_u$  связаны с составляющими вектора  $\bar{x}$  нелинейными соотношениями.

При моделировании замкнутой системы управления были исследованы следующие основные варианты:

1. В предположении, что  $x_1$ ,  $x_2$  и  $\tau_u$  известны точно, что дало возможность проверить алгоритм коррекции. Картина рассеивания для этого случая приведена на фиг.7. Из фиг.7 видно, что

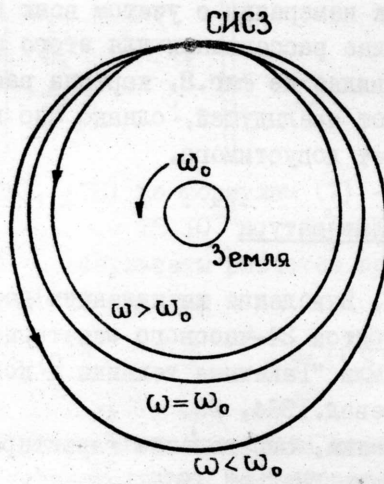
рассеивание близко к нормальному и соответствует расчетному ;

2. При наличии ошибок измерения с учетом всех перечисленных выше факторов. Картина рассеивания для этого случая приведена на фиг. 8 . Как видно из фиг.8, картина рассеивания существенно отличается от предыдущей, однако оно и в этом случае также не превышает допустимого.

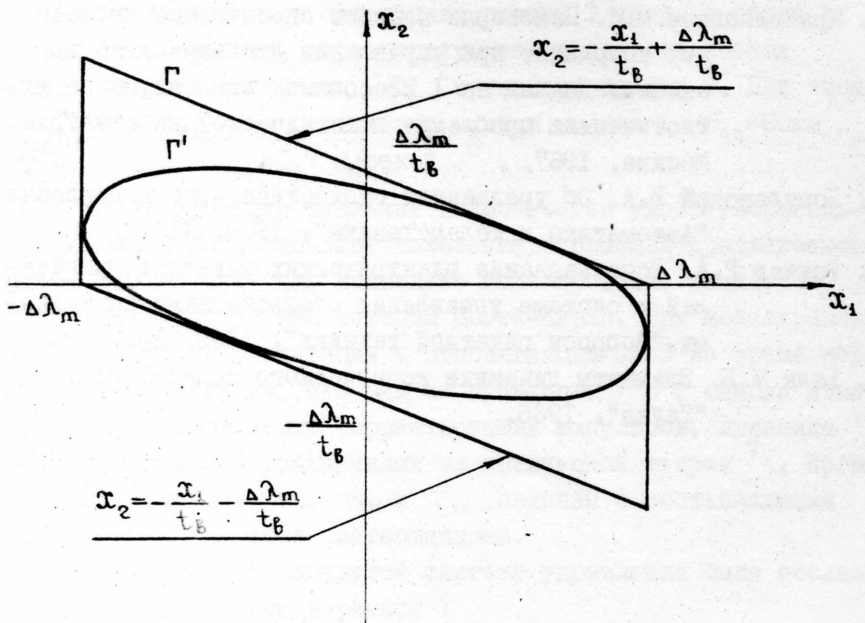
### Литература

1. Кенг Г., Кенехен М.Е. Выведение на заданную долготу и управление орбитой 24-часового экваториального спутника Земли "Ракетная техника и космонавтика", Русский перевод, 1964, №6.
2. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Изд. "Наука", 1966.
3. Малышев В.В. Задача об оптимальном дискретном управлении конечным состоянием линейной стохастической системы, "Автоматика и телемеханика", 1967, № 5.
4. Красильщиков М.Н. Некоторые вопросы определения достаточных координат при управлении динамическими объектами. Доклад на I Всесоюзном симпозиуме по статистическим проблемам в технической кибернетике, Москва, 1967.
5. Богудавский И.А. Об уравнениях стохастического управления. "Автоматика и телемеханика", 1966, №II.
6. Боучер Р.А. Использование электрических ракетных двигателей в системе управления стационарными спутниками. "Вопросы ракетной техники", 1965, №4.
7. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. Изд. "Наука", 1965.

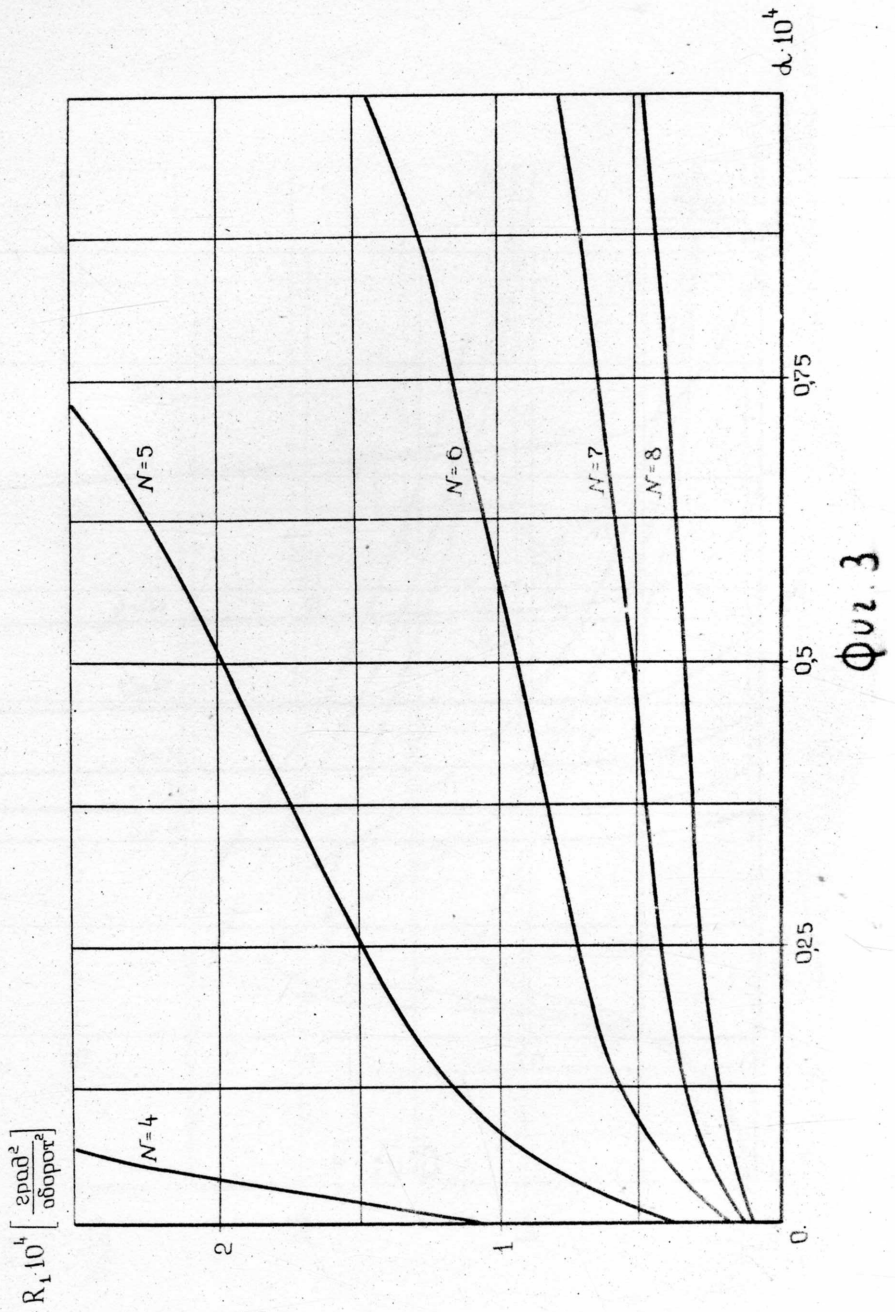


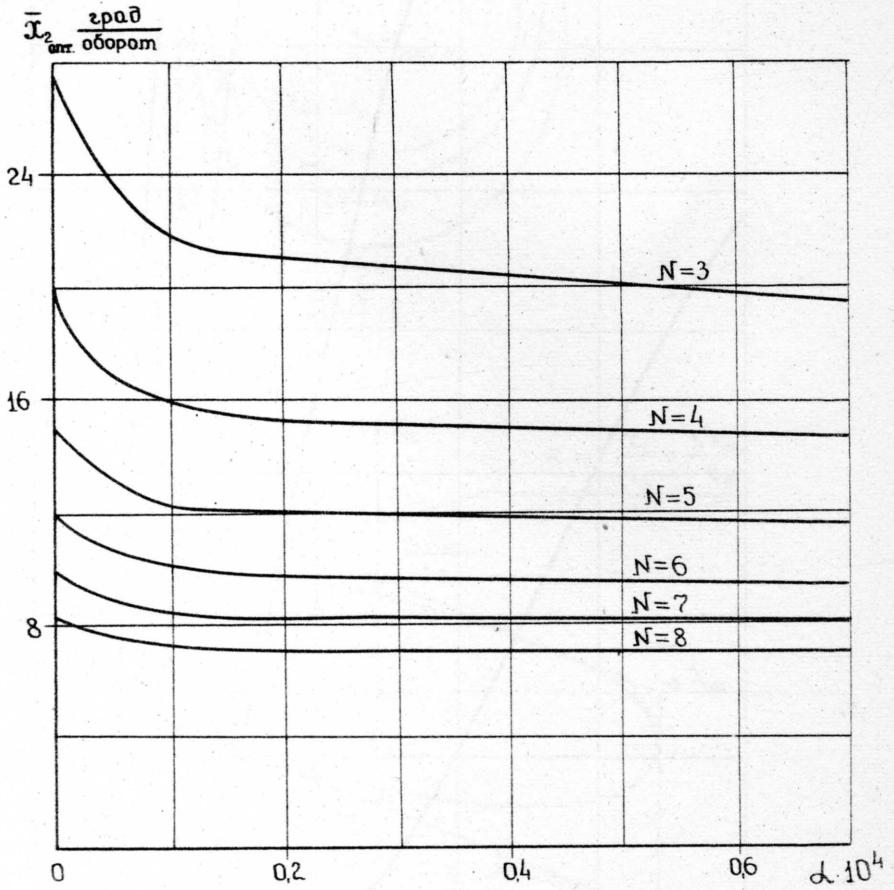


Фиг. 1

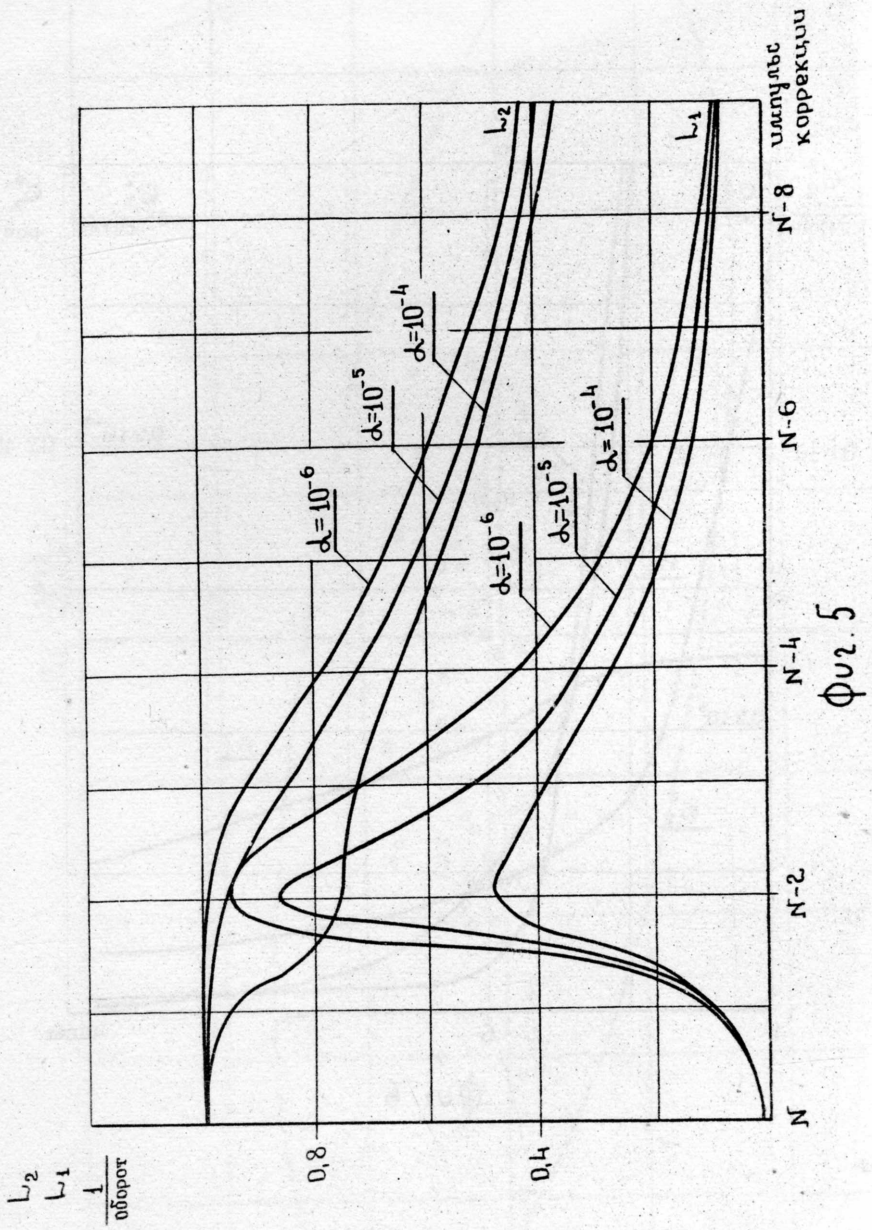


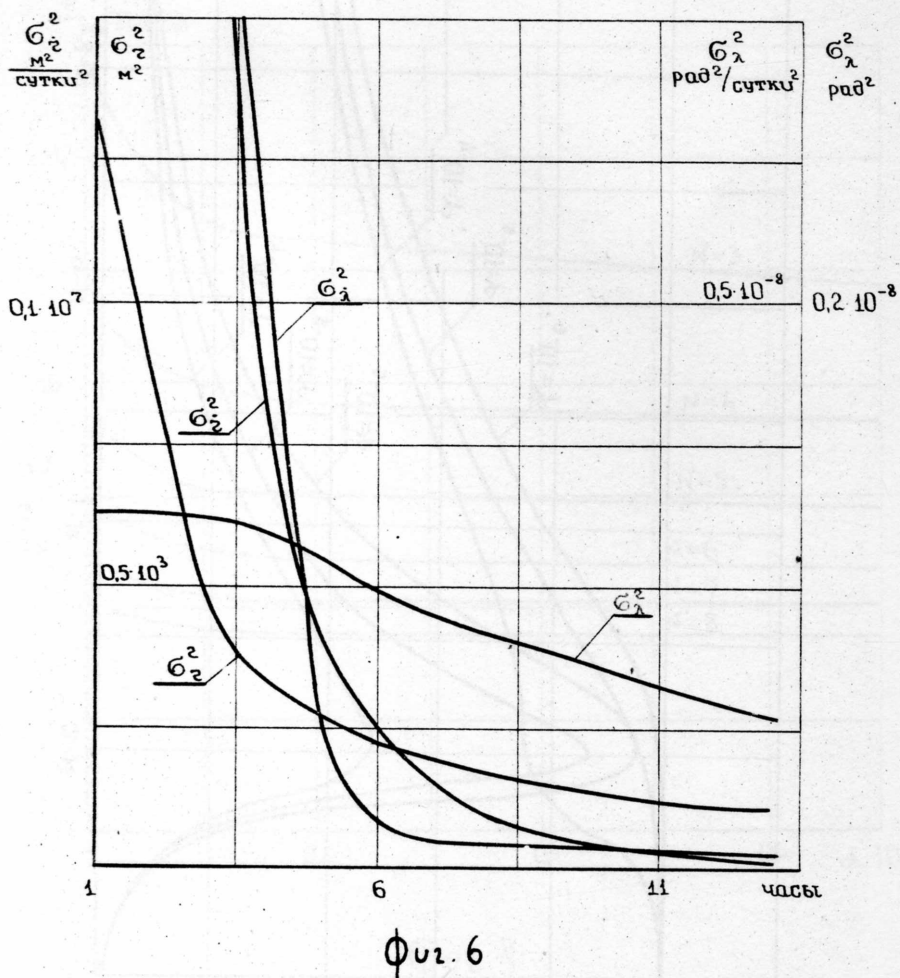
Фиг. 2





Фиг. 4

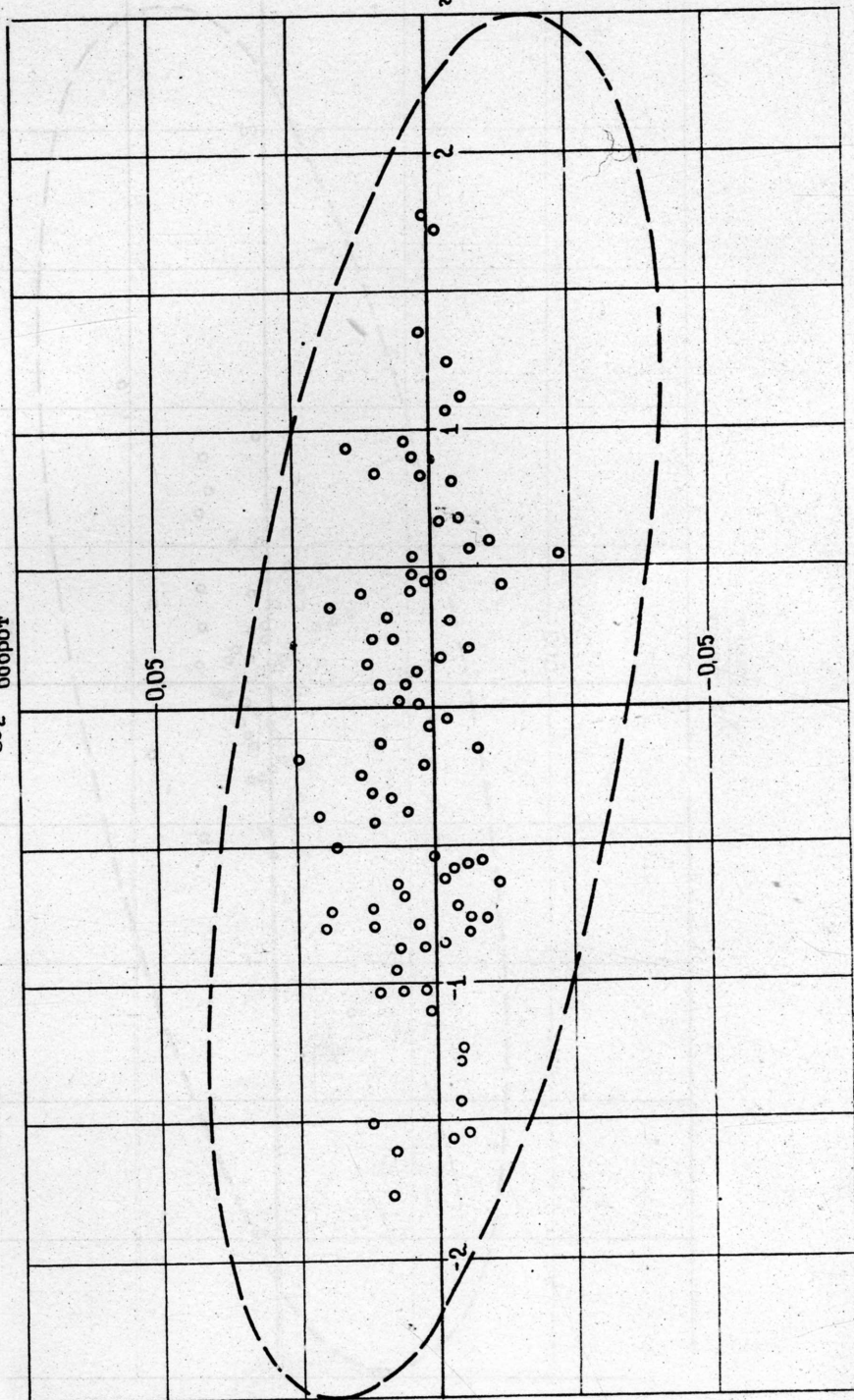






$X_2$   $\frac{\text{град}}{\text{оборот}}$

$X_1$   $\frac{\text{град}}{\text{сек}}$



Фиг. 7

$\chi_2$   $\frac{\text{спод}}{\text{офорт}}$

$\chi_1$   $\frac{\text{спод}}{\text{спод}}$

