

11 418 895  
**IFAC**

INTERNATIONAL FEDERATION  
OF AUTOMATIC CONTROL



WARSZAWA 1969

## **Performance Diagnostic and Reliability**

**Fourth Congress of the International  
Federation of Automatic Control  
Warszawa 16–21 June 1969**

**TECHNICAL  
SESSION**

**29**



Organized by  
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce

INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL

# **Performance Diagnostic and Reliability**

TECHNICAL SESSION No 29

FOURTH CONGRESS OF THE INTERNATIONAL  
FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL  
WARSZAWA 16 – 21 JUNE 1969



Organized by  
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce



BIBLIOTEKA  
BN  
NARODOWA  
II 418 895

# Contents

Paper No.		Page
29.1	SU - I.V.Pranghishvili, V.V.Ignatushchenko - A Technique for Construction of Checking and Diagnostic Tests for Versatile Uniform Arrays.....	3
29.2	SU - A.F.Volkov, I.N.Vasiliev, V.A.Viedieschenkov, V.A. Petrov - Construction of Tests for Multitact Appliances without Memory Elements.....	24
29.3	SU - P.P.Parhomienko - Interrogation Theory and Tasks of Technical Diagnostics.....	37
29.4	SU - A.L.Garkavi, V.P.Grabovieckij, V.B.Gogolevskij - Periodicity of Control Influence on Certainty of Constituent Installations.....	49
29.5	CH - G.C.Shering - A Comparison of the Performance of Certain Perturbation Extremum Control Systems	62
29.6	GB - T.A.Wesolowski Low - Reliability and Availability of Electro-Mechanical Equipment Used in Automatic Control of Turbogenerators.....	77
29.7	GB - D.A.Lloyd, A.J.Dymock - A Comparison of Some Methods of Multiplex Operation.....	95

Biblioteka Narodowa  
Warszawa



30001008742566

Wydawnictwa Czasopism Technicznych NOT  
Warszawa, ul. Czackiego 3/5 — Polska

Zakład Poligraficzny WCT NOT. Zam. 16.69.

1969 00 5971/2

# МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ КОНТРОЛЬНО- ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР

И.В.Прангишвили, В.В.Игнатушенко

Институт автоматики и телемеханики  
/технической кибернетики/

Москва, СССР

Однородные структуры представляют новый класс схем, состоящих из однотипных элементов, соединенных между собой одинаковым образом и программно настраиваемых на выполнение требуемых функций. В результате исследований, проведенных в Институте автоматики и телемеханики /технической кибернетики/, а также в ряде других организаций в СССР и за рубежом, установлено, что однородные настраиваемые универсальные структуры являются одним из наиболее эффективных и перспективных средств реализации на интегральных схемах /особенно на больших интегральных схемах - БИС/ цифровых устройств автоматики, телемеханики и вычислительной техники. Основными достоинствами однородных настраиваемых микроэлектронных структур и устройств, реализованных на их основе, являются: универсальность, гибкость, экономичность, надежность и живучесть, высокая производительность, технологичность изготовления, высокий уровень стандартизации и низкая стоимость.

В настоящей работе мы хотим показать, что регулярность однородных структур приводит к существенному упрощению методов построения контрольных и диагностических тестов, а также к резкому уменьшению времени проверки устройств, реализуемых в этих структурах.

Предполагается, что схема любого конечного автомата, реализованного в однородной структуре, функционирует исправно, если исправны те функциональные элементы структуры, которые используются для построения заданной схемы. Тогда контроль исправности и диагностика неисправности любой реализованной в однородной структуре схемы сводится к проверке элементов,



образующих структуру. Так как функциональные ячейки однородной структуры однотипны и имеют одинаковые связи между собой, то тест-наборы из контрольного и диагностического теста для однородной структуры в целом являются совокупностями тест-наборов из теста одной функциональной ячейки /элемента/ этой структуры.

Рассматриваются такие структуры из работы <sup>1</sup>, в которых функциональный элемент есть конечный автомат с  $K$  входами и  $q$  выходами, причем память включена в схему автомата так, что может быть использована только для настройки элемента. Из общего числа  $K$  входов,  $p$  входов соответствует межэлементным связям, т.е. отождествляются с выходами других элементов структуры. Остальные  $K-p$  входов являются управляющими и используются для подачи сигналов настройки извне.

Для заданного  $(K, q)$  - полюсника - функционального элемента структуры - можно построить по методике <sup>2,3</sup> минимальный /элементарный/ проверочный тест  $\Pi_{min}$  по каждому выходу элемента. Пусть минимальный тест  $\Pi_{min}$  по одному выходу состоит из  $n$  тест-наборов:

$$\Pi_{min} = t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n \quad /I/$$

В однородной структуре наружными выводами в общем случае являются лишь некоторые входы и выходы крайних ячеек, расположенных по периметру структуры, а также управляющие входы. Например, в однородной структуре размером  $m_1 \times m_2$ , ячейка которой имеет четыре входа и столько же выходов /т.е. сигнал может быть передан через ячейку в четырех направлениях/, имеется  $2m_1 + 2m_2$  наружных  $p$ -входов и столько же внешних выходов, рис.1.

Поскольку каждому  $p$ -входу, а также выходу функционального элемента структуры ставится в соответствие определенное направление передачи сигнала, то удобно рассматривать функциональный элемент однородной структуры как совокупность идентичных элементарных передающих каналов /взаимодействующих между собой внутри элемента/, число которых равно  $p=q$ . Так, функциональный элемент структуры, изображенной на рис. 1, рассматривается как совокупность четырех элементарных каналов.

С этой точки зрения, элементарный тест /I/ служит для проверки одного канала ячейки /с учетом воздействия других кана-

лов/. Предполагается, что выход элементарного канала  $F_i$  данной ячейки является входом такого же канала  $F_i$  соседней ячейки.

Введем определения для тест-наборов, подаваемых на соседние элементы  $a$  и  $b$ , связанные по  $i$ -му каналу.

Пусть на входы элемента  $a$  поданы сигналы  $(b_1 \dots b_i \dots b_p, b_{p+1}^a \dots b_k^a)^a$ , соответствующие тест-набору  $t_i$  из  $/I/$ . Здесь  $b_i$  принимает значение 0 или 1;  $b_i$  - сигнал на  $i$ -м  $p$ -входе /т.е. сигнал на входе  $i$ -го элементарного канала/,  $b_{p+1}^a$  - сигнал на  $(p+i)$ -м управляющем /настроечном/ входе.

Если элемент  $a$  исправен, то на выходах его появляются сигналы  $(b_{вых1}, b_{вых2} \dots b_{выхp})^a$ . Если же  $i$ -й канал элемента  $a$  неисправен, или неисправен функциональный элемент  $a$  в целом, на  $i$ -м выходе его появится сигнал  $b_{выхi}$ .

Будем называть тест-набор  $(b_1 \dots b_i \dots b_{p+1}^a \dots b_k^a)^b$ , подаваемый на элемент  $b$ , совместимым по  $i$ -му направлению /каналу/ с тест-набором  $(b_1 \dots b_i \dots b_{p+1}^a \dots b_k^a)^a$ , подаваемым на элемент  $a$ , если значение  $b_{выхi}$  на  $i$ -м выходе исправного элемента  $a$  совпадает со значением сигнала на входе  $i$ -го канала элемента  $b$  в тест-наборе  $(b_1 \dots b_i \dots b_{p+1}^a \dots b_k^a)^b$ , т.е.  $b_{выхi}^a = b_i^b$ . Очевидно, что при  $b_{выхi}^a \neq b_i^b$  тест-набор  $(b_1 \dots b_i \dots b_{p+1}^a \dots b_k^a)^b$  вообще не может быть применен к элементу  $b$ .

Пусть, например, на элемент  $a$  двунаправленной однородной структуры, рис.2, подается тест-набор  $(b_1 b_2 b_3)^a = 001$ ; при этом на горизонтальном выходе исправного элемента  $a$  пусть появляется сигнал  $b_{вых}^a = 0$ . Тогда на элемент  $b$  может быть подан только такой тест-набор, который является совместимым с  $(b_1 b_2 b_3)^a$ , т.е. имеющий значение сигнала  $b_3^b = 0$  на горизонтальном входе. Если каждый из тест-наборов  $t_i$  и  $t$  является совместимым с другим, то эти два тест-набора будем называть взаимосовместимыми.

В частном случае совместимые тест-наборы могут совпадать, как, например,  $(b_1 b_2 b_3)^a = (b_1 b_2 b_3)^c = 001$ , на элементах  $a$  и  $c$ , соседних по вертикали, рис.2. Такой тест-набор будем называть самосовместимым.

Будем называть совместимый тест-набор  $(b_1 \dots b_i \dots b_{p+1}^a \dots b_k^a)^b$ ,



подаваемый на элемент  $\bar{b}$ , сопряженным по  $i$ -му направлению /каналу/ с тест-набором  $(b_1 \dots b_i \dots b_{p+i} \dots b_k)^a$ , подаваемым на элемент  $a$ , если изменение значения сигнала  $b_{k+i}^a$  /на  $b_{k+i}^a$  / на  $i$ -м выходе элемента  $a$ , из-за неисправности последнего, приводит к изменению сигнала  $b_{k+i}^a$  /на  $b_{k+i}^a$  / на  $i$ -м выходе элемента  $\bar{b}$ .

Сигнал  $b_{k+i}^a$  или  $\bar{b}_{k+i}^a$ , соответствующий исправности или неисправности элемента  $a$ , может быть передан на наружный выход структуры только в том случае, если к каждому последующему элементу по  $i$ -му направлению от элемента  $a$  применен тест-набор, сопряженный с тест-набором, поданным на предыдущий элемент.

Совокупность тест-наборов  $[(b_1 \dots b_k)^a; (b_1 \dots b_k)^b; \dots; (b_1 \dots b_k)^z]$ , каждый из которых является сопряженным по  $i$ -му каналу с предыдущим тест-набором, а первый тест-набор - с последним, будем называть периодом тест-набора.

В частном случае сопряженные тест-наборы могут совпадать; такие тест-наборы будем называть самосопряженными /период содержит один тест-набор,  $z=1$ /.

Если период содержит два тест-набора /  $z=2$ /, то эти тест-наборы будем называть взаимосопряженными.

Согласно свойствам однородных структур, функциональный элемент всегда можно настроить так, что один и тот же выходной сигнал  $b_{k+i}^a$  появляется не на одном, а на нескольких выходах, соответствующих различным каналам /свойство разномножения выходного сигнала функционального элемента/, т.е. обеспечить  $b_{k+i}^a = b_{k+j}^a$ .

Пусть на элемент  $a$ , который настроен так, что  $b_{k+i}^a = b_{k+j}^a$ , подан тест-набор  $t_i$  из  $/I/$ . Если к соседнему с ним /по направлению  $j$  / элементу  $c$  применен тест-набор  $t$ , такой, что изменение значения сигнала  $b_{k+i}^a = b_{k+j}^c = b_j^c$  /на входе  $j$ -го канала элемента  $c$  / на  $b_{k+i}^a = b_{k+j}^c = b_j^c$  приводит к изменению значения выходного сигнала элемента  $c$  -  $b_{k+j}^c$  на  $\bar{b}_{k+j}^c$ , то будем говорить, что тест-набор  $t$  является сопряженным с  $t_i$  на пересекающихся направлениях  $/i$  и  $j$  /. Тогда задачу контроля /обнаружения факта неисправности  $*)$  / элементов однородной структуры удобно представить

$*)$  Здесь и далее имеется ввиду одна или несколько некомпенсирующихся неисправностей.

как проверку каналов структуры на тест-наборах из  $/I/$  с одновременной подачей сопряженных тест-наборов на элементы, расположенные между проверяемыми элементами и наружными выходами. Наиболее удобными сопряженными тест-наборами являются тест-наборы, соответствующие выполнению элементами структуры соединительных функций.

Задача диагностики неисправности заключается тогда в определении не менее чем двух координат неисправного элемента и сводится, таким образом, к задаче контроля данного элемента на двух пересекающихся направлениях /каналах/.

Чем меньше тест-наборов в периоде, тем меньше времени /тактов/ требуется для проверки элементов структуры на данном тест-наборе. Действительно, если данный тест-набор является самосопряженным, то на нем могут быть одновременно /за один такт/ проверены все элементы от первого до крайнего /имеющего наружный  $i$ -й выход/ по  $i$ -му направлению. Например, для структуры рис.1, за один такт могут быть проверены каналы  $I$  всех элементов первой строки, независимо от их числа. Если к тому же данный тест-набор элемента структуры является самосовместимым и по другим каналам, то за один такт могут быть проверены все  $i$ -е каналы всех элементов структуры.

Если данный тест-набор  $t_i$  из  $/I/$ , является взаимосопряженным /по  $i$ -му каналу/ с другим тест-набором  $t$  из  $/I/$ , то  $i$ -е каналы половины /с точностью до большего целого/ элементов за один такт проверяются на данном тест-наборе  $t_i$ , а половина - на взаимосопряженном с ним тест-наборе  $t$ , а в следующем такте - наоборот. Если же тест-набор  $t$ , взаимосопряженный с данным, не входит в минимальный тест  $/I/$ , то проверка  $i$ -х каналов на данном тест-наборе осуществляется за два рабочих такта.

Таким образом, время проверки элементов структуры на минимальном тесте  $/I/$  зависит от числа тест-наборов в периоде, составленном для каждого из тест-наборов элементарного теста  $/I/$ .

Для каждого тест-набора  $t_i$  из  $/I/$  сопряженные по  $i$ -му каналу тест-наборы находим следующим образом: а/в таблицу истинности для функции  $F_i$  /т.е. для  $i$ -го выхода ячейки/ или



в формульное выражение функции  $F_i$  подставляем значения  $(b_1 \dots b_i \dots b_k) = t_i$ , и определяем  $b_{\text{ли}i} = F_i$ ; при  $b_{\text{ли}i} = b_i$  данный тест-набор является самосовместимым; б/ если тест-набор  $t_i$  является самосовместимым, то проверяют, является ли он самосопряженным: подставляют в таблицу истинности или в формульное выражение  $F_i$  значения  $(b_1 \dots \bar{b}_i \dots b_k)$ ; если при этом имеем  $\bar{b}_{\text{ли}i}$ , то данный тест-набор является самосопряженным; в/ если данный тест-набор не является самосопряженным /по  $i$ -му каналу/, то из таблицы истинности  $F_i$  выбирает комбинации входных сигналов  $(b_1 \dots b_i \dots b_k)'$ ,  $(b_1 \dots b_i \dots b_k)''$ , ..., для которых  $b_i' = \bar{b}_i'' = b_{\text{ли}i}$ . Эти комбинации соответствуют тест-наборам  $t', t'', \dots$ , совместимым с данным тест-набором  $t_i$ ; г/ из тест-наборов  $t', t'', \dots$  выбираем также тест-наборы  $(b_1 \dots b_i \dots b_k)'' = t''$ ,  $(b_1 \dots b_i \dots b_k)''' = t'''$ , ..., для которых  $b_{\text{ли}i}'' = b_{\text{ли}i}''' = b_i$ . Тогда данный тест-набор  $t_i$  является взаимосовместимым с тест-наборами  $t', t'', \dots$ ; д/ из тест-наборов  $t', t'', \dots$  выбираем взаимосопряженные с данным тест-набором  $t_i$ , для чего по аналогии с пунктом б/ подставляем в таблицу истинности или в формульное выражение  $F_i$  значения  $(b_1 \dots \bar{b}_i \dots b_k)$ ,  $(b_1 \dots \bar{b}_i \dots b_k)''$  и  $(b_1 \dots \bar{b}_i \dots b_k)'''$ , что соответствует  $\bar{b}_i' = \bar{b}_i'' = b_{\text{ли}i}$  и  $\bar{b}_i'' = \bar{b}_i''' = b_{\text{ли}i}$  если при этом значение  $F_i$  изменяется на противоположное /т.е. имеем  $\bar{b}_{\text{ли}i}'$ ,  $\bar{b}_{\text{ли}i}''$  и  $\bar{b}_{\text{ли}i}'''$ , соответственно/, то соответствующий тест-набор является взаимосопряженным с  $t_i$ ; е/ если не обнаружено ни одного тест-набора, взаимосопряженного с данным, то из тест-наборов  $t', t'', \dots$ , совместимых с  $t_i$ , выбираем сопряженный с данным тест-набор  $t''' = (b_1 \dots b_i \dots b_k)'''$ , для которого  $b_{\text{ли}i}''' \neq b_i$ ; далее находим тест-набор  $t'''' = (b_1 \dots b_i \dots b_k)''''$ , сопряженный с тест-набором  $t'''$ , для которого  $b_{\text{ли}i}'''' = b_i$ ; если такового не обнаружено, то поиск продолжается среди тест-наборов типа  $t''''$ , и так до тех пор, пока не будет определен тест-набор, сопряженный с предыдущим и для которого  $b_{\text{ли}i}^{(i)} = b_i$ , т.е. пока не будет найден период сопряженных тест-наборов. На практике, для ячеек известных однородных структур, период тест-наборов состоит из более чем из трех тест-наборов.

Для того, чтобы контрольный тест-набор  $t_i$  был бы одно-

временно и диагностическим, необходимо отыскать тест-набор  $t$ , сопряженный с данным на каком-либо направлении, пересекающемся с  $i$ -м направлением; одновременно с подачей данного тест-набора  $t_i$  на элементы, связанные  $i$ -м каналом, выбранный сопряженный тест-набор  $t$  подается на соседние элементы. Например, с целью обнаружения обеих координат неисправного элемента 1-й строки, рис.1, проверяющие тест-наборы из /1/ подаются на элементы 1-й строки /обеспечивая передачу сигнала исправности или неисправности этих элементов на наружный выход канала 1/, а на элементы 2-й строки, а также на элементы всех других строк подаются тест-наборы, сопряженные с данным тест-набором по каналу 2, обеспечивая передачу сигнала неисправности отказавшего элемента 1-й строки на вертикальные выходы элементов нижней строки.

Очевидно, что наиболее эффективными контрольно-диагностическими тест-наборами являются тест-наборы, самосопряженные на двух пересекающихся каналах /направлениях/; на одном таком тест-наборе могут быть одновременно /за один такт/ проверены соответствующие каналы всех элементов структуры, что позволяет обнаружить не только факт неисправности структуры, но и координаты неисправного элемента.

Сказанное выше обуславливает следующий алгоритм построения контрольно-диагностических тестов для однородной структуры /способ 1/:

1. По методике <sup>2,3</sup> определяется множество минимальных контрольных тестов для каналов функционального элемента структуры. Для каждого тест-набора минимального теста составляем минимальный период сопряженных тест-наборов, включающий данный тест-набор.

2. Из множества минимальных контрольных тестов элемента структуры выбирается элементарный тест, содержащий наибольшее количество тест-наборов, самосопряженных на двух пересекающихся каналах /направлениях/. Контроль и диагностика неисправностей структуры выполняется при подаче каждого из таких тест-наборов одновременно /за один такт/ для всех элементов структуры.

3. Для каждого тест-набора  $t_i$  /выбранного по п.2 эле-



ментарного теста/, самосопряженного лишь по одному  $i$ -му каналу, определяем тест-набор  $t$ , сопряженный с данным на каком-либо направлении  $j$ , пересекающемся с  $i$ -м направлением. Выделяется группа  $i$ -х каналов элементов, которые настраиваются так, что  $\sigma_{\text{вх}i} = \sigma_{\text{вх}j}$  /например, в структуре на рис. 1 выделяется одна строка элементов, которые связаны каналами I и настроены так, что  $\sigma_{\text{вх}1} = \sigma_{\text{вх}2}$  /. На выделенную группу элементов подается тест-набор  $t_i$ , самосопряженный по  $i$ -му каналу, а на все остальные элементы структуры подаются тест-наборы  $t$ ; в случае неисправности одного или нескольких элементов из выделенной группы, сигналы неисправности появляются на наружном выходе  $i$ -го канала и на одном или нескольких наружных выходах каналов  $j$ .

4. Проверка выделенной группы  $i$ -х каналов на остальных тест-наборах /из теста, выбранного по п.2/ осуществляется по аналогии с п.3.

Проверка по пп. 3 и 4 осуществляется отдельно для каждой группы элементов со связанными  $i$ -ми каналами /например, для структуры на рис.1 - отдельно для каждой строки элементов/.

Аналогичным образом осуществляется проверка элементов структуры по всем остальным каналам.

Общее число контрольно-диагностических тестов  $M_{\text{к.г.}}$ , а также время проверки и диагностики неисправностей /число тактов  $N$  / однородной структуры по способу I связаны с числом функциональных элементов /элементарных каналов/ в структуре следующей зависимостью:

$$(M_{\text{к.г.}} = N) \leq \ell \cdot \left\{ \frac{p}{2} \right\} + (\ell' + \ell'' + \ell''' \cdot z) (m_1 + m_2 + \dots + m_p) \quad /2/$$

где:  $\ell$  - число тест-наборов в минимальном тесте /I/, самосопряженных на двух пересекающихся направлениях;

$\left\{ \frac{p}{2} \right\}$  - число пар пересекающихся каналов /направлений/, округленное до ближайшего большего целого /например, для структуры на рис.1, где  $p=4$ ,  $\left\{ \frac{p}{2} \right\} = 2$  /;

$\ell'$  - число тест-наборов из /I/, самосопряженных  $/z=1/$  только по  $i$ -му каналу /направлению/;

$\ell''$  - число тест-наборов, взаимосопряженных /  $\ell = 2$  / по  $i$  - му каналу, каждый из которых входит в /  $I$  / ;

$\ell'''$  - число тест-наборов из /  $I$  /, сопряженных по  $i$  - му каналу с периодом из  $\ell \geq 2$  наборов ;

$m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_p$  - число групп связанных элементарных каналов 1-го, 2-го, ...,  $i$  -го, ...  $p$ -го направлений / например, в структуре на рис.1 имеется  $m_1$  гр./пп /строк/ связанных каналов направления 1,  $m_2$  групп /столбцов/ связанных каналов направления 2.

Зависимость времени проверки однородной структуры от числа элементов в структуре можно исключить, если одновременно проверять на сопряженных /по  $i$  -му каналу/ тест-наборах не одну группу /строку, столбец/ элементов, а все такие группы или определенную часть общего числа их /например, половину/ независимо от числа элементов в структуре ; лишь после фиксации неисправности на каком-либо наружном выходе  $i$  -го канала на элементы подается контрольно-диагностический тест по способу I, позволяющий обнаружить вторую координату неисправного элемента. В соответствии с указанными соображениями, предлагается следующий способ контроля исправности и диагностики неисправностей однородной структуры /способ II/.

1. Выполняются операции по п.1 способа I.

2. Из множества минимальных тестов элемента структуры выбирается такой элементарный тест, который содержит наибольшее количество пар взаимосовместимых /по  $j$  -му каналу/ тест-наборов, каждый из которых является самосопряженным по  $i$  -му каналу. Если таковых тестов несколько, то из них выбирается минимальный тест, содержащий наибольшее количество тест-наборов, самосопряженных на двух пересекающихся направлениях.

3. Проверка  $i$  -х каналов всех элементов однородной структуры на каждой паре взаимосовместимых тест-наборов, указанных в п.2, выполняется за два такта ; при этом на все другие каналы элементов структуры подаются настроечные сигналы, обеспечивающие совместимость входов и выходов этих каналов. Аналогичным образом осуществляется проверка всех

остальных каналов.

4. За  $\left\{\frac{P}{2}\right\}$  тактов осуществляется проверка всех каналов всех элементов структуры на каждом тест-наборе, самосопряженным на двух направлениях.

5. За  $z$  тактов проверяются все  $i$ -е каналы всех элементов структуры на каждом из оставшихся тест-наборов, а затем — все остальные каналы.

Число контрольных тестов  $M'_k$  и время проверки /число тактов  $N'$  / по способу II для однородной структуры с любым числом функциональных элементов определяется выражением:

$$(M'_k = N') \leq \ell \left\{ \frac{P}{2} \right\} + (\ell' + \ell'' + \ell''' \cdot z + z') \cdot p \quad /3/$$

где  $z'$  — общее число вспомогательных тест-наборов  $t_{\ell n}$ , подаваемых на элементы между  $m$ -ой и  $(m+z)$ -й группой  $i$ -х каналов, проверяемых на данном тест-наборе  $t_i$ ; если  $t_i$  не является самосовместимым по какому-либо другому  $j$ -му каналу, кроме  $i$ -го, или взаимосовместимым по п.2, то относятся тест-наборы  $t_{\ell n}$ , не входящие в тест /1/, которые являются совместимыми с  $t_i$  по  $j$ -му каналу. Тест-наборы  $t_{\ell n}$  служат, таким образом, для "развязывания" элементов, если  $t_i$  не может быть подан на соседние группы элементов с связанными  $i$ -ми каналами.

За  $N'$  тактов обнаруживаются лишь по одной координате каждой неисправности. Для определения второй координаты неисправного /на тест-наборе  $t_i$  /  $i$ -го канала в  $m$ -ой группе, используется контрольно-диагностический тест, соответствующий проверке /на том же тест-наборе  $t_i$  /  $i$ -х каналов

$m$ -ой группы по способу I. Таким образом, общее число контрольно-диагностических тестов  $M'_{k.g.}$  для проверки однородной структуры по способу II равно:

$$M'_{k.g.} = M_{k.g.} + M'_k - \ell \left\{ \frac{P}{2} \right\}, \quad /4/$$

из которых при появлении  $S'$  неисправностей в структуре используется лишь  $M'_k + S'$  тестов, ибо каждая неисправность требует применения лишь одного теста из  $M_{k.g.}$ . Для обнаружения второй координаты неисправного канала требуется один дополнительный такт, т.е. при появлении  $S'$  неисправностей диагностика их осуществляется за  $N' + S'$  тактов.



Примеры построения тестов для однородных структур. Мажори-  
тарная решетка

Элементы мажоритарной решетки<sup>4</sup> универсальной в классе переключательных функций, имеют по три входа /рис.3/; горизонтальные и вертикальные входы и выходы элементов выведены наружу только у крайних /правых и нижних/ элементов, тогда как центральные /управляющие/ входы являются внешними для всех элементов структуры. Элемент имеет лишь один /разветвляющийся/ выход, что соответствует  $\phi_{вых i} = \phi_{вых j}$ .

Для элемента решетки, реализующего функцию  $f = AB + AC + BC$ , рис. 4, находим множество минимальных контрольных тестов по методике 2,3 :

$$\Sigma \Pi_{min}(\phi_1=A, \phi_2=B, \phi_3=C) = /010, 101, 011, 001/ \vee /010, 001, 011, 110/ \vee \\ \vee /101, 001, 100, 110/ \vee /010, 100, 011, 110/ \vee /5/ \\ \vee /010, 101, 100, 110/ \vee /001, 011, 101, 110/.$$

Согласно пп. 1 и 2 способа I, из множества /5/ минимальных тестов выбираем

$$\Pi_{min} /ABC/ = 010, 101, 011, 001, \quad /6/$$

содержащий два самосопряженных по двум каналам тест-набора 010 и 101.

Так, при  $A=0, B=1, C=0$  имеем  $\phi_{вых} = f = 0$ , т.е.

$\phi_1 = \phi_3 = \phi_{вых}$ , и тест-набор 010 является самосовместимым по каналам A и C, а поскольку при изменении сигнала на входе A или C имеем  $f = 1 = \phi_{вых}$ , то тест-набор 010 является и самосопряженным по этим каналам.

Контроль и диагностика неисправностей элементов мажоритарной решетки размером  $4 \times 4$  на тест-наборе 010, рис.5 а, выполняется за один такт  $T_1$  при подаче сигнала 0 на наружные входы A и C крайних элементов структуры и сигнала 1 - на центральные входы всех элементов. При неисправности какого-либо элемента, - например, элемента /3,2/ - на его выходе появится сигнал 1 вместо 0; тогда в соответствии с выходной функцией элемента  $f = AB + AC + BC$  изменятся на 1 выходные сигналы всех других элементов, расположенных правее и ниже отказавшего элемента. Таким образом, определяются обе координаты неисправного элемента. Аналогичным образом, за один

такт  $T_2$  все элементы структуры проверяются на тест-наборе IOI, рис. 5б.

тест-набор OII из выбранного теста /6/ является самосопряженным по горизонтальному каналу /C/, т.к. при  $A=0$ ,  $B=C=1$  имеем  $f = \bar{C} \wedge x = 1 = C$ , а при изменении C на 0 имеем  $f = \bar{C} \wedge x = 0$ . По п. 3 способа I подаем тест-набор OII на все элементы первой строки, рис. 5в. На элементы 2-й строки, а также на остальные элементы структуры подается самосопряженный тест-набор IOI, являющийся сопряженным по вертикальному каналу с OII. Таким образом, в один такт  $T_3$  производится проверка на тест-наборе OII всех элементов 1-ой строки, в такте  $T_4$  - всех элементов 2-й строки, рис. 5г. При отказе, например, элемента /2,2/ на его выходе появится сигнал 0 вместо 1; это приводит к появлению сигнала 0 /вместо 1/ на выходах всех элементов правее и ниже неисправного, обнаруживая обе координаты неисправного элемента. Аналогичным образом в тактах  $T_5$  и  $T_6$  проверяются на тест-наборе OII элементы 3-й и 4-й строк.

Последний тест-набор из /6/, OOI, является самосопряженным по вертикальному каналу /A/. По п. 3 способа I, за один такт  $T_7$  на этом тест-наборе проверяются элементы 1-го столбца /рис. 5д/; на все остальные элементы подается самосопряженный тест-набор OIO, являющийся сопряженным с OOI по горизонтальному каналу. В такте  $T_8, T_9, T_{10}$  проверяются на тест-наборе OOI элементы 2-го, 3-го и 4-го столбцов. Таким образом, за 10 тактов все элементы мажоритарной решетки размером  $4 \times 4$  проверяются на всех тест-наборах теста /6/ с определением обеих координат отказавших элементов.

Построим для той же структуры контрольные тесты  $M'_k$  по способу II. Согласно п.2 способа II выбираем из множества /5/ минимальных тестов мажоритарного элемента тест

$$P_{min}/ABC/ = /OIO, OOI, OII, IIO/ \quad /7/$$

т.к. он содержит пару взаимосовместимых по горизонтальному каналу тест-наборов - OOI и IIO, каждый из которых является самосопряженным по вертикальному каналу.

В такте  $T_4$  на тест-наборе OOI проверяются все элементы нечетных столбцов /см. заштрихованные по рис.6 а

элементы/, а на тест-наборе IIО - элементы четных столбцов; в следующем такте  $T_2$  - наоборот /рис.6,б/.

В такте  $T_3$  все элементы структуры проверяются на тест-наборе ОIО /рис.5а/. В такте  $T_4$  элементы нечетных строк проверяются на самосопряженном /по горизонтальному каналу/ тест-наборе ОII, рис. 6в; при этом на элементы четных строк подается вспомогательный тест-набор IОО, не входящий в /7/ и совместимый с ОII. В такте  $T_5$  на тест-наборе ОII проверяются элементы четных строк, рис. 6 г. В случае отказа, например, элемента /2,2/ на тест-наборе ОII, сигнал неисправности /обозначенный на рис. 6 г в скобках/ появится на выходе 2-й строки. Для определения второй координаты неисправного элемента на структуру подается контрольно-диагностический тест, соответствующий проверке элементов 2-й строки на том же тест-наборе ОII по способу I, рис. 5 г. Таким образом, мажоритарная решетка проверена за 5 тактов, причем время проверки по способу II не зависит от размера решетки.

#### Однородная структура, универсальная в классе конечных автоматов

Построим контрольные тесты  $M_k$ /способ II/ для четырех-направленной структуры'размером  $m_1 \times m_2$ , рис.1. Функциональная схема одного канала  $F$  ячейки структуры /из четырех/ изображена на рис. 7, где А,В,С, D - наружные входы управления /настройки/ ячейками памяти /триггерами TP5 и TP1/, X - рабочий вход /р-вход/, F - выход канала. На выходе канала реализуется функция

$$F = X \oplus Y_{TP5} + Y_{TP1} \quad /8/$$

где символом  $\oplus$  обозначена функция "сложение по модулю два".

При составлении контрольного теста над /8/ предполагается, что в течение всего такта  $T$  проверки канала  $F$  имеем  $A(t) = 0$ , т.е. сигналы сброса триггеров отсутствуют. Предполагается также, что сигналы на входах С и D являются импульсными, т.е. продолжительность этих сигналов меньше  $T$ ; при этом на выходе триггера должен фиксировать-



ся постоянный сигнал /  $У_{тр} = 0$  или  $У_{тр1} = 1$ /. При указанных ограничениях, отвлекаясь от длительности сигналов на входах В, С и D, значения  $У_{тр5}$  и  $У_{тр1}$  можно определить как

$$У_{тр5} = BC, \quad У_{тр1} = BD \quad /9/$$

Подставляя /9/ в /8/, получаем:

$$F = [X \oplus (BC)] + BD \quad /10/$$

Одним из элементарных тестов для схемы, реализующей функцию /10/, является тест:

$$П_{min}(XBCD) = 1110, 0110, 1100, 0011, 0101 \quad /11/$$

см. таблицу, I, где тест-наборы 1 и 2 являются взаимосопряженными, а тест-наборы 3 и 4 - самосопряженными.

Таблица I

№ п/п	X	B	C	D	F
1	1	1	1	0	0
2	0	1	1	0	1
3	1	1	0	0	1
4	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	1

Функциональный элемент структуры является совокупностью четырех одинаковых каналов  $F_1 \div F_4$ , рис.8. Тогда тест-набор 3 оказывается самосопряженным на любой паре пересекающихся каналов.

Таким образом, работа функционального элемента структуры описывается системой четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F_1(i,j) &= [F_1(i,j-1) \cdot F_2(i-1,j) \cdot F_3(i,j+1) \cdot F_4(i+1,j)] \oplus У_{тр5} + У_{тр1} \\ F_2(i,j) &= X \oplus У_{тр5} + У_{тр2} \\ F_3(i,j) &= X \oplus У_{тр5} + У_{тр3} \\ F_4(i,j) &= X \oplus У_{тр5} + У_{тр4} \end{aligned} \right\} \quad /12/$$

Проверка исправности структуры сводится к проверке всех элементарных каналов  $F$  всех элементов структуры по тест-наборам табл. I, если при этом проверяется также и правильность выполнения конъюнкции  $X$  в уравнениях /12/.

В соответствии с пп. 5 и 6 способа II, на каналы  $F_1$  всех нечетных элементов каждой строки подается I-й тест-набор 1110, а четных элементов - взаимосопряженных с I-м

тест-набором 0110, рис. 9а. На все остальные каналы ( $F_2 \div F_4$ ) каждого элемента подается тест-набор 0111 /совместимый с 1110/ или 1111 /совместимый с 0110/, что соответствует записанию этих каналов. При отказе канала  $F_1$  какого-либо из элементов структуры на тест-наборах 1 или 2, сигнал неисправности передается на горизонтальный выход соответствующей строки.

Отметим, что в такте  $T_1$  проверяется конъюнкция  $X$  /в четных элементах каждой строки/ на тест-наборе  $(F_1 F_2 F_3 F_4)^x = /0111/x$ , т.е. на одном из пяти тест-наборов, по которым проверяется схема "И" на четыре входа: /0111, 1011, 1110, 1111, 1101/. После окончания такта  $T_1$ , так же, как и после окончания каждого из последующих тактов, на все ячейки структуры подается сигнал А /при  $B=C=D=0$ /, который приводит все триггеры ячеек в исходное состояние, где  $Утр = 0$ .

В такте  $T_2$  на тест-наборе 1 проверяются каналы  $F_1$  четных, а на тест-наборе 2 - нечетных элементов каждой строки. В тактах  $T_3 \div T_8$  аналогичным образом проверяются на тех же тест-наборах каналы  $F_2 \div F_4$ . В такте  $T_9$  каналы  $F_1$  и  $F_2$  всех элементов структуры проверяются на самосопряженном /на паре пересекающихся каналов/ тест-наборе 1100, рис. 9б; на остальные каналы ( $F_3, F_4$ ) элементов подается вспомогательный тест-набор 1101. В тактах  $T_{10}$  и  $T_{11}$  каналы  $F_1$  и  $F_2$  проверяются на самосопряженном /по одному каналу/ тест-наборе 4 из табл. I, рис. 9в. В тактах  $T_{12} \div T_{14}$  на тех же тест-наборах 3 и 4 проверяется другая пара каналов -  $F_3$  и  $F_4$ .

Для последнего в табл. I тест-набора 0101 не существует периода сопряженных тест-наборов, т.к. комбинация входных сигналов  $B=D=1$  соответствует записанию канала, т.е. делает независимым значение на выходе его от значения входного сигнала  $X$ . В этом случае используем тест-набор, сопряженный /без периода/ и взаимосовместимый с данным по  $i$ -му каналу, который имеет период сопряжения по  $j$ -му каналу. Таким образом, сигнал неисправности  $i$ -го канала передается на наружный вывод  $j$ -го канала. Так, при подходе в такте  $T_{15}$  тест-набора 0101 на каналы  $F_1$  нечетных

элементов нечетных строк, рис. 9г, на каналы  $F_2$  четных элементов всех строк подаются взаимосопреженные /по любому одному каналу, в том числе каналу  $F_2$  / тест-наборы IIIО и ОIIО /1-й и 2-й по табл. I/; тест-набор IIIО является сопряженным и взаимосовместимым по каналу  $F_1$  с данным тест-набором ОIОI. На нечетные элементы четных строк подается какой-либо тест-набор, взаимосовместимый по каналу  $F_1$  с тест-набором ОIIО. Сигнал неисправности канала  $F_1$  какого-либо элемента /0 вместо 1/ передается на наружный вывод канала  $F_2$ . Аналогичным образом, в последующих тактах  $T_{16} \div T_{30}$  на тест-наборе ОIОI проверяются каналы  $F_1 \div F_4$  всех других элементов.

Время проверки структуры можно уменьшить, если совместить проверку каналов структуры на тест-наборах 1, 2 и 5 так, как это изображено на рис. 9 г; в одном такте на тест-наборе ОIОI проверяются каналы  $F_1$  нечетных элементов нечетных строк, а на взаимосопреженных тест-наборах IIIО и ОIIО - каналы  $F_2$  четных элементов нечетных и четных строк соответственно. В этом случае вся структура, независимо от ее размера  $m_1 \times m_2$ , может быть проверена за 22 такта; очевидно, что при этом проверяется также исправность схемы "И" с выходом  $X$  для каждого элемента.

Очевидно, что время проверки  $N'$  структуры не изменяется, если входы В, С и  $D_1 \div D_4$  не являются наружными для каждой ячейки /как предполагалось ранее/, а являются координатными управляющими шинами, как это показана на рис. 10 для элементов  $i$ -й строки.

### ВЫВОДЫ

Контроль исправности и диагностика неисправностей однородной структуры, а следовательно, проверка схемы любого конечного автомата, реализуемого в структуре, весьма упрощается по сравнению с контролем нерегулярных схем /тех же конечных автоматов/, т.к. сводится к построению контрольно-диагностических тестов для однотипных элементов с регулярными связями. Число контрольных и контрольно-диагностических тестов, определяемых рассмотренными способами, а также время проверки структуры /число рабочих тактов/ слабо зависит или не за-



висит совсем от числа элементов /размера/ структуры, т.е. от сложности схемы конечного автомата, реализуемого в однородной структуре.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Прангшвили И.В., Абрамова Н.А., Бабичева Е.В., Игнатуценко В.В. Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств. "Наука", М., 1966.
2. Чегис А.А., Иблонский С.В. Логические способы контроля электрических схем. Труды математ.ин-та им.Стеклова, № 51, 1958.
3. Карибский В.В., Нархоменко И.И., Согомонян Е.С. техническая диагностика комбинационных устройств. Сб."Абстрактная и структурная теория релейных устройств." "Наука", 1966.
4. Canaday R.H. Two-dimensional Iterative Logic. Proc. of the 1965 Fall Joint Computer Conference, AFIPS, vol.27, part 1.

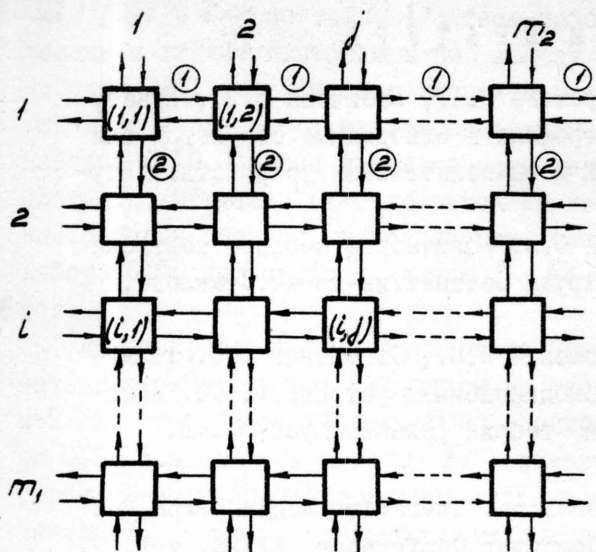


Рис. 1

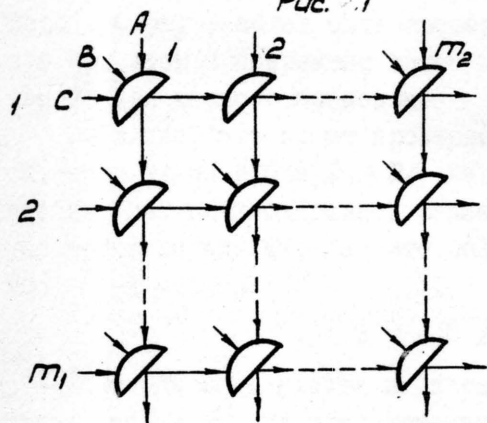


Рис. 3

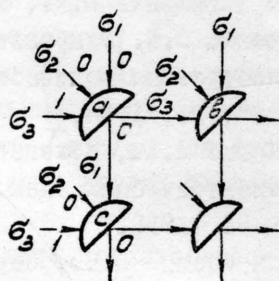


Рис. 2

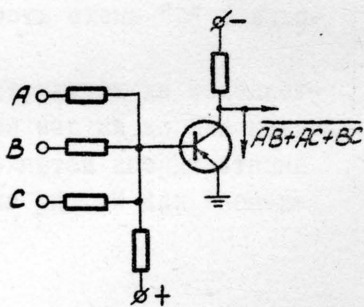
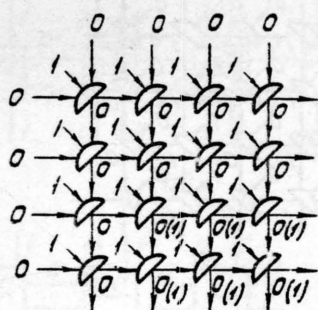
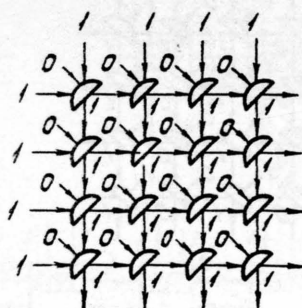


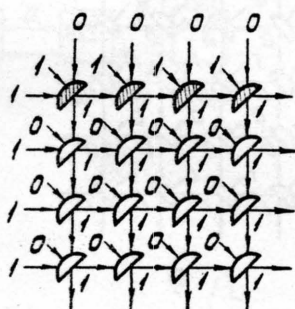
Рис. 4



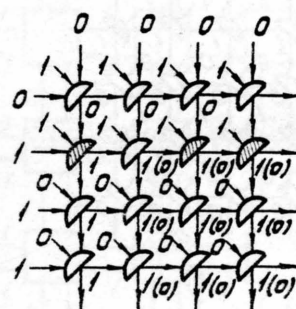
a)



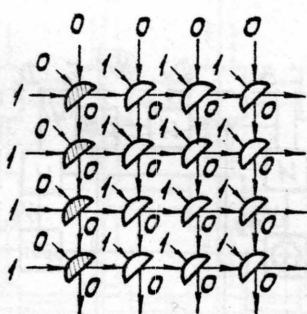
б)



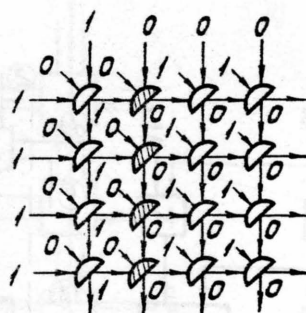
в)



г)



д)



е)



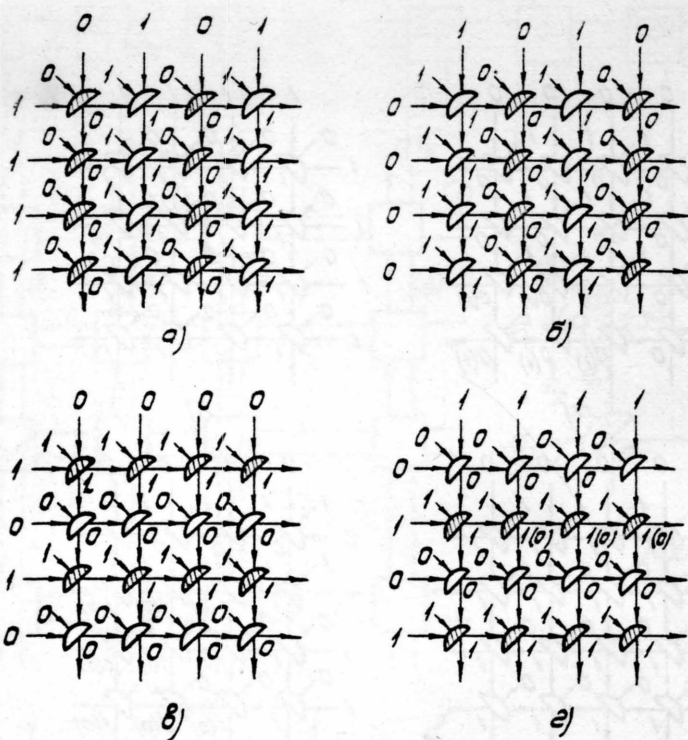


Рис. 6

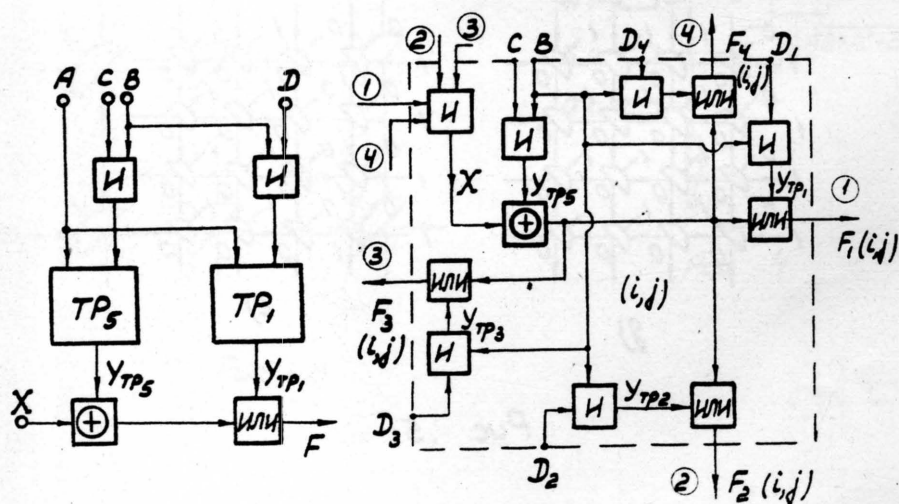
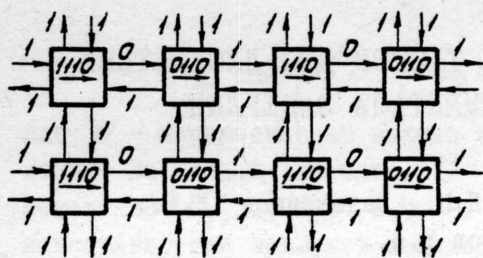
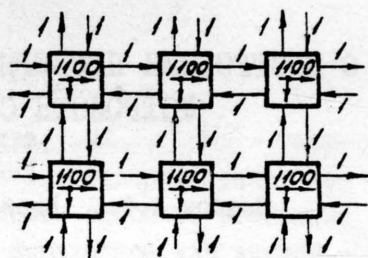


Рис. 7

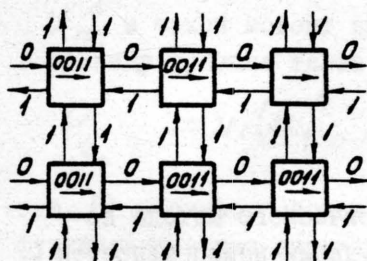
Рис. 8



a)



б)



в)

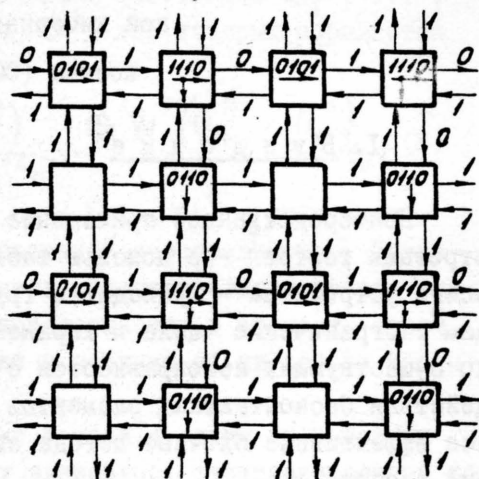
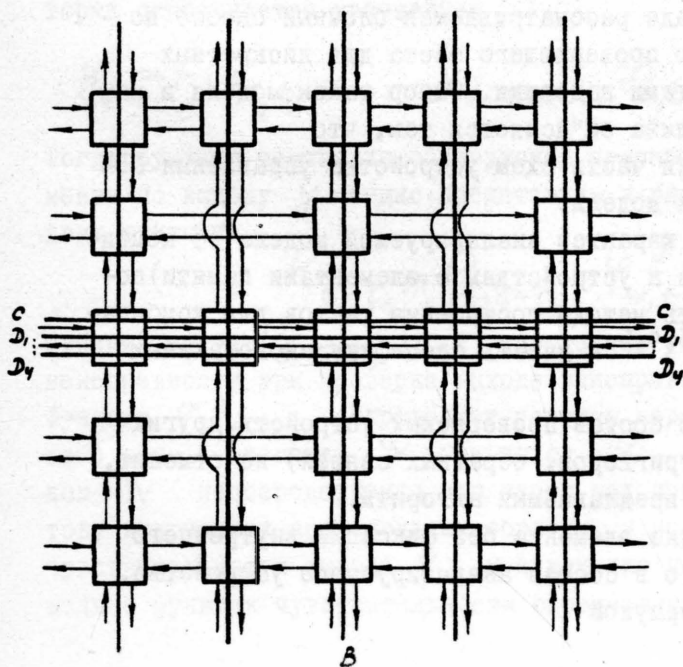


Рис. 9

г)



Б

Рис. 10

## О ПОСТРОЕНИИ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТОВ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ С ЭЛЕМЕНТАМИ ЗАДЕРЖКИ

Волков А.Ф., Васильев И.Н., Ведешенков В.А.,  
Петров В.А.

Институт автоматики и телемеханики (техничес -  
кой кибернетики)  
Москва (СССР)

### И. В в е д е н и е

Непосредственное применение классического метода построения тестов<sup>1</sup> - с помощью таблиц функций неисправностей всего устройства - приводит к трудоемким, громоздким методам<sup>2</sup>. Ограничение числа и характера проявления одновременно существующих неисправностей с учетом направленности действия бесконтактных элементов позволяет использовать более эффективные блочные методы синтеза единичных проверяющих тестов.

В данном докладе рассматривается блочный способ построения единичного проверяющего теста для дискретных устройств с элементами задержки. Выбор такой модели в качестве объекта анализа объясняется тем, что

а) значительная часть схем устройства управления ЦВМ удовлетворяет такой модели,

б) переходный характер анализируемой модели (от комбинационных устройств к устройствам с элементами памяти) позволяет использовать методы построения тестов для комбинационных устройств<sup>3,4,5</sup> и учесть специфику многотактных устройств,

в) включение в состав проверяемых устройств других элементов памяти (триггеров, обратных связей) не отменит, а лишь видоизменит предлагаемый алгоритм.

Функционирование элемента без фиксации внутреннего состояния, входящего в состав анализируемого устройства, можно определить формулой

$$W_t = f(u_1, u_2, \dots, u_m)_{t-\tau}, \quad (1)$$

где  $W$  - переменная на выходе элемента,  $u_1, \dots, u_m$  - переменные на входах элемента,  $\tau$  - величина задержки между изменениями  $u_1, \dots, u_m$  и  $W$ . Появление одной из возможных неисправностей приведет к изменению логической или временной характеристики элемента и будет обнаружено в том случае, если существует такой набор входных переменных  $u_1^0, \dots, u_m^0$  и такой момент времени  $t^0$ , для которых обращается в единицу функция теста

$$P_{t^0-\tau} = W(u_1^0, \dots, u_m^0)_{t^0-\tau} \oplus W^*(u_1^0, \dots, u_m^0)_{t^0-\tau}, \quad (2)$$

где  $\oplus$  - символ сложения по  $\text{mod } 2$ ,  $W^*$  - уравнение функционирования элемента с заданной неисправностью. Проверяющие тесты отдельных элементов целесообразно получать экспериментальным путем: внося неисправности в элемент, строя таблицы функций неисправностей и получая на их основе таблицы тестов.

Пусть проверяемый элемент связан с одним из выходных узлов устройства через группу элементов, функционирование которых определяется уравнением

$$y_t = F(z_1, t-\tau_1, \dots, W_{t-\tau}, \dots, z_n, t-\tau_n)_{t-\tau_0}. \quad (3)$$

Тогда функцию теста для обнаружения неисправности этого элемента по выходу  $y$  можно представить в виде произведения двух функций

$$R_{t-\tau_0} = P_{t-\tau-\tau_0} \cdot \varphi_{W, t-\tau_0}^y. \quad (4)$$

Функция теста  $P_{t-\tau-\tau_0}$  из (2) определяет условия обнаружения неисправности при проверке выхода неисправного элемента.

Функция  $\varphi_{W, t-\tau_0}^y$  определяет условия переноса точки контроля с выхода элемента  $W$  на выход  $y$ , связанный с выходом  $W$  непосредственно или через ряд промежуточных элементов, включенных произвольным образом, и называется функцией чувствительности выхода  $y$  к изменению переменной  $W$ <sup>4</sup>. Формально функция чувствительности определяется следующим обра-



$$\text{зom: } \varphi_{w, t-\tau_0}^y = F(z_1, t-\tau_1, \dots, w_{t-\tau}^0, \dots, z_n, t-\tau_n)_{t-\tau_0} \oplus F(z_1, t-\tau_1, \dots, \overline{w_{t-\tau}^0}, \dots, z_n, t-\tau_n)_{t-\tau_0}, \quad (5)$$

где  $w_{t-\tau}^0 = w(u_1^0, \dots, u_m^0)_{t_0-\tau}$ .

С помощью формулы (5) можно найти функции чувствительности для элементов любого типа. Например, для широко распространенных логических элементов типа ИЛИ (ИЛИ-НЕ), И (И-НЕ) функции чувствительности по  $i$ -му входу имеют вид (для  $n$  входных элементов):

$$\varphi_i = \varphi_i^{\text{ИЛИ}} = \overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_{i-1}} \overline{x_{i+1}} \dots \overline{x_n}; \quad \varphi_i^{\text{И}} = \varphi_i^{\text{И-НЕ}} = x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n \quad (6)$$

Для повторителя, инвертора, линии задержки  $\varphi \equiv 1$ .

Как видно из этих формул, решение уравнения  $\varphi_{w, t-\tau_0}^y = 1$  позволяет найти такие значения переменных на других входах элемента (схемы), при которых значения  $y$  однозначно определяются значениями  $w$ :

$$y_t = w_{t-\tau-\tau_0} \text{ или } y_t = \overline{w_{t-\tau-\tau_0}}.$$

Будем говорить, что между узлами  $w$  и  $y$  существует чувствительный путь, если изменение значения  $w$  обязательно приводит к изменению значения  $y$ . Формула (5) определяет условия существования чувствительного пути между  $w$  и  $y$ . Для определения этих условий необходимо решить уравнение (5), что может оказаться достаточно трудоемким при увеличении размеров схемы.

В связи с этим была проанализирована зависимость между структурой устройства, реализующего уравнение (3), и свойствами функции чувствительности. Этот анализ показал, что функция чувствительности цепочки последовательно соединенных элементов равна произведению функций чувствительности отдельных элементов этой цепочки. Следовательно, условия существования чувствительного пути, проходящего через цепочку последовательно соединенных элементов, можно получить с помощью непротиворечивого объединения условий существования отдельных участков этого пути, определяемых каждым элементом цепочки.

Наличие нескольких путей распространения сигнала от уз-

ла  $W$  к узлу  $Y$  может препятствовать реализации выбранного чувствительного пути. В связи с этим одной из обязательных частей предлагаемого нами алгоритма построения единичного проверяющего теста является анализ условий реализуемости выбранного чувствительного пути.

## II. Блочный способ построения единичного проверяющего теста для дискретных устройств с элементами задержки

Предлагаемый алгоритм использует локальные характеристики отдельных элементов устройства: таблицы тестов, уравнения функционирования, величины задержки, функции чувствительности, таблицы связей с ближайшими элементами устройства по входам и выходу — и состоит из нескольких частей:

- 1) ранжирование схемы;
- 2) построение первичной таблицы тестов;
- 3) построение чувствительного пути;
- 4) обнаружение и анализ влияния параллельных путей;
- 5) "расширение" чувствительного пути;
- 6) доопределение входных переменных;
- 7) доопределение моментов изменения переменных;
- 8) минимизация общей длины теста.

Содержание каждой части рассмотрим на примере устройства, функциональная схема которого приведена на рисунке. Устройство построено на элементах, реализующих конъюнкцию (обозначены  $\wedge_i$ ), дизъюнкцию ( $\vee_j$ ), инверсию ( $\text{ИН}_k$ ) и задержку (величина задержки  $\tau_i$  выбрана произвольно и указана в отнесенных единицах).

I. Целью первой части алгоритма является присвоение выходным узлам элементов номеров, возрастающих в порядке срабатывания этих элементов при одновременной подаче входных переменных на узлы  $1, 2, \dots, m$ . Очередной номер  $m+1, \dots, m+n$ , где  $n$  — число элементов в устройстве, будем присваивать выходу того элемента, все входы которого уже пронумерованы и для которого максимальная величина задержки срабатывания имеет наименьшее значение (например, для узла  $9 \sum \tau_i = 6$ , а для узла  $10 \sum \tau_i = 9 > 6$ ).

2. Целью второй части алгоритма является запоминание исходной информации об анализируемом устройстве в виде, удобном для построения проверяющего теста с помощью ЦВМ. Эта информация образует первичную таблицу тестов, которая содержит таблицы тестов отдельных элементов, размещенных в соответствии с положением этих элементов на схеме устройства. Последний столбец таблицы содержит сведения о типе логического элемента и величине задержки в выбранных относительных единицах ( $T_0$ ). Заполнение таблицы производится в порядке увеличения номеров выходных узлов элементов. Часть первичной таблицы для устройства, показанного на рис. 1, представлена в табл. 1. Указанные тесты обнаруживают всевозможные логические неисправности отдельных элементов, т.е. такие физические неисправности, которые на выходе элемента проявляются так, как если бы на один или несколько входов элемента были постоянно поданы 0 или 1.

Таблица 1

№ строки \ № узла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Тип элемента ( $\tau_i$ )
1				0				1								$\text{иН}_1$ (4)
2				1				0								
3			0					0	0							$\text{или}_2$ (2)
4			0					0	1							
5			1					0	0							
6						0		0		0						$\text{или}_3$ (5)
7						1		0		1						
8						0		0		0						
9						1		1	0			1				$\text{и}_1$ (1)
10						0		0				0				
11								1	0			0				
12							1	1		1		1	0			$\text{и}_2$ (2)
13							1	1		0		0	0			
14							1	1		0		0	0			
15							0	1		1		1	0			

Анализ тестов, представленных в таблице 1, показывает, что каждый из тестовых наборов для элементов типа И(И-НЕ), ИЛИ(ИЛИ-НЕ) можно записать в виде

$$T_j = q_i \cdot \varphi_i^j,$$

где  $q_i$  - значение  $i$ -го входа, необходимое для обнаружения логической неисправности этого входа,  $\varphi_i^j$  - функция чувствительности выхода  $j$ -го элемента к изменениям переменной на  $i$ -ом входе.

3. третья часть алгоритма дает возможность построить один из возможных чувствительных путей для очередной строки первичной таблицы. Это построение, а также результаты выполнения последующих частей алгоритма будем проводить во вторичной таблице тестов. Вторичная таблица тестов, кроме  $(m+n)$  столбцов, обозначенных номерами узлов схемы, содержит столбец номеров тактов, играющий роль временной шкалы теста, и столбец с номерами строк из первичной таблицы.

Возьмем из первичной таблицы очередную строку  $i$ -го элемента и перепишем значения ее входных переменных в свободную строку с номером  $a_i$  вторичной таблицы, а выходную переменную  $y_i$  - на  $\tau_i$  строк ниже. Для построения участка чувствительного пути, проходящего через элемент, связанный по входу с узлом  $y_i$ , найдем в первичной таблице такую строку, которая в столбце  $y_i$  содержит значение  $q_i$ , совпадающее со значением  $y_i^0$  в выбранной строке, а содержимое других столбцов совпадает с функцией чувствительности по входу  $y_i$ . Содержимое найденной строки перепишем в строку с номером  $(a_i + \tau_i)$  вторичной таблицы, сдвинув значение выхода  $y_j$  на  $\tau_j$  строк вниз. Если  $y_j$  не является выходным узлом устройства, то продолжим построение чувствительного пути, находя в первичной таблице функцию чувствительности элемента, последующего для  $y_j$ .

В табл. 2а показано построение одного из вариантов чувствительного пути для 2-ой строчки табл. I.

4. Будем говорить, что между узлами  $i$  и  $j$  схемы есть петли (параллельно включенные группы элементов), если можно построить два (или больше) пути распространения сигнала от  $i$  к  $j$ , которые будут отличаться хотя бы одним элементом пути. Примером таких узлов на схеме (рис.) являются 8 и 13, 9 и 15.

Элементом объединения назовем тот элемент устройства, выходной узел которого совпадает с конечной точкой петли.



Таблица 2

№ узла № такта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Примечания
I				I												2
2																(a)
3																
4																
5						0		0								6
6																I4
7																
8																
9																
10							I			0	I					0
11																
12																
I				I												2
2				I*												(б)
3																
4			0*													
5			0*													6
6			0*													3
7				I*												
8				I*												
9				I*												
10																I0
11																
12																
I																I3
2																
3																
4																
5																I4
6																
7																
8																
9																I4
10																
11																
12																

Для каждой ветви петли можно определить:

а) четность числа инверсий (фазу распространения) сигнала  $\theta_i$ ,

б) суммарное время задержки сигнала  $T_i$ , причем индекс  $i$  всегда будем относить к ветви, для которой в части 3 алгоритма был построен чувствительный путь.

Если  $\theta_1 = \theta_2$ , то две ветви петли будем называть синфаз-

ными; в противном случае - противофазными.

После обнаружения петли, через одну из ветвей которой проходит чувствительный путь, необходимо для ветвей этой петли определить разность  $(T_1 - T_2)$  суммарных задержек сигнала. Если эта разность равна нулю, то необходимо выяснить соотношение фаз передаваемых сигналов ( $\phi_1 - \phi_2$ ). Если ветви петли синфазны, то нужно найти функцию чувствительности элемента объединения  $\Psi_{1,2}$  к одновременному синфазному изменению двух его входных переменных. Если  $\Psi_{1,2} \neq 0$ , то построенный чувствительный путь должен быть скорректирован. Для элементов объединения типа И (И-НЕ), ИЛИ (ИЛИ-НЕ) эта коррекция сводится к тому, что значение переменной, полученное на выходе первой ветви, переписывается в столбец, соответствующий переменной на выходе второй ветви.

Если ветви петли противофазны или  $\Psi_{1,2} \equiv 0$ , то необходимо блокировать распространение сигнала по 2-ой ветви. Для этого каждая из ветвей петли должна содержать элементы фиксации, т.е. элементы, позволяющие фиксировать на выходе данной ветви значение переменной, определяемое функцией чувствительности элемента объединения.

При  $|T_1 - T_2| = \Delta T > 0$  ветви петли можно считать нешунтируемыми, и 3-ю часть алгоритма необходимо повторить для чувствительного пути, проходящего через вторую ветвь петли.

Таблица 2б отличается от табл. 2а тем, что добавлены записи, определяющие чувствительный путь через узлы 8, 9, II, I3 с временем  $T_2 = 9 < T_1 = 11$ . Записи, определяющие первый и второй чувствительные пути, подчеркнуты одной и двумя черточками, соответственно. Кроме того, I в клетке II-го столбца и IO-ой строки заменена на 0, взятый из 8-ой строки для того, чтобы упростить этап доопределения. (Цифры со звездочками будут объяснены в пункте 5).

5. Изменения величин  $\tau_i$  элементов задержки, вызванное их неисправностью, будет приводить к тому, что правильное значение выходной переменной будет появляться на контролируемом узле в момент времени  $t$ , не совпадающий с нужным моментом  $t_0$ . Фиксация значений выходной переменной  $f(t)$  в момент  $(t_0 + 1)$  и сравнение этого значения с величиной  $f(t_0)$  позволяют проверить правильность величин  $\tau_i$ .

для тех элементов задержки, которые вошли в данный чувствительный путь.

Тест, характеризующий построенный чувствительный путь, можно преобразовать так, что он позволит не только получить качественный ответ: элементы задержки исправны или нет?, но и оценить количественно величину суммарного изменения их величин задержки. Для этого проведем "расширение" чувствительного пути.

Пусть число тактов  $d$  является максимальным значением допустимого отклонения суммарной величины задержки. Тогда, начиная со строки с номером  $(a_i + \tau_i)$ , повторим записи, соответствующие функциям чувствительности отдельных элементов,  $d$  раз вверх и  $d$  раз вниз, при этом в нижних строках в столбец  $y_i$  будем записывать значения  $y_i^0$ , а в верхних строках - значение  $\bar{y}_i^0$ . При этом столбцы входных переменных, относящиеся к  $d$  строкам, лежащим выше  $a_i$ -ой строки, оставим незаполненными, а в эти же столбцы нижних  $d$  строк перепишем значения переменных из  $a_i$ -ой строки.

В таблице 2б это построение выполнено для чувствительного пути с меньшим временем задержки при  $d=1$  (добавленные на этом этапе значения отмечены звездочками (\*)).

Значения переменных, расширяющие чувствительный путь, фиксируют момент  $t_0$  изменения переменной на выходе каждого элемента задержки (граница между  $\bar{y}_i^0$  и  $y_i^0$ ) и сохраняют постоянными значения переменных, определяющих чувствительный путь, в течение интервала времени  $(t_0 - d, t_0 + d)$ . В результате этого изменение значения  $\tau_i$  одного из элементов задержки, входящего в чувствительный путь, на величину

$|\pm 8\tau_i| < d$  будет приводить к сдвигу момента  $t$  изменения выходной величины относительно момента  $t_0$  на ту же величину  $\pm 8\tau_i$ . Сравнение значения  $f(t_0 + d)$  со значением, соответствующим исправному устройству, позволяет ответить на вопрос: не превышают ли изменения величин задержки допустимых пределов? Если эти значения совпадают, то - нет, в противном случае - да, превышают!

6. Чувствительный путь, полученный в результате выполнения предыдущих частей алгоритма, определяется значениями входных переменных элементов, образующих этот путь. Часть

этих переменных поступает с выходов других элементов устройства и, следовательно, не может быть подана извне. Назначением 6-ой части алгоритма является доопределение значений входных переменных устройства, необходимых для подачи соответствующих значений переменных на входы элементов, образующих чувствительный путь. Так как для большинства логических элементов отсутствуют однозначные зависимости входных переменных от выходных, то процесс доопределения может привести к противоречивому результату, и потребуется выполнить перебор некоторого числа вариантов доопределения, прежде чем будет получен удовлетворительный результат.

Доопределение значений всех переменных, необходимых для образования чувствительного пути, начинается с элемента, соответствующего заполненному столбцу с наибольшим номером в строке с наибольшим номером такта. После доопределения входных переменных для оставшихся элементов этой же строки в порядке убывания номеров их выходов переходят к элементам ближайшей строки, определяющей значение хотя бы одной из переменных с номером  $m+1, \dots, m+n$ . Таким образом, на этапе доопределения вторичная таблица просматривается справа налево и снизу вверх до тех пор, пока не останется ни одного значения переменных с номерами  $m+1, \dots, m+n$ , которое не определяется значениями переменных с номерами  $(1, 2, \dots, m)$ .

Для выбора одного из возможных вариантов доопределения сравнительно простым является способ, при котором выбираемые входные переменные совпадают со значениями этих же переменных в ближайших верхней или нижней строках вторичной таблицы. В таблице 3 представлены результаты доопределения для данных таблицы 2б, номера строк которой даны в первом столбце в скобках.

7. Среди столбцов вторичной таблицы выделим те, которые содержат 0 и 1, разделенные группой пустых клеток  $x)$ , и заполним половину пустых клеток, прилегающих к нулевой записи, 0,

---

$x)$  Этот случай может иметь место при построении теста для чувствительного пути, содержащего петлю с противофазными ветвями.



а оставшиеся клетки - единицами. Для того, чтобы такое доопределение не внесло противоречивых данных в таблицу, проведем заполнение пустых клеток в следующем порядке:

а) заполним один из интервалов в соответствии с указанным выше правилом, причем в качестве очередного интервала выбираем тот, который находится в столбце с наибольшим номером;

б) выполним доопределение входных переменных.

Таблица 3

№ такта \ № узла	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I				0											
2				0											
3				0											
4 (I)				I											
5 (2)				I				I							
6 (3)	I			I				I							
7 (4)	I		0					I							
8 (5)	I		0			0		0							
9 (6)	I		0		I			0	I						
10 (7)			0		I		I	0	0	I	I				
11 (8)					I		I		0	I	0				
12 (9)							I		0	I	0	I			
13 (10)							I			0	0		0		
14 (11)													0		
15 (12)													0		

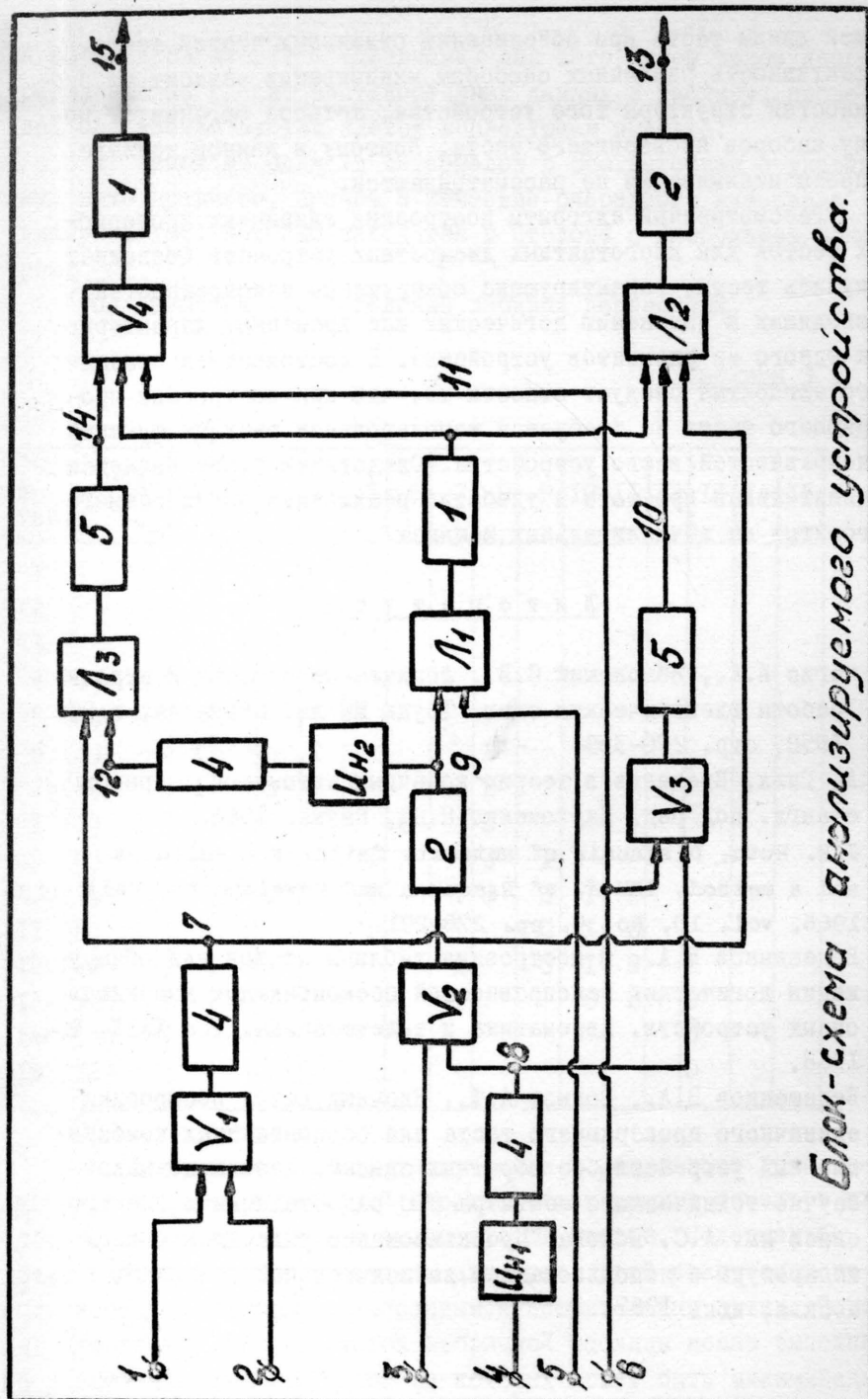
8. Вторичная таблица, полученная в результате выполнения доопределения значений входных переменных и моментов их подачи, содержит большое число пустых клеток. Содержание этих клеток не имеет значения для правильной реализации части теста, связанной с выбранным чувствительным путем. Поэтому заполнение пустых клеток вторичной таблицы можно выполнить с различными целями, одной из которых может быть минимизация

общей длины теста при объединении отдельных частей теста. Эффективность различных способов минимизации зависит от особенностей структуры того устройства, которое организует подачу наборов проверяющего теста. Поэтому в данном докладе вопросы минимизации не рассматриваются.

Рассмотренный алгоритм построения единичных проверяющих тестов для многотактных дискретных устройств позволяет получить тесты, гарантирующие обнаружение неисправностей, приводящих к изменению логических или временных характеристик одного из элементов устройства. К достоинствам описанного алгоритма следует отнести то, что при построении проверяющего теста не требуется использование таблицы функций неисправностей всего устройства. Следствием этого является сравнительная простота и удобство реализации предлагаемого алгоритма на вычислительных машинах.

### Л и т е р а т у р а

1. Чегис И.А., Яблонский С.В., Логические способы контроля работы электрических схем. Труды МИ им. Стеклова, т.51, 1958, стр. 270-359.
2. А. Гилл, Введение в теорию конечных автоматов. Перевод с англ. под ред. Пархоменко П.П., Наука, 1966.
3. J.P. Roth, Diagnosis of automata failures a calculus and a method. IBM J. of Research and Development, July 1966, vol. 10, No. 4, pp. 278-291.
4. Ведешенков В.А., О построении таблицы тестов для обнаружения логических неисправностей бесконтактных комбинационных устройств. Автоматика и телемеханика, том XXIX, №3, 1968.
5. Ведешенков В.А., Волков А.Ф., Блочный метод построения единичного проверяющего теста для бесконтактных комбинационных устройств без обратных связей. Тезисы докладов научно-технического семинара НТУ радиотехники и электросвязи им. А.С. Попова "Проектирование радиоэлектронной аппаратуры с использованием вычислительной техники", Москва, июнь 1967.



Блок-схема анализируемого устройства.

## ТЕОРИЯ ВОПРОСНИКОВ И ЗАДАЧИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Пархоменко П.П.

ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ТЕЛЕМЕХАНИКИ  
/ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ/М О С К В А  
С С С Р

В науке и технике часто встречаются задачи, решение которых представляет собой некоторый сложный эксперимент по распознаванию элементов /событий/ конечных множеств путем разбиений последних на классы. Примером таких задач могут служить задачи построения программ проверки объектов контроля из области технической диагностики, задачи кодирования сообщений из области связи, задачи синтеза структур релейных устройств, задачи типа задач по угадыванию задуманного числа и другие. Характерным является то, что в условиях таких задач готовый полный эксперимент, обеспечивающий требуемую глубину распознавания, обычно отсутствует и должен компоноваться в виде совокупностей и последовательностей реализации заданных частных экспериментов. Кроме того, эти задачи, как правило, имеют много решений, среди которых надо выбирать в некотором назначенном смысле оптимальное решение.

В докладе рассматриваются вопросы построения оптимальных экспериментов на конечном множестве событий с точки зрения теории вопросников, исследуются связи последней с динамическим программированием и методом ветвей и границ. Работа базируется на выполненных Пикаром<sup>1</sup> и Дюбейль<sup>2</sup> исследованиях частного вида вопросников /с равными ценами вопросов/.

1. Постановка задачи

Имеется конечное множество  $E$ , состоящее из  $N$  элементов  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Будем элементы  $y \in E$  называть событиями. Каждому событию  $y \in E$  приписано положительное число  $w(y)$ , называемое абсолютным весом события  $y$  и характеризующее значимость последнего. Зафиксировано разбиение множества  $E$  на  $\lambda$  классов  $E_\mu$ ,  $1 \leq |E_\mu| < N$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, \lambda$ . Если



число классов равно числу событий,  $\lambda = N$  и  $|E_\mu| = I$  для всех  $\mu$ , то рассматривается задача полной идентификации, когда полный эксперимент должен обеспечить распознавание каждого одного события среди всех других. При  $\lambda < N$  и  $|E_\mu| > I$  хотя бы для одного  $\mu$  имеет место задача неполной идентификации, требующая только распознавания любой пары событий, принадлежащих разным классам  $E_\mu$ .

Задано также множество  $T$  разбиений  $t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, |T|$ , множества  $E$  на классы. Элементы  $t \in T$  назовем вопросами. Число  $a(t)$ ,  $2 \leq a(t) \leq N$ , классов  $E_{j(t)}$ ,  $j(t) = 1, 2, \dots, a(t)$ , в разбиении  $t \in T$  называется основанием вопроса  $t$ . Признаки, по которым выделяются классы событий в разбиении  $t \in T$  называются ответами /или исходами/ вопроса  $t$ . Каждому вопросу  $t \in T$  приписано положительное число  $c(t)$ , называемое ценой вопроса  $t$  и характеризующее затраты на реализацию соответствующего разбиения.

Расширим заданное множество  $T$  вопросов следующим естественным образом. Образует систему множеств, элементами  $\mathcal{E}$  которой являются множество  $E$ , классы  $E_{j(t)}$ , а также не пустые классы всех возможных пересечений разбиений  $t \in T$ . При этом каждому вопросу  $t_j \in T$  соответствует совокупность разбиений  $\mathcal{E}_j$  множеств  $E$  на классы  $E_{j(\mathcal{E}_j)} = E_{j(t_j)} \cap \mathcal{E}$ ,  $j(\mathcal{E}_j) = 1, 2, \dots, a(\mathcal{E}_j)$ , где  $a(\mathcal{E}_j)$  — число классов в разбиении  $\mathcal{E}_j$ . Очевидно  $a(\mathcal{E}_j) \leq a(t_j)$ . Примем  $c(\mathcal{E}_j) = c(t_j)$ . Разбиение  $\tau$  будем также называть вопросом по основанию  $a(\tau)$  и с ценой  $c(\tau)$ . Образует расширенное множество  $\mathcal{T}$  вопросов из всех  $\tau$ , для которых  $a(\tau) \geq 2$ . Так как при  $\mathcal{E} = E$  имеем  $\mathcal{E}_j = t_j$ , то  $T \subseteq \mathcal{T}$ .

Сложный эксперимент по идентификации событий множества  $E$  с помощью разбиений последнего на классы может быть представлен<sup>1</sup> ориентированным графом  $G = (Q, U, \Gamma)$  вида прадерева с корнем  $x_0$ <sup>X/</sup>. Внутренние вершины и корень графа  $G$  образуют множество  $Q$  вопросов; дуги, исходящие из вершины  $x \in Q$ , называются исходами вопроса  $x$ , а их число  $a(x)$ ,  $2 \leq a(x) \leq N$ , — основанием вопроса  $x$ ; каждому вопросу  $x$  приписана цена  $c(x) > 0$ . В задачах полной идентификации конечным вершинам графа  $G$  со-

<sup>X/</sup> Конечный граф  $(X, \Gamma)$  называется прадеревом с корнем  $x_0 \in X$ , если: 1/ в каждую вершину  $\neq x_0$  заходит только одна дуга, 2/ в вершину  $x_0$  не заходит ни одна дуга и 3/ граф  $(X, \Gamma)$  не содержит контуров.

поставлены события  $y \in E$  и приписаны веса  $w(y)$ . В случае неполной идентификации событий множества  $E$  конечным вершинам графа  $G$  сопоставлены  $v$ ,  $1 \leq v < N$ , подмножеств  $E_k \subseteq E$ ,  $k = 1, 2, \dots, v$ , причем  $\bigcup_{k=1}^v E_k = E$ , и приписаны веса  $w(E_k) = \sum_{y \in E_k} w(y)$ . Граф  $G$  называется вопросником для  $E^X$ .

Относительно вершины  $z \in Z = Q \cup E$  графа  $G$  будем различать множества  $\Gamma z$  — ее последователей,  $\hat{\Gamma} z \setminus z = \Gamma z \cup \Gamma(\Gamma z) \cup \dots$  — ее потомков,  $\Gamma^{-1} z$  — ее предшественников и  $\hat{\Gamma}^{-1} z \setminus z = \Gamma^{-1} z \cup \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1} z) \cup \dots$  — ее предков. Вместо абсолютных весов  $w(y)$  событий удобнее рассматривать их относительные веса  $p(y) = \frac{w(y)}{W}$ , где  $W = \sum_{y \in E} w(y)$  называемые дальше просто весами. Весом вопроса  $x \in Q$  называется величина  $p(x) = \sum_{y \in \Gamma x \cap E} p(y)$ . Ценой пути из  $x_0$  в  $z \in Z$  называется сумма  $c(x_0, z) = \sum_{x \in \hat{\Gamma}^{-1} z \setminus z} c(x)$ . Цена пути из  $x_0$  в  $y \in E$  характеризует затраты на идентификацию события  $y$ .

На вопросники могут быть перенесены все представляющие практический интерес характеристики описываемых ими экспериментов. Одной из достаточно общих и в то же время практически полезных характеристик вопросника является<sup>3</sup> цена его обхода, определяемая выражениями:

$$C(x_0, E) = \sum_{y_i \in E} c(x_0, y_i) \cdot p(y_i) = \sum_{x_j \in Q} c(x_0, x_j) \cdot p(x_j) \quad /1/$$

и соответствующая средневзвешенным затратам на идентификацию событий по вопроснику в целом. Для вопросников с равными ценами вопросов из /1/ получается<sup>1</sup> длина обхода вопросника, отвечающая, например, средней длине кодовой комбинации в кодах Шеннона-Фано или среднему числу операций в задачах сортировки. Если цена вопроса есть стоимость /время/ реализации отдельной проверки, а вес события — вероятность исправного или неисправного состояния объекта контроля, то /1/ дает среднюю стоимость /среднее время/ определения состояний в условной последовательной программе проверки.

При одних и тех же множествах  $E$  и  $\mathcal{T}$ , вообще говоря, могут быть построены разные вопросники для  $E$ , различающиеся между собой составом и последовательностями реализации вопросов и имеющие разные цены обхода. Вопросник для  $E$ , обладающий минимальной ценой обхода, будем называть оптимальным. В докладе исследуются свойства оптимальных вопросников и методы

<sup>X/</sup> В дальнейшем, если специально не оговорено обратное, рассматриваются вопросники для задач полной идентификации.

построения последних.

## 2. Оптимальные вопросники

На основе преобразований заданного вопросника  $G$  для  $E$ , инвариантных относительно числа  $q_m$  его вопросов по основанию  $a_m$ ,  $m \in M$ , и числа  $q_c$  его вопросов с ценой  $c_c$ ,  $c \in L$ ,  $M, L$  — некоторые числовые множества/, показано<sup>3</sup>, что оптимальный вопросник, позволяющий идентифицировать  $N$  событий с помощью  $\sum_{m \in M} q_m = \sum_{c \in L} q_c$  вопросов, имеющих основания  $a_m$  и цены  $c_c$ , есть прадеерево с корнем  $x_0$ , в котором  $N = \sum_{m \in M} q_m(a_m - 1) + 1$ , и такое, что его вершинам, расположенным в неубывающем порядке относительно их рангов, приписаны веса в невозрастающем порядке, а цены ведущих к ним путей — в неубывающем порядке, при этом вопросы располагаются в невозрастающем порядке относительно их цен; среди всех вершин, имеющих такую же цену ведущих к ним путей, как и последователи вопроса по основанию  $a$ , нет ни одной, вес которой превышает сумму весов других  $a$  вершин с той же ценой ведущих к ним путей.

Пусть известно, что для построения вопросника  $G$  для  $E$  необходимо и имеется  $q_m$  вопросов по основанию  $a_m$ ,  $m \in M$ , среди которых  $q_c$  вопросов имеют цену  $c_c$ ,  $c \in L$ . Тогда из приведенного определения вытекает следующий алгоритм /назовем его  $A I$ / построения оптимального вопросника.

Образуем список 1 расположенных в неубывающем порядке весов  $\rho(y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , и список 2 пар  $/a_j, c_j/$ , расположенных в неубывающем порядке оснований  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\sum_{m \in M} q_m = |Q|$  вопросов и расположенных в невозрастающем порядке цен  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ,  $\sum_{c \in L} q_c = |Q|$  вопросов. Вычеркнем из списка 2 первую пару  $/a_j, c_j/$  с наименьшим основанием и отнесем ее к вопросу  $x_j$ . Вычеркнем из списка 1  $a_j$  первых /наименьших/ весов и припишем их  $a_j$  последователям вопроса  $x_j$ . Определим вес  $\rho(x_j)$  вопроса  $x_j$  и внесем его в список 1 с сохранением в последнем неубывающего порядка расположения весов. Снова обратимся к списку 2 и возьмем его первую невычеркнутую пару  $/a_j, c_j/$  и т.д. Будем повторять описанные операции до тех пор, пока не будет вычеркнута из списка 2 последняя пара  $/a_{|Q|}, c_{|Q|}/$  с наибольшим основанием и наименьшей ценой вопроса; при этом из списка 1 будут вычеркнуты последние  $a_{|Q|}$  весов.

Изложенная процедура проста, почти не требует перебора ва-

риантов и гарантирует, что полученный вопросник будет иметь цену обхода, не превышающую цену любого из вопросников для  $E$ , содержащих  $q_m$  вопросов по основанию  $a_m$  и  $q_c$  вопросов с ценой  $c_c$ .

Реализуемым вопросником назовем вопросник, у которого каждый вопрос из  $Q$  является вопросом из заданного множества  $\mathcal{T}$  вопросов, то есть для каждого вопроса  $x \in Q$  найдется такой вопрос  $\tau \in \mathcal{T}$ , что  $a(x) = a(\tau)$ ,  $c(x) = c(\tau)$  и  $fz \cap E = E_{\tau}(y)$  для каждого  $z \in \Gamma x$ , или, короче, вопросник, у которого  $Q \subseteq \mathcal{T}$ . Ясно, что алгоритм  $AI$  не всегда ведет к получению оптимального реализуемого вопросника. Условие  $Q \subseteq \mathcal{T}$  всегда соблюдается для задач, у которых множество  $\mathcal{T}$  содержит все возможные разбиения на множества  $E$  на  $a(\tau) = a = \text{const}$  классов, причем цены всех разбиений одинаковы,  $c(\tau) = c = \text{const}$ . Примерами таких задач являются упомянутые выше задачи кодирования и сортировки. Нетрудно показать, что из описанного алгоритма построения оптимальных вопросников с неравными основаниями и ценами вопросов, как частный случай, вытекает алгоритм построения оптимальных вопросников с равными ценами вопросов<sup>1</sup>, представляющий собой обобщение известного<sup>4</sup> алгоритма построения избыточных кодов.

Построение оптимальных реализуемых вопросников при наличии ограничений на заданное множество  $\mathcal{T}$  вопросов рассматривается ниже. Здесь отметим, что если из заданного множества  $\mathcal{T}$  вопросов выбрать  $\sum_{m \in M} q_m$  вопросов с как можно более высокими основаниями  $a_m$  и  $\sum_{c \in C} q_c$  вопросов с как можно более низкими ценами  $c_c$ , то цена обхода построенного по описанному алгоритму оптимального /не обязательно реализуемого/ вопросника представляет собой нижнюю границу цены обхода вопросников для  $E$ . Эта нижняя граница сравнительно легко вычисляется в процессе работы алгоритма  $AI$  и достижима, когда для построенного оптимального вопросника выполняется условие  $Q \subseteq \mathcal{T}$ . Знание нижней границы дает возможность оценивать качество вопросников, полученных "приближенными" методами, и позволяет организовать построение оптимальных реализуемых вопросников методом ветвей и границ.

### 3. Рекуррентное вычисление цены обхода

Будем обозначать вершины вопросника двумя индексами  $[z, s]$ , где  $z$  - ранг вершины, а  $s$  определяет ее положение среди других вершин ранга  $z$ . Пусть  $\zeta = (z, r)$  - вопросник для  $E$  и



$z_{z,s}$  - его вершина. Подвопросником с корнем  $z_{z,s}$  вопросника  $G$  является граф  $G_{z,s} = (Z_{z,s}, \Gamma_{z,s})$ , где  $Z_{z,s} = \Gamma_{z,s} z_{z,s} \subseteq Z$ , а отображение  $\Gamma_{z,s}$  определено следующим образом:  $\Gamma_{z,s} z = \Gamma z \cap Z_{z,s}$ . Подвопросник  $G_{z,s}$  является вопросником для  $E_{z,s} = \Gamma_{z,s} z_{z,s} \cap E$ .

Если вершина  $z_{w,t} \in Z_{z,s}$ , то ее вес в вопроснике  $G$  есть  $\rho(w,t)$ , а ее относительный вес в вопроснике  $G_{z,s}$  равен  $\rho_{z,s}(w,t) = \frac{\rho(w,t)}{\rho(z,s)}$ . Пусть, кроме подвопросника  $G_{z,s}$ , имеется вопросник  $G_{z,s}$  для  $E_{z,s}$ . Операция подстановки подвопросников в вопроснике  $G$  для  $E$  определяет новый вопросник  $G''$  для  $E$ , получаемый из  $G$  путем замены подвопросника  $G_{z,s}$  вопросником  $G_{z,s}$  с последующим пересчетом весов вершин последнего умножением их на  $\rho(z,s)$ .

Согласно /I/ для цены обхода  $G_{z,s}$  имеем:

$$C_{z,s} = C(z_{z,s}, E_{z,s}) = \sum_{y_i \in E_{z,s}} c(z_{z,s}, y_i) \cdot \rho_{z,s}(y_i). \quad /2/$$

Вместо /2/ можно записать

$$C_{z,s} = \sum_{y_i \in E_{z,s}} [c(z_{z,s}, y_i) - c(z_{z,s})] \cdot \rho_{z,s}(y_i) + \sum_{y_i \in E_{z,s}} c(z_{z,s}) \cdot \rho_{z,s}(y_i) \quad /3/$$

Замечая, что:

$$E_{z,s} = \bigcup_{n=1}^a(z_{z,s}) E_{z+1,n}; \quad \rho_{z,s}(y) = \rho_{z+1,n}(y) \cdot \rho_{z,s}(z+1,n);$$

$$c(z_{z+1,n}, y) = c(z_{z,s}, y) - c(z_{z,s});$$

$$\sum_{y \in E_{z+1,n}} \rho(y) = \rho(z+1,n); \quad \sum_{z_{z+1,n} \in \Gamma z_{z,s}} \rho(z+1,n) = \rho(z,s),$$

и учитывая /2/, из /3/ получаем:

$$C_{z,s} = c(z_{z,s}) + \sum_{z_{z+1,n} \in \Gamma z_{z,s}} \rho_{z,s}(z+1,n) \cdot C_{z+1,n}. \quad /4/$$

Следовательно, цена обхода  $C_{z,s}$  подвопросника  $G_{z,s}$  ранга  $z$  равна сумме цены  $c(z_{z,s})$  его корня  $z_{z,s}$  и взвешенной суммы цен обхода  $C_{z+1,n}$  подвопросников  $G_{z+1,n}$  ранга  $z+1$ , корни  $z_{z+1,n}$  которых являются последователями корня  $z_{z,s}$ .

Если  $z_{z,s} = y \in E$ , то  $\Gamma z_{z,s} = \emptyset$  и из /4/ следует:

$$C_{z,s} = c(z_{z,s}) = c(y) = 0. \quad /5/$$

Формулы /5/ и /4/ позволяют рекуррентно вычислять цену обхода любого подвопросника  $G_{z,s}$  вопросника  $G$ , в том чис-

ле цену обхода самого  $G$  :

$$C = C(x_0, E) = c(x_0) + \sum_{z_{1,n} \in \Gamma x_0} p(z, n) \cdot C_{z, n}. \quad /6/$$

Докажем, следуя<sup>2</sup>, следующее утверждение: оптимальный вопросник состоит из оптимальных подвопросников.

Пусть  $G$  - оптимальный вопросник. Предположим, что в  $G$  есть неоптимальный подвопросник  $G_{z,s}$  с ценой обхода  $C_{z,s}$ . Тогда существует оптимальный вопросник  $G'_{z,s}$  для  $E_{z,s}$  с ценой обхода  $C'_{z,s}$ , причем

$$C'_{z,s} < C_{z,s}. \quad /7/$$

Пусть  $z$  - минимальный ранг неоптимальных подвопросников в  $G$ . Если  $z = 0$ , то неоптимальным является вопросник  $G$ , что невозможно по условию. Примем, что для всех  $w < z$ ,  $0 < z \leq z_m$ , /  $z_m$  - максимальный ранг вопросника/, все подвопросники  $G_{w,t}$  в  $G$  оптимальны. Выделим подвопросник  $G_{z-1,t}$  с корнем  $z_{z-1,t} \in \Gamma^{-1} z_{z,s}$ . Этот подвопросник оптимальный и согласно /4/ имеет цену обхода

$$C_{z-1,t} = c(z_{z-1,t}) + p_{z-1,t}(z,s) \cdot C_{z,s} + \sum_{z_{z,n} \in \Gamma z_{z-1,t} \setminus z_{z,s}} p_{z-1,t}(z,n) \cdot C_{z,n}. \quad /8/$$

В вопроснике  $G_{z-1,t}$  выполним подстановку подвопросника  $G'_{z,s}$  вместо  $G_{z,s}$ . Для получаемого нового вопросника  $G'_{z-1,t}$  имеем:

$$C'_{z-1,t} = c(z_{z-1,t}) + p_{z-1,t}(z,s) \cdot C'_{z,s} + \sum_{z_{z,n} \in \Gamma z_{z-1,t} \setminus z_{z,s}} p_{z-1,t}(z,n) \cdot C_{z,n}. \quad /9/$$

Сравнивая /8/ и /9/, в силу /7/ получаем:

$$C'_{z-1,t} < C_{z-1,t} \quad /10/$$

что неверно, так как  $G_{z-1,t}$  оптимальный по предположению. Утверждение доказано, причем оно справедливо также для оптимальных реализуемых вопросников.

#### 4. Оптимальные реализуемые вопросники

Пусть  $\mathcal{E}^*$  - множество всех возможных различных непустых подмножеств  $\mathcal{E}_j$  множества  $E$ , содержащих  $m_j \leq N$  событий. При  $m_j \geq 2$  будем называть допустимым для  $\mathcal{E}_j$  вопросом  $\tau \in \mathcal{T}$  заданное разбиение подмножества  $\mathcal{E}_j$  на  $a(\tau)$ ,  $2 \leq a(\tau) \leq m_j$ , классов  $\mathcal{E}_{j,n}$ ,  $n = 1, 2, \dots, a(\tau)$ . Множество допустимых для  $\mathcal{E}_j$  вопросов обозначим  $\mathcal{T}_j$ . Если  $m_j = 1$ , то примем  $\mathcal{T}_j = \emptyset$ . Тогда  $\bigcup_{\mathcal{E}_j \in \mathcal{E}^*} \mathcal{T}_j$  есть множество допустимых вопросов, которое называется совместным, если для него существует хотя бы один реализуемый во-

просник для  $E$ . Назовем ситуацией пару  $(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j)$  и порядком ситуации - число  $m_j$  элементов в  $\mathcal{E}_j$ .

Выше отмечалось, что при наличии ограничений на множество  $\mathcal{T}$  заданных вопросов алгоритм А I может дать оптимальный реализуемый вопросник только случайно - тогда, когда все вопросы хотя бы одного из всех возможных по алгоритму вариантов окажутся допустимыми. Изложим общий алгоритм А 2 построения оптимальных реализуемых вопросников, базирующийся на процедуре рекуррентного вычисления цены обхода вопросника.

Пусть  $\mathcal{G}_2$  - множество всех реализуемых вопросников для  $E$  и для совместимого множества  $\mathcal{T}$  допустимых вопросов, а  $S\mathcal{G}_2$  - множество всех /реализуемых/ подвопросников указанных вопросников из  $\mathcal{G}_2$ . Возможной ситуацией назовем ситуацию, которой соответствует реализуемый подвопросник из  $S\mathcal{G}_2$ . Возможными допустимыми вопросами назовем вопросы реализуемых вопросников из  $\mathcal{G}_2$ . Множество возможных допустимых вопросов обозначим  $\mathcal{T}'$ .

Пусть  $(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j')$  - возможная ситуация порядка  $m_j$ . Если  $(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j')$  возможная ситуация порядка I, то соответствующий ей реализуемый подвопросник является вырожденным<sup>X/</sup> и поэтому оптимальным с ценой обхода

$$C_0(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j') = C_0(y_i, \phi) = 0, j = 1, 2, \dots, N. \quad /II/$$

Предположим теперь, что для каждой возможной ситуации  $(\mathcal{E}_k, \mathcal{F}_k')$  порядка  $m_k$ ,  $1 \leq m_k < m_j \leq N$ , уже построен соответствующий ей оптимальный реализуемый подвопросник. Возьмем возможную ситуацию  $(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j')$ . Возможный допустимый для  $\mathcal{E}_j$  вопрос  $\tau$  по основанию  $a(\tau)$  есть разбиение  $\mathcal{E}_j$  на  $a(\tau)$  непересекающихся и непустых подмножеств  $\mathcal{E}_{j,n}$ , каждое из которых имеет число элементов  $m_{j,n} < m_j$ . По условию для каждой из возможных ситуаций  $(\mathcal{E}_{j,n}, \mathcal{F}_{j,n}')$  уже построен оптимальный реализуемый подвопросник. Тогда оптимальным реализуемым подвопросником, соответствующим возможной ситуации  $(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j')$ , будет подвопросник, у которого цена обхода минимальна:

$$C_0(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j') = \min_{\tau \in \mathcal{T}_j'} \left[ c(\tau) + \sum_{n=1}^{a(\tau)} p_n \cdot C_0(\mathcal{E}_{j,n}, \mathcal{F}_{j,n}') \right], \quad /I2/$$

где

$$p_n = \frac{\sum_{y \in \mathcal{E}_{j,n}} p(y)}{\sum_{y \in \mathcal{E}_j} p(y)}.$$

<sup>X/</sup> Вырожденным называется I вопросник для одного события.

Нетрудно видеть, что рекуррентное соотношение /12/ представляет собой функциональное уравнение динамического программирования с оператором минимума<sup>5</sup>. Таким образом, процедура построения оптимальных реализуемых вопросников по алгоритму А 2 состоит в рассмотрении всех возможных ситуаций порядка  $m_j$ , начиная от  $m_j = 1$  и кончая  $m_j = N$ , и в построении соответствующих им оптимальных реализуемых подвопросников. Искомый вопросник соответствует возможной ситуации  $(E, \mathcal{T}')$ .

Алгоритм А 2 позволяет строить реализуемые вопросники, оптимальные не только в смысле минимума цены обхода, но также относительно других целевых функций оптимизации, дает возможность получать как одно, так и все решения, может быть легко модифицирован для решения задач неполной идентификации. Недостатком этого алгоритма является большое число вычислительных операций, определяемое в худшем случае  $2^N \cdot |T|$ <sup>х</sup> обращениями к формуле /12/. Перейдем к рассмотрению алгоритма А 3, представляющего собой процедуру метода ветвей и границ<sup>6</sup> и использующего алгоритм А 1 для вычисления нижней границы цены обхода вопросника. В описанном варианте алгоритм А 2 строит искомый вопросник в направлении от его конечных вершин к корню  $x_0$ . Алгоритм А 3 изложим в варианте, когда построение вопросника ведется, наоборот, в направлении от корня  $x_0$  к его конечным вершинам.

Пусть имеется прадереве  $G$  с корнем  $x_0$ , реализующее вопросник  $G$  для  $E$ . Выделим в  $G$  подпрадереве  $G_2 \subseteq G$  с корнем  $x_0$ , входящим в множество  $Q_2$  внутренних вершин  $x_2$ , и с множеством  $E_2$  конечных вершин  $y_2$ . Кроме подпрадереве  $G_2$  прадереве  $G$  содержит  $|E_2|$  подпрадеревьев  $G_{y_2}$  с корнями  $y_2 \in E_2$ , реализующих соответствующие им /в том числе, возможно, вырожденные/ подвопросники  $G_{y_2}$  для  $E_{y_2}$ , причем  $\bigcup_{y_2 \in E_2} E_{y_2} = E$ . Цену обхода вопросника  $G$  можно представить в виде:

$$C(x_0, E) = \sum_{x_2 \in Q_2} p(x_2) \cdot c(x_2) + \sum_{y_2 \in E_2} p(y_2) \cdot C_{y_2} \quad /13/$$

где  $p(y_2) = \sum_{y_2 \in E_{y_2}} p(y)$  и  $C_{y_2}$  - цена обхода подвопросника  $G_{y_2}$ .

Определим начальную возможную ситуацию  $(E_j = E, \mathcal{T}_j = T)$  порядка  $N$ . В качестве первого вопроса  $x_0$  искомого оптимально-

<sup>х</sup>/ В ряде случаев возможно уменьшение числа операций за счет предварительного определения всех возможных ситуаций.



го реализуемого вопросника может оказаться любой вопрос  $t \in T$ , то есть имеется  $|T|$  вариантов /ветвей дерева решений/. Для каждого варианта определим возможные ситуации  $(E_{j,n}, F_{j,n})$ , по алгоритму AI построим оптимальные /в общем случае нереализуемые/ подвопросники, соответствующие каждой такой ситуации, и найдем цены обхода последних  $C_0(E_{j,n}, F_{j,n})$ . Затем согласно /13/ определим цену обхода вопросника в целом для каждого варианта и выберем для продолжения <sup>а(т)</sup> решения вариант, который дает:

$$C(x_0, E) = \min_{t \in T} \left[ c(t) + \sum_{n=1}^{\alpha(t)} p_n \cdot C_0(E_{j,n}, F_{j,n}) \right]. \quad /14/$$

На следующих шагах описанные операции повторяются применительно к возможным ситуациям, выбранным на предыдущем шаге. Дополнительной операцией при этом является операция сравнения минимальной цены обхода вопросника в целом, полученной на данном шаге, с ценами обхода, полученными на предыдущих шагах. Если варианты данного шага дают более высокую цену, чем какой-либо из вариантов предыдущих шагов, то для продолжения решения выбирают последний. Оптимальным реализуемым вопросником будет первый полученный по ходу решения реализуемый вопросник для  $E$ .

В большинстве случаев метод ветвей и границ дает сокращение объема вычислительных операций по сравнению с процедурой динамического программирования и является столь же общим, как и последняя.

##### 5. 0 "приближенных" методах построения вопросников

Практически всегда множество событий  $E$  можно представить как полную систему событий, вероятности которых равны их относительным весам. Исходя из этого, довольно часто в процедурах построения вопросников используют условную энтропию ранга  $z$  в качестве функции предпочтения при выборе решения на каждом шаге. Это соответствует максимизации на каждом шаге функции

$$H = \sum_{n \in \Gamma_{z,s}} p_{z,s}(z+1, n) \log_{p_{z,s}(z+1, n)} \frac{1}{p_{z,s}(z+1, n)}, \quad /15/$$

то есть выбору такого разбиения подмножества  $E_{z,s}$ , которое обеспечивает получение наиболее близких между собой весов вопросов  $[z+1, n]$ , являющихся последователями вопроса  $[z, s]$ .

Другой "приближенной" процедурой построения вопросников, также часто используемой в практике, является процедура, известная под названием метода Шеннона-Фано для построения кодов с переменной длиной кодовых комбинаций. Согласно этой процедуре, лучшим на каждом шаге является такое разбиение, которое обеспечивает получение наиболее близких между собой весов вопросов  $[z+1, n]$  при условии соблюдения расположения весов событий в неубывающем /или невозрастающем/ порядке.

Исследования свойств вопросников, оптимальных в смысле минимума цены их обхода, а также вопросников, оптимальных с информационно-точечной точки зрения, показывают, что обе указанные функции предпочтения не гарантируют получения оптимальных вопросников даже в случае<sup>1, 2</sup> вопросников с равными ценами вопросов. Причем, принцип максимизации условной энтропии дает в общем случае более далекие от оптимальных решения, чем метод Шеннона-Фано. Это объясняется тем, что в первом случае более грубо нарушается свойство оптимальных вопросников, состоящее в том, что среди всех вершин, имеющих такую же цену ведущих к ним путей, как и последователи вопроса по основанию  $a$ , не должно быть ни одной, вес которой превышает сумму весов других  $a$ -вершин с той же ценой ведущих к ним путей.

В заключение отметим, что теория вопросников дает возможность рассматривать свойства вопросников, оптимальных в смысле минимума или максимума других, отличных от упомянутых в докладе, целевых функций оптимизации и служит хорошей основой для классификации сложных экспериментов по распознаванию элементов конечных множеств, независимо от их физического содержания и других особенностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Picard C., *Theorie de questionnaires*, Couthier-Villars, Paris, 1965.
2. Dubail F. *Algorithmes de questionnaires réalisables, optimaux au sens de different critères*, Thèse présentée a la faculté des sciences des l'université de Lyon, 1967.
3. Пархоменко П.П., Оптимальные вопросники с неравными ценами вопросов, Доклады АН СССР /в печати/.

4. Huffman D.A., A Method for the construction of minimum - redundancy codes, Proc. IRE, vol.9, 1952.
5. Дрейфус С., Динамическое программирование, Кибернетический сборник, Изд., "Мир", № 2, 1966.
6. Lamber E.L., Wood D.E., Branch-and-bound methods: a survey, Operat. Res., 14, No.4, 1966.

Русский перевод - Метод ветвей и границ, Экспрессинформация, Техническая кибернетика, № 47, 1966.

## ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ КОНТРОЛЯ НА НАДЕЖНОСТЬ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ УСТРОЙСТВ

Гаркави А.Л., Гоголевский В.Б., Грабовецкий В.П.  
Научный совет по проблемам надежности АН СССР,  
Москва, СССР.

В докладе рассматриваются некоторые методы определения характеристик надежности контролируемых восстанавливаемых устройств. Предлагаемые методы используются для решения двух групп задач.

### I

Первая группа задач связана с изучением характеристик надежности эпизодически работающих /по вызову/ устройств, но находящихся длительное время во включенном состоянии. Определяется влияние периодичности и характера контрольных проверок на работоспособность устройств. Находится вероятность того, что устройство будет исправным в произвольный момент времени  $t$  и безотказно проработает в течение промежутка  $\tau$  —  $P(t, \tau)$ . Предполагается, что контроль работоспособности таких устройств не является непрерывным, т.к. непрерывный контроль либо невозможен, либо нецелесообразен.

Принятые допущения: промежутки времени между отказами устройства и время восстановления распределяются по экспоненциальному закону с параметрами  $\lambda$  и  $\mu$  соответственно. Контроль осуществляется мгновенно, контрольная аппаратура абсолютно надежна.

При решении этой задачи рассмотрены два случая.

а) Контроль осуществляется через случайные промежутки времени  $t_{ki}$ , распределенные по экспоненциальному закону с параметром  $\alpha$  (рис. 1а). Контролируемое устройство, включенное в момент времени  $t = 0$ , находится в исправном состоянии до появления отказа случайное время  $\xi$ . Отказ обнаруживается только через случайный промежуток времени  $t_{oi}$  в тот момент, когда устройство контролируется. После обнаружения отказа он устраняется за случайное время  $t_{ei}$ , устройство включается и процесс повторяется снова.



Таким образом контролируемое устройство может находиться в трех состояниях:

состояние I - устройство исправно;

состояние 2 - устройство неисправно и не восстанавливается;

состояние 3 - устройство неисправно и восстанавливается.

Случайный процесс функционирования контролируемого и контрольного устройства, изображенный на рис. 1а, может быть описан следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} P_1'(t) &= -\lambda P_1(t) + \mu P_3(t) \\ P_2'(t) &= -\alpha P_2(t) + \lambda P_1(t) \\ P_3'(t) &= -\mu P_3(t) + \alpha P_2(t) \end{aligned} \quad (I)$$

где  $\alpha = \frac{1}{T_k}$  - интенсивность контроля;

$T_k$  - среднее время между контрольными проверками;

$P_1(t), P_2(t), P_3(t)$  - вероятности пребывания контролируемой аппаратуры в момент времени в состоянии I, 2 или 3.

Система уравнений (I) решается при начальных условиях:

$$P_1(0) = 1, \quad P_2(0) = P_3(0) = 0$$

т.е. принимается что в момент включения устройство всегда находится в исправном состоянии.

В результате решения системы уравнений (I), выражение для вероятности  $P_1(t)$  - вероятности застать устройство в исправном состоянии в произвольный момент времени запишется в виде:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{\alpha \mu}{\alpha \mu + \alpha \lambda + \mu \lambda} + \\ &+ \frac{\lambda [\lambda - \alpha - \mu - \sqrt{(\alpha - \mu - \lambda)^2 - 4\mu\lambda}]}{(\alpha - \mu - \lambda)^2 - 4\mu\lambda - (\alpha + \mu + \lambda) \sqrt{(\alpha - \mu - \lambda)^2 - 4\mu\lambda}} e^{-ct} + \\ &+ \frac{\lambda [\lambda - \alpha - \mu + \sqrt{(\alpha - \mu - \lambda)^2 - 4\mu\lambda}]}{(\alpha - \mu - \lambda)^2 - 4\mu\lambda + (\alpha + \mu + \lambda) \sqrt{(\alpha - \mu - \lambda)^2 - 4\mu\lambda}} e^{-\omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$C = \frac{\alpha + \mu + \lambda - \sqrt{(\alpha - \mu - \lambda)^2 - 4\mu\lambda}}{2}$$

$$D = \frac{\alpha + \mu + \lambda + \sqrt{(\alpha - \mu - \lambda)^2 - 4\mu\lambda}}{2}$$

Искомая вероятность определится выражением:

$$P(t, \tau) = P_i(t) e^{-\lambda \tau} \quad (3)$$

Предельные случаи для вероятности  $P_i(t)$ .

1а. Стационарное значение ( $t \rightarrow \infty$ )

$$P_i(t) \rightarrow K'_{гк} = \frac{1}{1 + \alpha + \sigma},$$

где  $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\sigma = \frac{\lambda}{\alpha}$

2а. Контроль отсутствует ( $t_k = \infty$ ,  $\alpha = 0$ )

$$P_i(t) = e^{-\lambda t}$$

3а. Непрерывный контроль ( $t_k = 0$ ,  $\alpha = \infty$ ,  $t = \infty$ )

$$K_{гк} = \frac{1}{1 + \alpha}$$

б) Контроль осуществляется периодически через равные промежутки времени продолжительностью  $h$ .

Случайный процесс функционирования контролируемого и контрольного устройства для этого случая изображен на рис. 1б и может быть описан следующей системой рекуррентных алгебраических уравнений, составленных на основании формулы полной вероятности:

$$P_n(t) = P_n e^{-\lambda \tilde{t}} + \bar{P}_n z(\tilde{t})$$

$$P_n = P_{n-1} e^{-\lambda h} + \bar{P}_{n-1} z(h)$$

$$\bar{P}_n = P_{n-1} (1 - e^{-\lambda h}) + \bar{P}_{n-1} \bar{z}(h) \quad (4)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_i = e^{-\lambda h}$$

$$\bar{P}_i = 1 - e^{-\lambda h}$$

В этих уравнениях приняты следующие обозначения:

$P_n(t)$  - вероятность того, что устройство в произвольный момент времени  $t$  будет находиться в исправном состоянии; принимается, что до момента времени  $t$  имело место  $n$  контрольных проверок;

$\tilde{t}$  - промежуток времени от момента последней ( $n-i$ ) контрольной проверки до рассматриваемого момента времени  $t$ ;

$P_i$  - вероятность исправного состояния контролируемого устройства в момент времени  $i \cdot h$  контрольной проверки;

$\bar{P}_i = 1 - P_i$  - вероятность неисправного состояния контролируемого устройства в момент времени  $i \cdot h$ ;

$z(\xi)$  - вероятность того, что неисправное контролируемое устройство будет восстановлено и не откажет снова на промежутке времени  $(0, \xi)$ ;

$\bar{z}(\xi) = 1 - z(\xi)$  - вероятность того, что неисправная контролируемая аппаратура не будет восстановлена или, будучи восстановлена, снова откажет на промежутке времени  $(0, \xi)$ .

Решение системы уравнений (4) имеет следующий вид:

$$P_n(t) = \frac{\mu [e^{-\lambda \tilde{t}} (1 - e^{-\mu h}) - e^{-\mu \tilde{t}} (1 - e^{-\lambda h})]}{\mu (1 - e^{-\mu h}) - \lambda (1 - e^{-\lambda h})} \pm \frac{(1 - e^{-\lambda h}) (\mu e^{-\mu \tilde{t}} - \lambda e^{-\lambda \tilde{t}})}{\mu (1 - e^{-\mu h}) - \lambda (1 - e^{-\lambda h})} \left( \frac{\lambda e^{-\lambda h} - \mu e^{-\mu h}}{\mu - \lambda} \right)^n \quad (5)$$

Знак "+" при четном  $n$ , знак "-" при нечетном  $n$ .

Искомая вероятность определится выражением:

$$P(t, \tau) = P_n(t) e^{-\lambda \tau} \quad (6)$$

Предельный случай. При  $n \rightarrow \infty$  и  $\tilde{t} = 0$

$$P_n \rightarrow K_r' = \frac{\mu (e^{-\lambda h} - e^{-\mu h})}{\mu (1 - e^{-\mu h}) - \lambda (1 - e^{-\lambda h})}$$

Влияние характера контроля на вероятность безотказной работы устройств, для рассмотренных выше случаев, иллюстрируется зависимостями  $P_n(t)$  и  $P_i(t)$ , представленными на рис. 2.

## II

В приводимой ниже группе задач рассматриваются характеристики надежности устройств, для которых при выполнении определенных условий, допускается работа с перерывами. Перерывы могут быть вызваны необходимостью проведения контрольных проверок и восстановительных ремонтов. Основным требованием для таких устройств является требование о необходимости переработки информации заданного объема за определенный срок. Заданный объем информации разбивается на отдельные группы, переработка которых осуществляется поэтапно. В конце каждого этапа тем, либо иным образом производится контроль правильности результатов работы на этапе. Находятся следующие характеристики надежности таких устройств:

1. Вероятность  $P_z(\nu, t)$  переработки информации объемом  $\nu$  за время  $t \geq \nu$  (временная избыточность) при  $z$  этапах;
2. Математическое ожидание  $M[T]$  времени  $T$ , затраченного на переработку информации объема  $\nu$  при  $z$  этапах;
3. Оптимальное число этапов  $z_0$ , на которое надо разбить цикл переработки информации  $\nu$ , чтобы величина  $M[T]$  была минимальной.

Определение этих характеристик дает возможность связать надежность устройств с их производительностью.

Задачи решаются в предположении:

- поток отказов устройств пуассоновский с параметром  $\lambda$ ;
- время  $\tau_a$  проверки и время  $\tau_b$  проверки и восстановительного ремонта принимаются постоянными и равными  $d$  и  $h$  соответственно, за исключением специально оговоренных случаев, когда эти величины принимаются случайными с математическими ожиданиями  $d$  и  $h$ .

Ниже рассматриваются три случая решения поставленной задачи.

а) Контроль осуществляется в конце каждого этапа специальными абсолютно надежными контрольными устройствами. В случае возникновения отказа (сбоя) результаты всех этапов, предшествующих появлению отказов теряются - отсутствуют промежуточные накопители (рис. 3а).

Таким образом, заданный объем информации будет переработан, если за время  $t$  устройство будет работать успешно подряд  $z$  этапов.



Примем  $\tau_n = \tau_e = d$ . Возможное в течение времени  $t$  число этапов определяется выражением:

$$n = \left[ \frac{t}{\frac{d}{2} + d} \right]$$

где  $[x]$  — целая часть  $x$ .

Рассматривая прохождение отдельного этапа, как испытание, а исправное прохождение одного этапа как событие  $A$  с вероятностью  $p = e^{-\frac{\lambda d}{2}}$ , приходим к следующей задаче: найти вероятность  $P_z(n)$  того, что среди  $n$  испытаний будет иметься хотя бы одна серия из  $z$  последовательных испытаний, при каждом из которых произойдет событие  $A$ . Серию  $z$  последовательных успешных испытаний будем называть серией  $\mathcal{G}_z$ .

Серия  $\mathcal{G}_z$  содержится среди  $n$  испытаний лишь в двух несовместных случаях:

- 1) серия  $\mathcal{G}_z$  содержится среди первых  $(n-1)$  испытаний;
- 2) серия  $\mathcal{G}_z$  впервые появилась при  $n$ -ом испытании.

В соответствии с этим:

$$P_z(n) = P_z(n-1) + \Pi_z(n), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_z(n) &= 0 & (n < z) \\ \Pi_z(n) &= p^z & (n = z) \\ \Pi_z(n) &= [1 - P_z(n-z-1)] q p^z & (n > z, q = 1-p). \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая (8), с помощью рекуррентной формулы (7) последовательно получаем:

$$\begin{aligned} P_z(v, t) &= P_z(z+k) = p^z (1+kq), & (k = 0, 1, \dots, z) \\ P_z(v, t) &= P_z(2z+i) = p^z \left\{ 1 + q \left[ i + z - i p^z - \frac{i(i-1)}{2} q p^z \right] \right\} & (9) \\ & & (i = 1, 2, \dots, z) \end{aligned}$$

и т.д.

Зависимость вероятности переработки информации  $P_z(v, t)$  от времени  $t$  при различных значениях  $z$  представлена на рис. 4.

Для определения математического ожидания времени переработки информации ( $\tau_n$  и  $\tau_e$  здесь принимаются случайными величинами)

вводится случайная величина:

$$X_K = x_K - x_{K-1} \quad (K = 1, 2, \dots)$$

где  $x_K$  - момент окончания восстановления устройства после  $K$ -го отказа, либо момент окончания переработки информации (в последнем случае  $X_{K+1} = X_{K+2} = \dots = 0$ ).

Тогда случайное время выполнения задания определится:

$$T = \sum_{K=1}^{\infty} X_K$$

а математическое ожидание времени выполнения задания:

$$M[T] = \sum_{K=1}^{\infty} M[X_K]$$

Используя известные методы нахождения математического ожидания, нетрудно окончательно получить:

$$M[T] = \frac{(1 - e^{-\lambda v})}{(1 - e^{-\frac{\lambda v}{Z}}) e^{-\lambda v}} \left[ e^{-\frac{\lambda v}{Z}} d + (1 - e^{-\frac{\lambda v}{Z}}) h + \frac{v}{Z} \right] \quad (10)$$

Характер изменения математического ожидания  $M[T]$  в зависимости от числа этапов  $Z$  представлен на рис. 5.

Оптимальное число этапов  $Z_0$  находится из условия получения минимума математического ожидания, определяемого формулой (10):

$$\frac{\lambda v}{\sqrt{2\lambda d}} \leq Z_0 \leq \frac{2\lambda v}{\sqrt{2\lambda d}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda d}} \quad (11)$$

Если  $\lambda d$  мало, то с хорошей точностью можно принять:

$$Z_0 \approx \frac{\lambda v}{\sqrt{2\lambda d}} \quad (12)$$

б) Результаты переработки информации на каждом этапе проверяются повторением переработки на этапе до появления двух совпадающих результатов (не обязательно подряд).

Совпадающие результаты считаются правильными. Специальные контрольные устройства отсутствуют. В случае возникновения отказа (обоя) на этапе обесцениваются результаты переработки информации только на этом этапе - предполагается наличие накопителей информации. Организация каждой проверки - вывод данных, сравнение и, в случае необходимости, восстановление - занимает время равное  $d$  (рис. 3б).

Как видно из рис. 3б весь цикл переработки информации состоит из  $Z$  интервалов. На каждом интервале случайное число раз (до

появления двух совпадающих результатов) повторяются вычисления на одном из этапов.

Успешная переработка информации объемом  $v$  за время  $t$  при разбивке этого объема на  $z$  этапов и при проверке результатов повторением эквивалентна тому, что среди  $n$  проверок неуспешных будет не более, чем  $n - 2z$ , так как на каждом из интервалов нужно иметь две успешных проверки, то есть всего 2 (или более) успешных проверок. Используя биномиальный закон, получим вероятность  $P_z(v, t)$  в следующем виде:

$$P_z(v, t) = \sum_{k=2z}^n C_n^k e^{-\frac{k\lambda v}{z}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda v}{z}}\right)^{n-k} \quad (I3)$$

Математическое ожидание времени переработки информации может быть найдено с учетом известного факта, что математическое ожидание числа испытаний до появления испытания с успешным исходом с вероятностью  $p$  равно  $\frac{1}{p}$ . Искомое математическое ожидание запишется в виде:

$$M[T] = 2(v + z\alpha) e^{\frac{\lambda v}{z}} \quad (I4)$$

Оптимальное число этапов:

$$z_0 \approx v \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \quad (I5)$$

в) После каждого этапа делается абсолютно надежная проверка специальным контрольным устройством (рис. 3в). Правильные результаты переработки информации на каждом этапе сохраняются в накопителях. Для успешной переработки информации в течение времени  $t$  необходимо, чтобы из возможного числа  $n$  этапов не более  $n - z$  были неуспешными. В соответствии с этим искомая вероятность определится следующим образом:

$$P_z(v, t) = \sum_{k=z}^n C_n^k e^{-\frac{k\lambda v}{z}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda v}{z}}\right)^{n-k} \quad (I6)$$

Математическое ожидание времени переработки информации в этом случае равно:

$$M[T] = (v + z\alpha) e^{\frac{\lambda v}{z}} \quad (I7)$$

Оптимальное число этапов:

$$z_0 \approx v \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \quad (I8)$$

## ВЫВОДЫ

1. В данной работе предлагается аппарат, позволяющий обоснованно производить оценку некоторых параметров надежности контролируемых восстанавливаемых устройств в соответствии с заданным режимом использования и обслуживания этих устройств.

2. Предлагаемый аппарат позволяет рационально организовывать временную диаграмму использования устройств, что приводит к значительному выигрышу в надежности. Этот выигрыш получается в результате, во-первых, временной избыточности и, во-вторых вследствие разбивки общего объема переработки информации на этапы, что позволяет рационально использовать имеющийся ресурс времени (в частности и из-за того, что результаты успешных этапов не обесцениваются и используются при возобновлении работы устройства).

3. Описанный подход и полученные результаты позволяют выбрать некоторые характеристики системы контроля – вид контроля и периодичность контроля, обеспечивающие заданные требования по надежности.

4. Полученные результаты позволяют связать характеристики надежности устройств с такой важной характеристикой как производительность (быстродействие или пропускная способность).

Действительно, можно ввести такую характеристику устройства, как коэффициент реальной производительности, определяемый отношением чистого времени, необходимого для переработки информации объема  $\psi$  в предположении абсолютной надежности устройства к математическому ожиданию времени переработки информации устройства с учетом его ненадежности, поэтапной работы и времени, необходимого на контроль и восстановление. Коэффициент реальной производительности должен определяться для заданного значения вероятности переработки информации. Знание этих двух характеристик дает возможность, например, решать вопрос о выборе необходимого быстродействия при проектировании цифровых вычислительных машин.



## Литература

1. Кочетков Е.С. - Расчет надежности восстанавливаемых систем с учетом времени восстановления, Автоматика и телемеханика, № 5, 1965г.
2. Беляев Ю.К. - Производительность при наличии двух типов отказов, "Кибернетику на службу коммунизму", том 2, сборник статей под редакцией А.И. Берга, Н.Г. Бруевича и Б.В. Гнеденко, изд. "Энергия", 1964г.
3. Черкесов Г.Н. - Работоспособность восстанавливаемых систем, тезисы докладов 3-й Ленинградской научно-технической конференции по надежности, часть I, изд. ВСНТО, Ленинградский областной совет председателей правлений отраслевых НТО, 1967г.

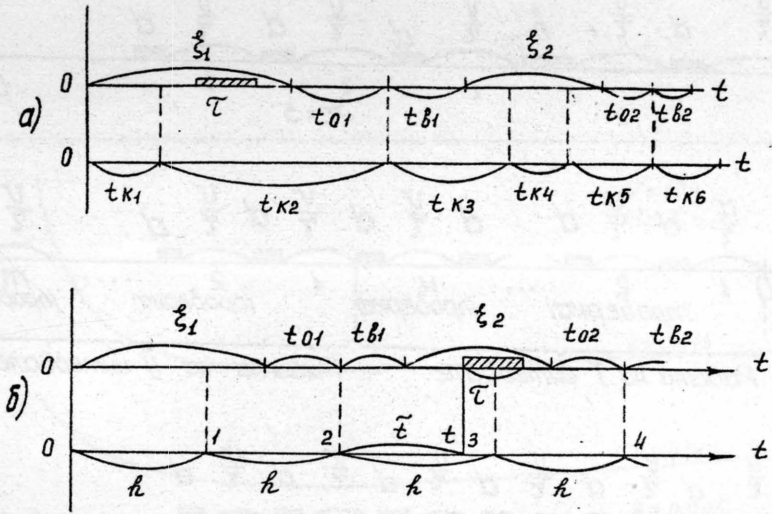


Рис. 1. Случайный процесс функционирования контролируемой и контрольной аппаратуры. а) случайный контроль, б) периодический контроль.

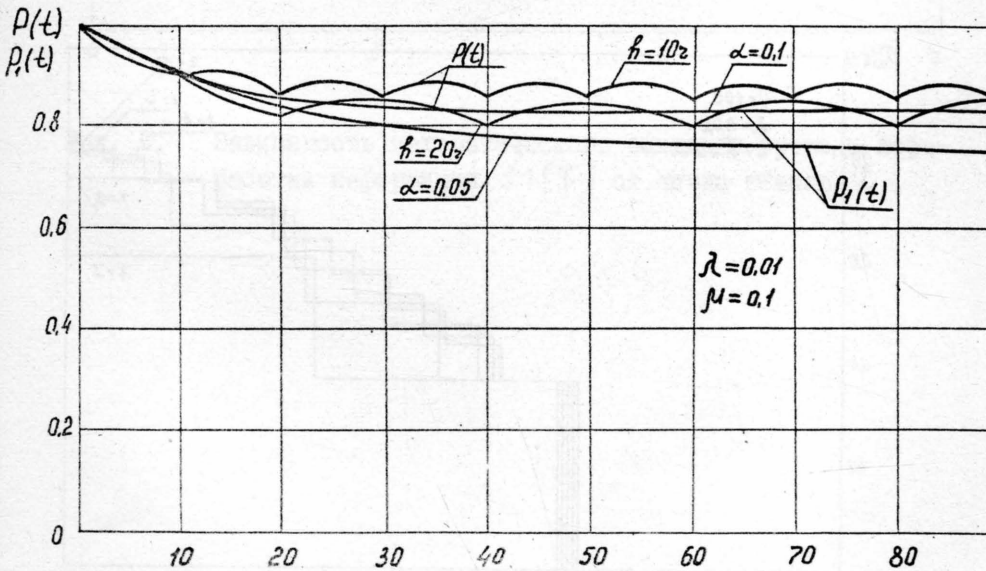


Рис. 2. Зависимости вероятностей  $P_i(t)$  и  $P_n(t)$  от времени  $t$ .



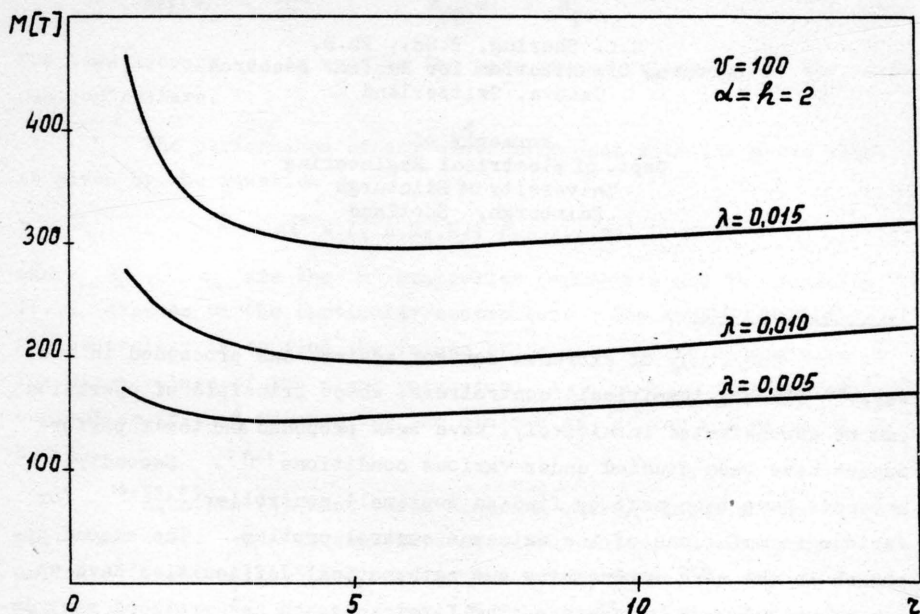


Рис. 5. Зависимость математического ожидания времени переработки информации  $M[\tau]$  от числа этапов  $z$ .



# A COMPARISON OF THE PERFORMANCE OF CERTAIN PERTURBATION EXTREMUM CONTROL SYSTEMS

G.C. Shering, B.Sc., Ph.D.  
European Organization for Nuclear Research  
Geneva, Switzerland

Formerly of  
Dept. of Electrical Engineering  
University of Edinburgh  
Edinburgh, Scotland

## 1. Introduction

The study of extremum control systems has proceeded in two ways. Firstly 'empirical' controllers, whose principle of operation can be demonstrated intuitively, have been proposed and their performances have been studied under various conditions<sup>1-17</sup>. Secondly, attempts have been made to find an 'optimal' controller<sup>18,20,21</sup> for various formulations of the extremum control problem. The second approach is the more interesting but mathematical difficulties have so far prevented much progress. The first approach has produced many interesting suggestions for empirical controllers. The purpose of this paper is to compare three of these empirical controllers by deriving their performances in connection with the same plant; a plant for which the performance of any controller is defined by the value of a single dimensionless variable, and for which the performance of an approximately optimal controller has been determined.

## 2. The extremum control problem

The problem considered here is defined in terms of the continuous-time plant shown in figure 1. The problem is to adjust the plant input  $q$  so that the extremum output  $c$  stays as near its minimum value as possible despite the disturbance  $z$ , and the measurement noise  $\xi$  on the measurable output  $y$ .

The equations for the plant are

$$c = A(z + q)^2 = Ax^2 \quad (1)$$

$$y = c + \xi \quad (2)$$

where  $z$  and  $\xi$  are stationary random variables of spectral density

$$\phi_{zz}(\omega) = \frac{N_z^2}{\omega^2} ; \quad \phi_{\xi\xi}(\omega) = N_\xi^2 \quad (3)$$

The time average  $\bar{c}$  is used as the performance criterion for the various controllers.

The performance of any controller used with the above plant is given by the equation

$$\bar{c} = A\bar{x}^2 = f(A, N_z, N_\xi; c_1, \dots, c_n) \quad (4)$$

where  $c_1 \dots c_n$  are the  $n$  controller parameters and the function  $f(\dots)$  depends on the particular controller. The design problem for any controller is to find the values of  $c_1 \dots c_n$  which minimise  $\bar{c}$  for given values of the plant parameters  $A, N_z, N_\xi$ . The optimal controller is that which gives the minimum of  $\bar{c}$  for any given  $A, N_z, N_\xi$ .

Equation (4) uses three kinds of units; input units, output units and time.  $\bar{c}$  is expressed in output units,  $A$  in (output units) / (input units)<sup>2</sup>,  $N_z$  in (input units) (time)<sup>-1/2</sup>,  $N_\xi$  in (output units) (time)<sup>1/2</sup>. Buckingham's  $\Pi$ -theorem<sup>22</sup> states that the number of variables in equation (4) can be reduced by the number of kinds of units (three here) by using dimensionless products, so that equation (4) becomes

$$\Pi_e = f_d(\Pi_1, \dots, \Pi_n) \quad (5)$$

where suitable dimensionless products are here

$$\Pi_e = \bar{x}^2 \left( \frac{A}{N_z N_\xi} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (6)$$

$$\Pi_1 \dots \Pi_n = \text{suitable combinations of}$$

$$c_1 \dots c_n, A, N_z, N_\xi \quad (7)$$

$\Pi_e$  is proportional to  $\bar{c}$  for any given plant and is a dimensionless performance criterion. Equation (5) shows that the design of any controller consists of choosing the values of  $\Pi_1 \dots \Pi_n$  which minimise  $\Pi_e$ . The resulting value of  $\Pi_e$  gives the comparison with other controllers, the optimal controller having, by definition, the lowest value of  $\Pi_e$ .

The above plant does not contain any time lag. In a practical extremum control problem there are three essential elements<sup>2,8,18,20</sup>

- a) A disturbance, or disturbances, which must be compensated for by the controller
- b) Measurement errors
- c) Plant dynamics, notably lags.

The neglect of lags in this continuous-time plant leads to a requirement of infinite perturbation frequency for best performance. It will be shown, however, that useful results can be obtained with finite perturbation frequencies.

### 3. The Controllers

Four controllers are considered here, three empirical controllers and the approximately optimal controller derived by Roberts<sup>18</sup>.

The empirical controllers are shown in figure 1 and are typical of some of those proposed in the literature<sup>1-12</sup>. All three act by adding a perturbation of some waveform at the input then multiplying the output by the same waveform in order to obtain an estimate of the gradient of the extremum characteristic. A heuristic explanation of the operation of these controllers is given elsewhere<sup>5,7,8</sup>.

The equations for the sine wave perturbation controller are

$$q = -u + a \cos \alpha t \quad (8)$$

$$\frac{du}{dt} = K(B + y) \cos \alpha t \quad (9)$$

and for the square wave perturbation controller

$$q = -u + a p(t) \quad (10)$$

$$\frac{du}{dt} = K(B + y) p(t) \quad (11)$$

where  $p(t)$  is a square wave of unit amplitude and of frequency  $\frac{\alpha}{2\pi}$  Hz. The constant  $B$  added to the plant output has been shown<sup>2,19</sup> to be useful for cancelling the mean value at the plant output when, as here, no band-pass<sup>9,10</sup> or high-pass<sup>18</sup> filter is used before the multiplier. It also allows plants whose extremum characteristic has a finite 'height', e.g.

$$c = Ax^2 + B_1 \quad (12)$$

to be treated in the same way as the plant considered here by a simple

redefinition of B.

These two controllers are described by the four parameters  $a$ ,  $\alpha$ ,  $K$ , and  $B$  and there will therefore be four dimensionless variables on the righthand side of equation (5) for the performance. Suitable dimensionless variables are

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{B}{Aa^2} & \Pi_3 &= \frac{N_z^2}{Ka^2A} \\ \Pi_2 &= \frac{\alpha}{KaA} & \Pi_4 &= \frac{\alpha}{N_z^2} \left( \frac{N_z N_\xi}{A} \right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\quad (13)$$

Equation (5) thus becomes

$$\Pi_e = f_d(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \quad (14)$$

The third controller shown in figure 1 is similar to the square wave perturbation controller except that a sample and hold unit, sampling at the beginning of each perturbation cycle, is included after the integrator. It has been shown<sup>5</sup> that this eliminates the effect of the mean value at the plant output, eliminating the need for the constant  $B$  and so reducing the number of controller variables to three;  $a$ ,  $\alpha$  and  $K$ . Thus equation (5) for the performance becomes

$$\Pi_e = f_d(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \quad (15)$$

where  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  and  $\Pi_4$  are as defined above.

For these empirical controllers the design problem is to find the analytic form of equations (14) and (15) and then to choose  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  and  $\Pi_4$  so as to minimize  $\Pi_e$ . The dimensionless variable  $\Pi_4$  depends only on the perturbation frequency  $\alpha$  and the plant parameters. It is therefore a dimensionless measure of the perturbation frequency. Although equations (14) or (15) determine the value of  $\Pi_4$  for best performance it is of practical interest to know the performance  $\Pi_e$  for other than optimal values of perturbation frequency, especially as the optimal value turns out to be infinity. To provide for this, in the following work  $\Pi_4$  is considered as an independent variable;  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  and  $\Pi_3$  are chosen to minimise  $\Pi_e$  for given values of  $\Pi_4$  and a graph of  $\Pi_e$  against  $\Pi_4$  constructed. The minimum on the graph gives the absolute minimum  $\Pi_e$  obtainable and the optimum value of  $\Pi_4$ . This graph is used in the comparison of the controllers.



#### 4. The performance of the empirical controllers

##### 4.1 The sine wave perturbation controller

The system of figure 1 with the sine wave perturbation controller is a special case of that considered by Jacobs and Shering<sup>2</sup> whose results can be shown<sup>23</sup> to give the analytic form of equation (14) as

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Pi_4}{\Pi_2^3} \right) \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_3 \Pi_4} \right) \left( \Pi_3 + \frac{1}{2} \Pi_3^2 \left( \frac{\Pi_4}{\Pi_2} \right)^3 + 1 \right) \quad (17)$$

provided that  $\Pi_1$  has the value

$$\Pi_1 = -1.5 \left( 1 + \frac{\Pi_4}{\Pi_2^3} \right) \quad (18)$$

this being the best value of  $\Pi_1$  irrespective of the values of  $\Pi_3$  and  $\Pi_4$ .

Equation (17) has been studied using a digital computer function minimisation routine. Various fixed values of the perturbation frequency  $\Pi_4$  were taken and the routine used to find the values of  $\Pi_2$  and  $\Pi_3$  which minimise  $\Pi_e$ . The results are shown in Table 1 and the graph of minimum  $\Pi_e$  against  $\Pi_4$  is shown in figure 2. These results suggest that minimum  $\Pi_e$  is obtained when  $\Pi_4$  tends to infinity, when the minimising value of  $\Pi_2$  also tends to infinity. When  $\Pi_2$  tends to infinity equation (17) becomes

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_4} + \frac{1}{2} \Pi_3 \left( \frac{\Pi_4}{\Pi_2} \right)^2 + \frac{\Pi_2}{\Pi_3 \Pi_4} \right)$$

Minimum  $\Pi_e$  is obtained when  $\frac{\delta \Pi_e}{\delta \Pi_2} = \frac{\delta \Pi_e}{\delta \Pi_3} = 0$

which gives

$$\Pi_e = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.191 \quad (19)$$

with  $\Pi_3 = 1$ ,  $\Pi_2 = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \Pi_4$ , and  $\Pi_4 \rightarrow \infty$  (20)

In order to verify these results an analogue computer simulation of the system was carried out, to an accuracy estimated<sup>23</sup> to be better than 5%. The system was simulated for various values of the perturbation frequency  $\Pi_4$ , the other parameters taking their best values, according to Table 1 and equation (18). The resulting measured values of  $\Pi_e$  are shown on the graph of figure 2. These results suggest that equations (17) and (18) are accurate for high perturbation frequencies, though becoming inaccurate for values of  $\Pi_4$  less than 10.

#### 4.2 The square wave perturbation controller

The square wave perturbation system of figure 1 has been studied<sup>23</sup> in the same way as the above sine wave perturbation system, and the results take the same form as those discussed above for the sine wave perturbation system, the equations corresponding to equations (17) and (18) being

$$\Pi_e = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{230}{\Pi_2^3} \right) \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_3 \Pi_4} \right) \left( \Pi_3 + \Pi_3^2 \left( \frac{\Pi_4}{\Pi_2} \right)^3 + 4 \right) \quad (21)$$

provided that  $\Pi_1$  has the value

$$\Pi_1 = -3 \left( 1 + \frac{230}{\Pi_2^3} \right) \quad (22)$$

Equation (21) was studied in the same way as equation (17); the graph of minimum  $\Pi_e$  against  $\Pi_4$  is shown in figure 3 and the minimising values of  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  and  $\Pi_3$  in Table 2. These results were also verified by analogue computer simulation, and the experimental results are shown on figure 3. As with the sine wave perturbation system minimum  $\Pi_e$  is obtained when  $\Pi_4$  tends to infinity so that equation (21) becomes

$$\Pi_e = \frac{1}{4} \left( \frac{\Pi_2}{\Pi_4} + \Pi_3 \left( \frac{\Pi_4}{\Pi_2} \right)^2 + \frac{4\Pi_2}{\Pi_3 \Pi_4} \right) \quad (23)$$

minimum  $\Pi_e$  is obtained by setting  $\frac{\delta \Pi_e}{\delta \Pi_2} = \frac{\delta \Pi_e}{\delta \Pi_3} = 0$  which gives

$$\Pi_e = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.191 \quad (24)$$

when  $\Pi_3 = 4$ ,  $\Pi_2 = 2 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \Pi_4$  and  $\Pi_4 \rightarrow \infty$  (25)

#### 4.3 The square wave perturbation controller with sample and hold

The system of figure 1 with the third controller as a special case of the 'derivative sensing' system studied by Chang<sup>4</sup>. It has been shown<sup>23</sup> that Chang's results for this system, expressed in terms of the variables used here, give the following equations for the best design and resulting performance of the system:

$$\Pi_e = \frac{1 + 2b}{[2b(1 - b^2)]^{\frac{2}{3}}} \quad (26)$$

when  $\Pi_2 = \frac{4\pi}{1 - b}$ ,  $\Pi_3 = \frac{2(1 + b)}{b}$  (27)

where  $b$  is an auxiliary parameter obtained from the perturbation frequency  $\Pi_4$  by the equation

$$\frac{4b^2}{(1-b)^3(1+b)} = \left( \frac{\Pi_4}{2\pi} \right) \quad (28)$$

For various values of  $\Pi_4$ ,  $b$  can be found by solving (numerically) equation (28) then  $b$  can be substituted in equations (27) to get the minimizing values of  $\Pi_2$  and  $\Pi_3$  and in equation (26) to get the minimum value of  $\Pi_e$  for the given value of  $\Pi_4$ . The results are given in Table 3 and the graph of  $\Pi_e$  against  $\Pi_4$  is shown in figure 4. As with the other two controllers it is seen that the minimum value of  $\Pi_e$  is obtained as  $\Pi_4$  tends to infinity. In order to verify the above results the system was simulated on an analogue computer. The measured values of  $\Pi_e$  for various values of  $\Pi_4$ ,  $\Pi_2$  and  $\Pi_3$  taking their theoretical values, are shown on figure 4, along with the theoretical ones. As with the sine and square wave perturbation systems, it is seen that the experimental results confirm the theoretical values only for high perturbation frequencies, say for  $\Pi_4 > 10$ .

When  $\Pi_4$  tends to infinity, the parameter  $b$  tends to unity and the equations for the system become

$$\Pi_e = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.191 \quad (29)$$

$$\text{with } \Pi_3 = 4, \quad \Pi_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \Pi_4 \quad \text{and} \quad \Pi_4 \rightarrow \infty. \quad (30)$$

## 5. The comparison of the controllers

In order to facilitate the comparison the three theoretical graphs of  $\Pi_e$  against  $\Pi_4$  are plotted together in figure 5 and the three sets of experimental results are plotted together in figure 6.

The first point of note is that the optimum value of perturbation frequency  $\Pi_4$  is infinity, when all three controllers give the same performance, given by  $\Pi_e = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.191$ . This is identically the performance obtained by Roberts<sup>18</sup> for an approximately optimal controller.

For finite perturbation frequencies the experimental results have shown that the theoretical curves are accurate only for perturbation frequencies above  $\Pi_4 = 10$ . This is the range of most interest, however, as the performance rapidly gets worse as  $\Pi_4$  is reduced below 10. Over this range both the theoretical and experimental results of figures 5 and 6 show that there is little difference between the sine and square wave perturbation controllers, but that the controller with the sample and hold unit is

noticeably worse - about 25% greater  $\Pi_e$  at  $\Pi_4 = 10$ . This latter controller has the advantages, however, of eliminating the need to know the extremum height  $B_1$  in equation (12), and of being simpler as there is no parameter  $B$  to provide or to adjust. In addition it can have practical advantages such as allowing the multiplier to be replaced by a switch, or of making fewer demands on the computer in a computer-controlled situation as the input need only be adjusted twice per perturbation cycle.

In the formulation of the problem no dynamic lags were considered, though these are inevitable in any practical situation. They may, however, be sufficiently small so that the design procedures considered here can be applied with little error. The graphs of figures 5 and 6 show that the performance tends asymptotically to its best value as the perturbation frequency increases. Thus a finite perturbation frequency can be found where the performance is not much worse than the ideal, e.g.  $\Pi_4 = 10$  when  $\Pi_e \approx 1.25$  for the sine and square wave perturbation controllers and  $\Pi_e \approx 1.57$  for the controller with the sample and hold unit, compared with the ideal  $\Pi_e = 1.191$ . If the lags are negligible compared with this perturbation frequency, then the design given above for this perturbation frequency can be used. The higher the value of perturbation frequency which can be used and for which the lags remain negligible then the lower will be the difference between the actual  $\Pi_e$  and the ideal value.

#### Acknowledgements

The author wishes to thank Dr. O.L.R. Jacobs for his helpful discussions on the work and for reading the draft manuscript, and also Professor W.E.J. Farvis for the use of the facilities of the Department of Electrical Engineering, University of Edinburgh.

#### References

1. Tsien, H.S.: "Engineering Cybernetics", Chapter 15, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1954
2. Jacobs, O.L.R. and Shering, G.C.: "Design of a single-input sinusoidal-perturbation extremum-control system", Proceedings IEE, January, 1968
3. Feldbaum, A.A.: "Problems in the statistical theory of systems of automatic optimisation", Proceedings IFAC, Moscow, 1960



4. Chang, S.S.L.: "Optimisation of the adaptive function by z-transform method", Transactions AIEE part II, July 1960
5. Douce, J.L. and Bond, A.D.: "The development and performance of a self-optimising system", Proceedings IEE, March 1963
6. Jelonek, Z.J., Gardiner, A.B. and Raeside, D.: "A theoretical comparison of three types of self-optimising systems", in "Advances in automatic control" UKAC Congress, Nottingham, 1965
7. Grensted, P.E.W. and Jacobs, O.L.R.: "Automatic optimisation", Trans.Soc.Instr.Technol., Vol. 13, No. 3, 1961
8. Jacobs, O.L.R.: "Hill climbing", Control, February 1962
9. Eveleigh, V.W.: "General stability analysis of sinusoidal perturbation extrema searching adaptive systems", Proceedings IFAC, Basel, 1963
10. Nightingale, J.M.: "Parameter perturbation adaptive control systems with imposed constraints", Proceedings IEE, Part C, Monograph No. 518, May 1962
11. Pervozvanskii, A.A.: "Continuous extremum control systems in the presence of random noise", Automation and Remote Control, Vol. 21, No. 7, 1960
12. Mesch, F.: "A comparison of the measuring time in self-adjusting control systems", Proceedings IFAC, Basel, 1963
13. Ng, K.C.: "High-frequency perturbation in hill-climbing systems", Proceedings IEE, November 1964
14. Jacobs, O.L.R. and Wonham, W.M.: "Extremum control in the presence of noise", Journal of Electronics and Control, September 1961
15. Perelman, I.I.: "A comparison of the simplest gradient and extrapolation systems", Automation and Remote Control, Vol. 24, No.4
16. Van der Grinten, P.M.E.M.: "The application of random test signals in process optimisation", Proceedings IFAC, Basel 1963
17. Douce, J.L. and Ng, K.C.: "The use of pseudo-random signals in adaptive control", IFAC (Teddington) Symposium, 1965
18. Roberts, J.D.: "Extremum or hill-climbing regulation: a statistical theory involving lags, disturbances and noise", Proceedings IEE, January 1965
19. Discussion on "Performance of hill-climbing systems - the gradient estimation problem", Proceedings IEE, August 1965
20. Florentin, J.J.: "An approximately optimal extremal regulator", Journal of Electronics and Control, August 1964
21. Jacobs, O.L.R.: "Extremum control and optimal control theory", IFAC Symposium on Identification in Automatic Control, Prague, 1967

22. Buckingham, E.: "Model experiments and the forms of empirical equations", Transactions AMI Mech. E., Article No. 1487, 1915
23. Shering, G.C.: "The analysis and design of linearised single-input extremum control systems", Ph.D. thesis, University of Edinburgh, 1966

Tables of minimum  $\Pi_e$  for some given values of  $\Pi_4$ , together with the minimising values of  $\Pi_2$  and  $\Pi_3$

TABLE 1 Sine wave perturbation controller

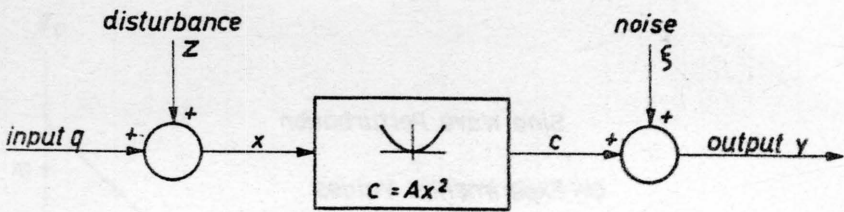
$\Pi_4$	100.0	80.0	40.0	20.0	10.0	8.0	4.0	2.0	1.0	0.8	0.4	0.2	0.1
$\Pi_e$	1.191	1.191	1.192	1.203	1.26	1.30	1.59	2.28	3.8	4.6	8.7	16.9	33.5
$\Pi_2$	79.4	63.6	32.0	16.8	10.0	8.8	6.6	5.45	4.88	4.77	4.57	4.49	4.46
$\Pi_3$	1.001	1.002	1.012	1.085	1.43	1.65	2.99	6.36	15.2	20.6	54.6	150	421

TABLE 2 Square wave perturbation controller

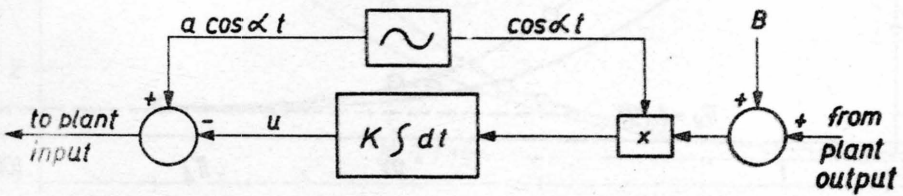
$\Pi_4$	100.0	80.0	40.0	20.0	10.0	8.0	4.0	2.0	1.0	0.8	0.4	0.2	0.1
$\Pi_e$	1.191	1.191	1.192	1.199	1.24	1.27	1.50	2.09	3.39	4.07	7.57	14.7	29.1
$\Pi_2$	158	127	63.8	33.0	19.1	16.6	12.0	9.76	8.61	8.39	7.98	7.81	7.75
$\Pi_3$	4.002	4.004	4.031	4.234	5.28	6.00	10.4	21.6	50.5	67.9	178	488	1365

TABLE 3 Controller with sample and hold

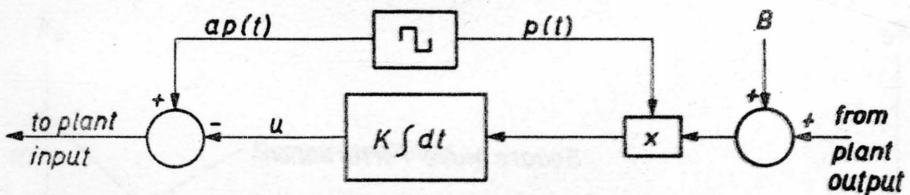
b	.923	.905	.820	.676	.469	.397	.199	.082	.030	.022	.007	.002	.001
$\Pi_4$	98.75	79.24	39.76	19.96	9.97	7.99	4.00	1.00	0.98	0.8	0.37	0.16	0.1
$\Pi_e$	1.223	1.231	1.274	1.363	1.57	1.67	2.29	3.69	6.78	8.26	17.4	39.8	63.1
$\Pi_2$	163.2	132.3	69.8	38.8	23.7	20.8	15.7	13.7	13.0	12.9	12.7	12.6	12.6
$\Pi_3$	4.167	4.210	4.439	4.959	6.26	7.04	12.1	26.4	68.7	92.9	287	1002	2002



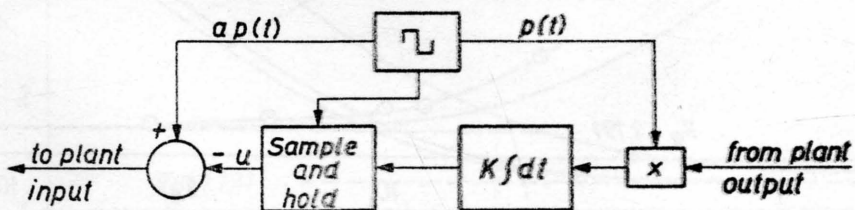
### PLANT



### Sine wave perturbation controller



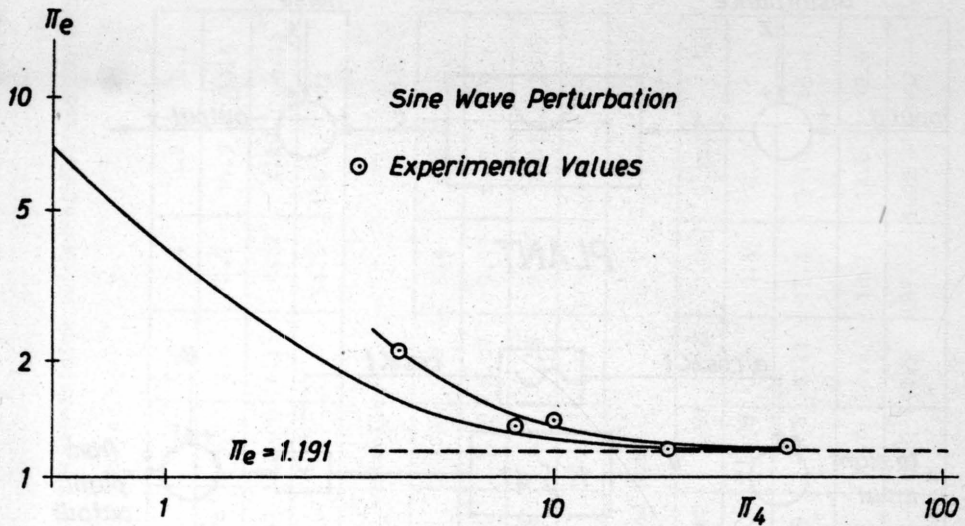
### Square wave perturbation controller



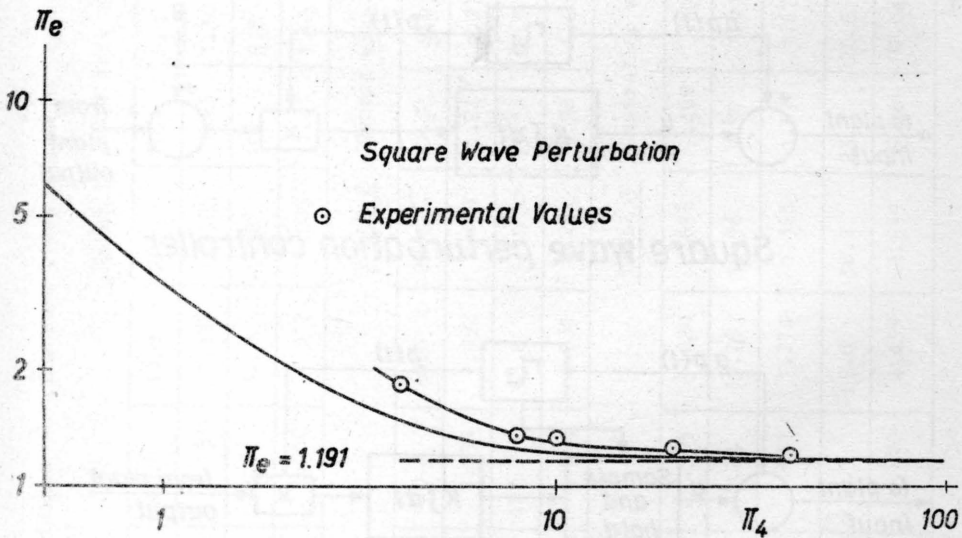
### Controller with sample and hold

Figure 1 Schematic diagram of the plant and the three empirical controllers

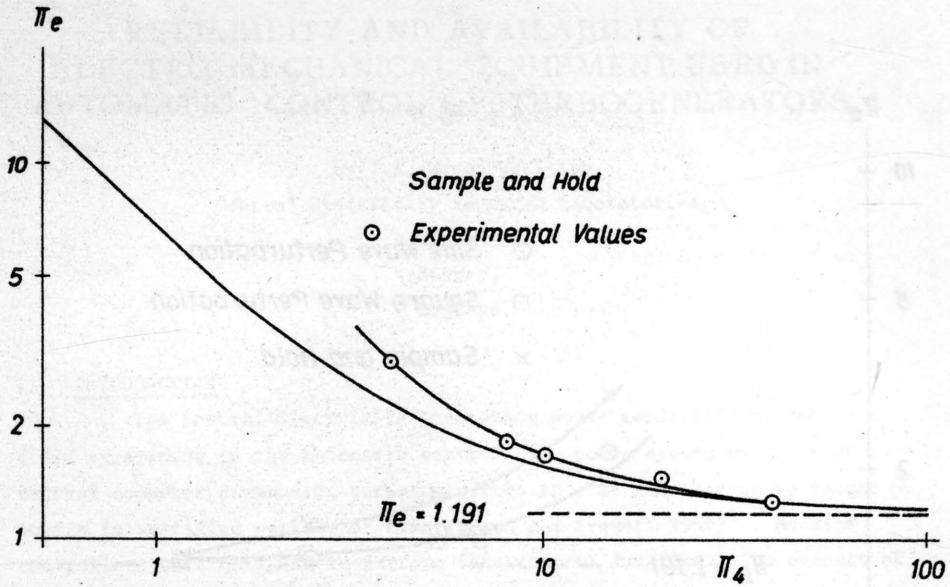




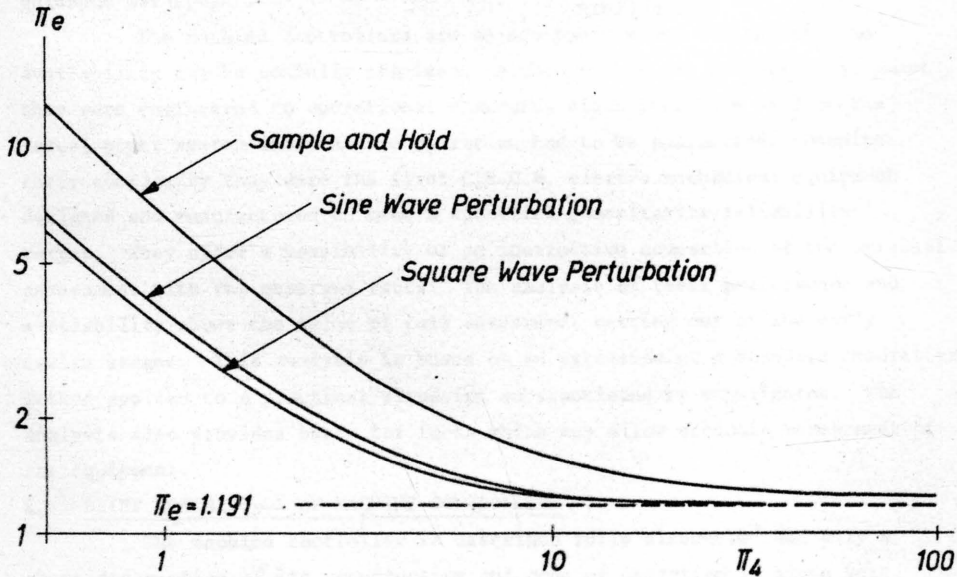
**Figure 2** Sine wave perturbation: Theoretical graph of average error  $\pi_e$  against perturbation frequency  $\pi_4$ , together with experimental results



**Figure 3** Square wave perturbation: Theoretical graph of average error  $\pi_e$  against perturbation frequency  $\pi_4$ , together with experimental results



**Figure 4** Controller with sample and hold: Theoretical graph of average error  $\pi_e$  against perturbation frequency  $\pi_4$ , together with experimental results



**Figure 5** Graphs of theoretical  $\pi_e$  against  $\pi_4$  for the three controllers

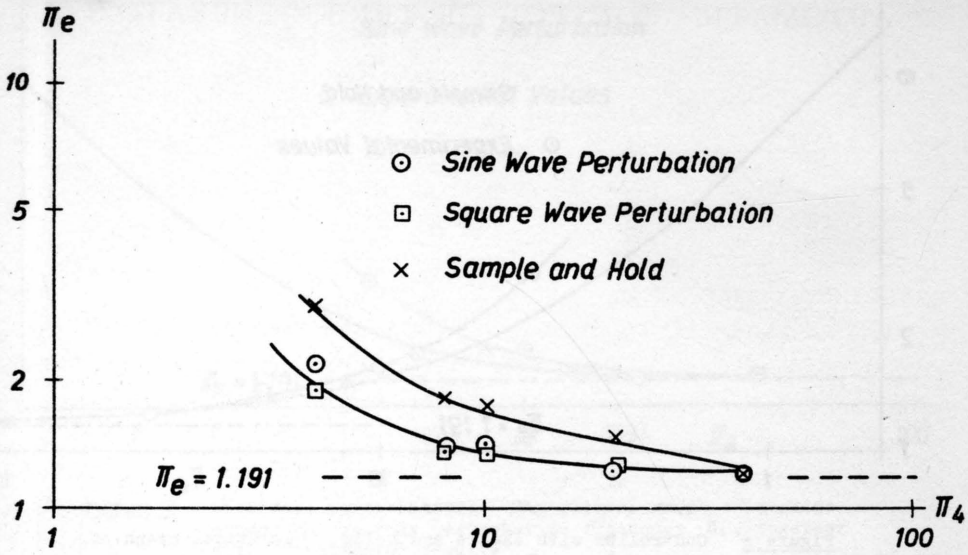


Figure 6 Graphs of experimental  $\pi_e$  against  $\pi_4$  for the three controllers

# RELIABILITY AND AVAILABILITY OF ELECTRO-MECHANICAL EQUIPMENT USED IN AUTOMATIC CONTROL OF TURBOGENERATORS

by T.A. Wesolowski Low,  
Central Electricity Research Laboratories,  
Leatherhead,  
Surrey,  
England.

## 1. INTRODUCTION

The Central Electricity Generating Board conducted in 1966/67 a field experiment on the automatic control of a power system by means of a central computer commanding turbogenerators to come smoothly up to target powers in specified periods of time (Moran and Prewett 1969)<sup>1</sup>. Machine controllers were designed to perform this control function. The objects of the experiment were to demonstrate that the developed control system could become a fully operational tool and to obtain data for future guidance. Reliability of the control equipment was among the main topics on which guidance was sought.

The machine controllers are an equipment whose reliability and availability may be usefully examined. Although they are prototype equipment they were engineered to operational standards since they were used on the actual power system whose secure operation had to be guaranteed. Despite their complexity they were the first C.E.G.B. electro mechanical equipment designed and manufactured to meet a specified quantitative reliability target. They offer a possibility of an instructive comparison of the original assessment with the observed facts. The analysis of their performance and availability shows the value of full assessment carried out at the early design stages. This analysis is based on an extension of a standard theoretical method applied to a practical situation substantiated by experiences. The analysis also provides bases for facts which may allow economic assessment of the equipment.

## 2. BRIEF DESCRIPTION OF MACHINE CONTROLLERS

The machine controller is described fully elsewhere<sup>2</sup> and only a short description of its construction and mode of operation is given here. The machine controller consists of:

- (i) Remote control cubicle for insertion of operational limits and general monitoring of equipment



(ii) Interpolator for verification of the target powers commanded by the central computer and for production of the control signal

(iii) Frequency controller for production of an input to the interpolator proportional to the deviation of the power system frequency from the nominal 50 Hz.

(iv) Rate limiter for protection of the controlled turbogenerator

(v) Speeder motor actuator for the control of the turbine steam valves as commanded by the signal from the interpolator

(vi) Power supply and transformer tray units with protective transient suppressing circuits.

The interpolator and the rate limiter consist of analogue computing sections utilizing electronic and electro-mechanical components. The other units and the logical parts of the interpolator are made up from conventional discrete components.

Interpolation from the actually generated to the commanded target powers is normally carried out in a 5 or 10 minutes period in a mode designated as T-minutes operation. In addition half hourly targets are issued by the central computer to the stations two hours ahead and are stored there indestructively. Thus in the event of a breakdown of the T-minutes commands (e.g. due to computer or telecommand equipment failures) the station can operate on automatic control for two hours interpolating to meet 30 minutes targets. In the existing designs of interpolators the 30 minutes facilities provide a small amount of redundancy which does not improve noticeably the reliability or availability of the interpolators as such due to the unavoidable complications of the automatic switch-over circuits. However these facilities offer the operators sufficient time either to repair the failed equipment or to make arrangements for manual control of the power system. If the half hourly mode of operation had not been provided as a reversionary mode the power system would be inconveniently difficult to control and be in an insecure state immediately after a breakdown of the commands.

### 3. PREDICTION OF RELIABILITY AND THE OBSERVED PERFORMANCE OF MACHINE CONTROLLERS

The manufacturer of the equipment produced a prediction of the mean time between failures of 26000 hours based on the information on the proposed design which was available at the conclusion of the feasibility studies. This prediction was very optimistic because (as is common experience), the final product was at least twice as complex as visualised at this early stage (Table 1). The useful outcome of this assessment was that the manufacturer was reliability conscious with beneficial effects.

In less than two and a half years 31 satisfactory complex equipments were designed, produced, installed and commissioned.

The failure rate data used for prediction of reliability (Table 2) are based on experience with large populations of electronic components observed in power station applications. Where our experience was insufficient data of "assumed" failure rates published by Green and Bourne<sup>3</sup> (1966 - U.K.A.E.A.) were used. These "assumed" rates are estimates which are claimed to yield realistic predictions. It was found in our previous work that the assumption of constant failure rate of both instruments and their components is valid in practice, within the spans of the lives of the instruments. Thus a summation of the failure rates of the components yields the failure rate of the equipment in which they are used, provided it does not contain redundancy.

The calculations of reliability parameters are demonstrated by the example of the torque convertor (used to compare the generated with the interpolated powers). The torque convertor is a relatively new device with no known recorded history. Its failure rate can be synthesised from its construction (Fig. 1). It consists of a setting shaft which rotates in a ball bearing and is mechanically coupled to a torque shaft by two spiral springs. The torque shaft is suspended by two pivot bearings at its ends. It carries five coils (frequency bias, torque motor, sensing and two current coils). Each coil has two flexible connections coupling it with the outside circuits. In addition the torque convertor has: three coils (one excitation and two voltage coils), seven resistors (one high stability carbon film, two metal oxide and four special wire wound resistors), three capacitors (miniature metallized polyester) and a permanent magnet all mounted in fixed mechanical positions. The stressing of all the mechanical components is very light thus during normal life of equipment the wear-out mechanisms will be negligible. The predicted failure rate (Table 3) is  $0.45 \times 10^{-6}$  per hour i.e. the predicted mean time between failures is  $2.2 \times 10^6$  hours.

For the whole machine controller the predicted failure rate and mean time between failures are  $137.2 \times 10^{-6}$  per hour and 7,300 hours respectively. The expected number of failures among 31 controllers working during an 18 months period is 41 - 70 at 95 percent confidence level. We would expect between 16 and 35 failures due to the electronic components and between 21 and 41 due to the electro-mechanical and mechanical components.

#### 4. COMPARISON OF OBSERVED AND PREDICTED FAILURES

During the 18 months of observations there were altogether 141 occasions of maloperation of the equipment which the operating staff thought were due to the failures of the machine controllers. Of these 71 i.e. 50 percent

were found to be due to other causes: e.g. wrong setting of controls, incorrect instructions from the computer, genuine turbine faults, unidentified faults etc. The incidence of such events being reported as failures of the machine controllers diminished during 18 months from over 6 per month to less than one per month.

The predicted number of failures of the electronic components tended to be pessimistic, i.e. for most types the number of failed components were equal or nearly equal to the lower predicted values. Joints, plugs and connectors are a notable exception with 14 reported against 1 - 11 expected failures. However during the first seven months of the experiment (June - December 1966) ten various connectors failed but only four during the remaining 11 months of the experiment. For the remaining components there is no indication of time dependent failures.

The mechanical components failed as often as expected with three exceptions: cross shaft bearings (5 times), brakes (8 times against 1 - 8 predicted) and switches (8 times against 1 - 9 predicted). The cross shaft bearings and brakes have been identified as faulty designs and could be improved considerably. Only cam operated switches failed and stiffening of their mountings would reduce considerably the incidence of failures.

The interpolator and power supply units were predicted to be least reliable followed by the rate limiters. In fact 24 failures of the interpolators (14 - 33 predicted), 16 of the rate limiters (1 - 10 predicted) and 5 of power supply units (10 - 26 predicted) occurred. The mechanical design imperfections affected only the interpolators and the rate limiters. If these imperfections were corrected then the predictions would represent the actual performance for these and the remaining subunits.

Corrective modifications would result in a reduction of the observed failures from 70 to 54 against predicted 41 to 70 and the observed point estimate of the mean time between failures would have been 7,700 hours (with 95 percent confidence limits of 5,900 and 10,500 hours). We can see that the predicted and observed mean times between failures (7,200 and 5740 hours) are comparable, and that the achievable reliability would be better than the predicted (m.t.b.f. approximately 5 percent longer) if modifications were carried out. This indicates that our failure rates data are slightly pessimistic and that the predictions if carried out on the final design are a useful and realistic guide to the potentialities of the equipment. The same observations were made on all the control equipments used in the field experiment including those installed in the area grid control centre and on the investigations carried out by us on other instrumentation schemes.

## 5. AVAILABILITY OF EQUIPMENT

The theoretical and practical assessments of reliability can be used for estimating the required maintenance effort, the cost of spare parts, and the calculation of the availability of the equipment. Thus they can provide data for an economic evaluation of the equipment. The average period of time spent actively by a specialist on repairing the machine controller was about 2 hours per fault. In the operational equipment the maintenance would be carried out by a less well qualified technician engaged also on other tasks. A whole day could be considered to be more realistic (but perhaps pessimistic) assessment of the average time a machine controller would be out of action following a failure.

The availability of an equipment may be defined formally as the probability that it will be operating satisfactorily at any point in time, when used under stated conditions, where the total time considered includes operating time, active repair time and any other "down" (non-operating) time due to any causes what-so-ever<sup>4</sup>. The maximum achievable availability is obtained if the down time consists only of repair time and is given by

$$A_M = \frac{\theta}{\theta + \rho}$$

where  $\theta$  = assessed mean life of equipment (= assessed mean time between failures if the assumption of a constant failure rate is valid)  
 $\rho$  = assessed mean time for repair.

Thus for the machine controllers the observed availability was 99.583 percent, the predicted 99.672 percent, and if the modifications are carried out it will become 99.689 percent. These figures are more informative if we express them as: 1 day in 239,304 and 321 days respectively, the machine controller would not be available for the automatic control of the turbo-generator. Alternatively we can say that on the average in the present unmodified design  $1\frac{1}{2}$  day and if modified just over one day (1.14) per year would be required for repairs of machine controllers.

## 6. EFFECTS OF REDUNDANCY

If redundancy is present it will generally increase the availability of the equipment to perform its functions, although it will result in more failures of the components and longer maintenance periods. In the machine controllers the redundancy was engineered only into the interpolator by providing the facilities of operating it in either T or 30 minutes interpolation modes. These facilities were not provided to affect the availability of the controllers as such, but to make the operation of the whole power system convenient and secure. Consequently



the redundancy introduced is not very effective in improving the availability of the controllers themselves. However it is advantageous to analyse its effects.

### 6.1 Brief Description of the Interpolator

Fig. 2 is a reliability diagram of the existing design of the interpolator. The T and 30 minutes target powers (calculated by the computer) are fed directly to the verifying blocks B (T minutes) and D2 (30 minutes), at the appropriate times. The cycle of operations is commanded by the T-minutes clock-block A- which is controlled by the signals from the computer. Block C represents those parts of the interpolator which process the T-minutes data and pass them to block F consisting of the torque convertor with its associated components. Block Z monitors Block B for the correct T-minutes data. In the event of either the data being wrong or of a failure of the block B the switch (S1A and S1B) is operated by block Z. The 30 minutes clock-D1- and Blocks D2 and E which are the 30 minutes equivalents of B and C are now in the active part of the system. Should the 30 minutes commands or D2 fail no input will be provided for block E, i.e. the interpolation will be stopped and the turbogenerator will be operated at the last target power. When correct T data is received Z switches the interpolator back into its original mode. In addition a switch S2 for manual control is provided.

The failures of the components of the switch (S1) and of its energizing mechanism (block Z) can have the following effects on the operation of the interpolator and machine controller:

- (i) cause a switch over to 30 mins mode although T data are correct and Block B is satisfactory - "static failure"  $\overline{Z1}$ , with a predicted failure rate  $\lambda_{Z1}$
- (ii) prevent a switch over to 30 mins mode when T data are incorrect or when Block B fails, "dynamic failure"  $\overline{Z2}$  with predicted failure rate  $\lambda_{Z2}$
- (iii) cause a total failure of the interpolator - e.g. stoppage or interpolation to wrong target etc. - predicted failure rate  $\lambda_{Z3}$ .

Table 4 lists the predicted failure rates  $\lambda_A, \lambda_B, \dots$  etc. of blocks A, B ... etc. The failure rate of block F' ( $\lambda_{F'}$ ) includes the failures due to its components and  $\lambda_{Z3}$ .

### 6.2 Mean Life of the Interpolator in the Automatic Control Modes

The interpolator will function satisfactorily during a period of time 0 - t if the following conditions exist:

- (a) Blocks A and F' are satisfactory;

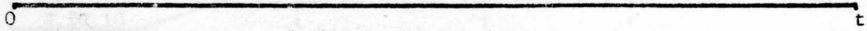
$$\text{probability } R_{AF}(t) = \exp [-(\lambda_A + \lambda_{F'})t] \quad \dots (1)$$

and (b) the redundant network of Blocks B, C, D1, D2, E and Z does not fail.

Condition (b) will be satisfied if:

(b1) Blocks B, C do not fail, and if a static failure ( $\overline{Z1}$ ) of Block Z does not occur during time 0 - t:

B,C,Z1

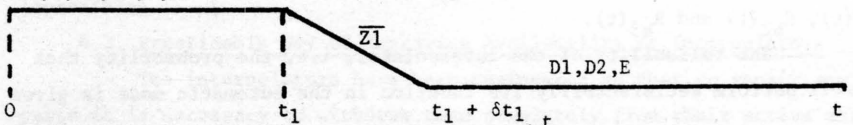


$$\text{probability } R_{b1}(t) = \exp [-(\lambda_{\tau} + \lambda_{Z1})t] \quad \dots(2)$$

where  $\lambda_{\tau} = \lambda_B + \lambda_C$

or (b2) Blocks B, C, D1, D2, E and Z do not fail up to time  $t_1$  ( $\overline{Z1}$  does not occur) and at time  $t_1$  static failure of Z ( $\overline{Z1}$ ) occurs and D1, D2, E continue to operate satisfactorily until time t:

B,C,D1,D2,E,Z1

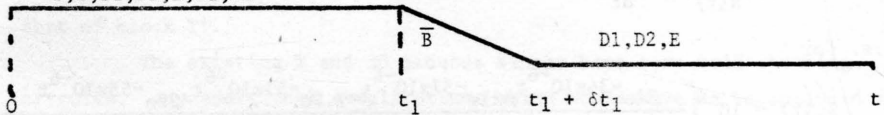


$$\text{probability } R_{b2}(t) = \lambda_{Z1} \exp (-\lambda_{30}t) \int_{t_1=0}^t \exp [-(\lambda_{\tau} + \lambda_{Z1})t_1] dt_1 \quad \dots(3)$$

where  $\lambda_{30} = \lambda_{D1} + \lambda_{D2} + \lambda_E$ .

or (b3) Blocks B, C, D1, D2, E and Z are satisfactory up to a time  $t_1$  and if B fails at time  $t_1$  and if Z switches over to 30 minutes mode (is  $\overline{Z2}$  dynamic and  $\overline{Z1}$  static failures do not occur) and if Blocks D1, D2, E continue satisfactorily until time t:

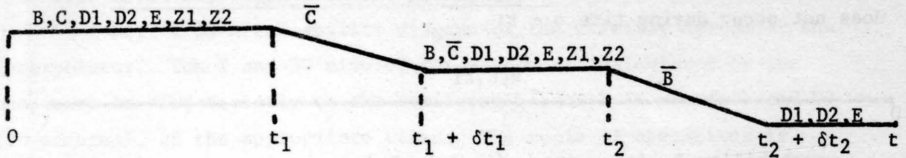
B,C,D1,D2,E,Z1,Z2



$$\text{probability } R_{b3}(t) = \frac{\lambda_B \exp [-\lambda_{30} t]}{\lambda_{\tau} + \lambda_{Z2} + \lambda_{Z1}} \{1 - \exp [-(\lambda_{\tau} + \lambda_{Z2} + \lambda_{Z1})t]\} \quad \dots(4)$$

or (b4) Blocks B, C, D1, D2, E and Z are satisfactory up to a time  $t_1$  when C fails, and Block B fails at time  $t_2$  and Z will switch over to 30 mins mode of operation (i.e.  $\overline{Z2}$  dynamic and  $\overline{Z1}$  static failures do not occur) and Blocks D1, D2, E do not fail before time t. The only restriction on  $t_2$  is that  $t_2 - t_1 < 30$  mins i.e. that  $t_2$  does not occur later than the duration of the periods between the checks of close scrutiny of the whole system by the control computer at the control centre. The failures of Blocks C and B (in that order) will not have serious effects on the security or economy

of the power system due to the inertia of the whole system, its spare generating capacity and periodic (T and 30 minutes) re-allocations of loading of alternators as well as the actions of the control personnel. The safety of the alternator is protected by such means as rate limiters.



Probability

$$R_{b4}(t) = \lambda_C \lambda_B \exp[-\lambda_{30} t] \int_{t_1=0}^t \exp(-\lambda_C t_1) \int_{t_2=t_1}^{t_1+0.5} \exp[-(\lambda_B + \lambda_{Z2} + \lambda_{Z1}) t_2] dt_2 dt_1 \dots (5)$$

Solving equations 2 - 5 shows that  $R_{b4}(t)$  is negligible in comparison with  $R_{b1}(t)$ ,  $R_{b2}(t)$  and  $R_{b3}(t)$ .

The reliability of the interpolator, i.e. the probability that it will perform satisfactorily its function in the automatic mode is given by:

$$\begin{aligned} R_I(t) &= R_{AF}(t) (R_{b1}(t) + R_{b2}(t) + R_{b3}(t) + R_{b4}(t)) \\ &= \exp(-34 \times 10^{-6} t) + 0.564 \exp(-37 \times 10^{-6} t) - \\ &\quad 0.41 \exp(-55 \times 10^{-6} t) - 0.154 \exp(-51 \times 10^{-6} t) \end{aligned}$$

Reliabilities predicted for 1 week, 1 year and 3½ years (30000 hours) are:

$$R_I(168) = 0.996, R_I(8760) = 0.795, R_I(30000) = 0.433$$

Instantaneous failure rate of the interpolator is given by:

$$Z(t) = \frac{-1}{R(t)} \times \frac{dR(t)}{dt}$$

i.e. for

$$Z_I(t) = 10^{-6} \left\{ \frac{34e^{-34 \times 10^{-6} t} + 21e^{-37 \times 10^{-6} t} - 7.8e^{-51 \times 10^{-6} t} - 22e^{-55 \times 10^{-6} t}}{e^{-34 \times 10^{-6} t} + 0.564e^{-37 \times 10^{-6} t} - 0.154e^{-51 \times 10^{-6} t} - 0.41e^{-55 \times 10^{-6} t}} \right\}$$

This is a slow rising function of time. Its value is  $25 \times 10^{-6}$  per hour at zero hours,  $27 \times 10^{-6}$  per hour at one year and  $30 \times 10^{-6}$  per hour at three and a half years.

The mean life of the interpolator is given by

$$\theta_I = \int_0^{\infty} R_I(t) dt = 34700 \text{ hours}$$

Because of the slow rate of increase of the predicted instantaneous failure rate at times earlier than the mean life it can be assumed in practice that the interpolator has a constant failure rate

$$\lambda_I = 1/\theta_I = 27 \times 10^{-6} \text{ per hour.}$$

The inaccuracies of the data used for predictions are greater than the error introduced by this simplification.

The failure rate of the interpolator consisting of the T-minutes system alone would have been  $\lambda_A + \lambda_T + \lambda_F = 27 \times 10^{-6}$  per hour, i.e. the introduction of the standby 30 minutes system of operation with the necessary additional monitoring and switching equipment has not resulted in an improvement in the reliability of the machine controller as such. A rearrangement of the interpolator in such a manner that Z would monitor and select the complete T and 30 minutes branches (A, B, C and D1, D2, E) would decrease the predicted failure rate from  $27 \times 10^{-6}$  to  $24 \times 10^{-6}$  per hour. A more noticeable improvement to approximately  $14 \times 10^{-6}$  per hour would be obtained if it were possible to reduce the failure rate of Z by 10 (probably impossible).

### 6.3 Practicable Way of Improving Availability of Interpolators

The interpolators have been engineered so that to repair any of their parts it is necessary to withdraw them completely from their active service. In the proposed modification shown in its reliability block diagram Fig. 3 it would be possible to remove either T' or 30' and continue working with the remaining parts.

Normally in the proposal shown in Fig. 3 the interpolator works in its T-minutes mode. In the event of either (i) a failure of T' block, or (ii) the incorrect T commands, block 30' is selected automatically and T' is removed for repairs and returned into service as soon as possible. Block 30' is treated similarly and it is assumed to have identical failure rate to that of block T'.

The existing T and 30 minutes blocks have some self checking circuits. Any additional complications which would have to be included into each block (T' and 30') would not be likely to contribute to their failure rates more than the dynamic failure rate (failure to switch-over when required) of Z i.e.  $\lambda_{Z2}$ . The probable contribution of these extra facilities towards a complete failure of the interpolator would certainly not exceed the value of Z3 included in  $\lambda_F$ . These assumptions are justified by the simplification of the switching functions, as compared with the present design.

Thus we would have  $\lambda_{T'} = \lambda_{30'} = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_{Z2} = 20.6 \times 10^{-6}$  per hour

A redundant network consisting of two identical switchable blocks was analysed by Epstein and Hosford 1960<sup>5</sup>. Such network can be in three states at any time t:

State (2) in which both T' and 30' blocks are satisfactory; probability  $P_2(t)$ ;



State (1) in which one of the blocks is satisfactory and the other being repaired; probability  $P_1(t)$ ;

State (0) in which both blocks are failed and the network is in a failed condition; probability  $P_0(t)$ .

The values of  $P_2(t)$  and  $P_1(t)$  are given by the following equations

$$P_2(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ (\lambda_{T'} + \mu + s_1) e^{s_1 t} - (\lambda_{T'} + \mu + s_2) e^{s_2 t} \right\}$$

$$P_1(t) = \frac{2\lambda_{T'}}{s_1 - s_2} \left\{ e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \right\}$$

$$\text{where } s_1 = \frac{-(3\lambda_{T'} + \mu) + \sqrt{\lambda_{T'}^2 + 6\lambda_{T'}\mu + \mu^2}}{2}$$

$$s_2 = \frac{-(3\lambda_{T'} + \mu) - \sqrt{\lambda_{T'}^2 + 6\lambda_{T'}\mu + \mu^2}}{2}$$

$\mu$  = mean repair rate of  $T'$  or  $30'$  blocks.

The reliability of the interpolator is:

$$R_I(t) = \{P_2(t) + P_1(t)\} \times R_{F'}(t)$$

where:  $R_{F'}(t) = \exp(-\lambda_{F'} t)$

and the mean life of the interpolator (i.e. the time to its complete failure) is given by:

$$\theta_I = \int_0^{\infty} R_I(t) dt = \frac{3\lambda_{T'} + \lambda_{F'} + \mu}{\lambda_{F'}^2 + 3\lambda_{T'}\lambda_{F'} + 2\lambda_{T'}^2 + \lambda_{F'}\mu}$$

which can range from 39502 hours for irreparable blocks  $T'$  and  $30'$  ( $\mu=0$ ) to 69444 hours for infinitely short repairs of these blocks ( $\mu=\infty$ ). For 200 hours mean repair times,  $\theta_I = 68660$  hours, for repairs of 24 and 10 hours it becomes 69350 and 69404 hours.

The repair durations are assumed in the above analysis to be distributed exponentially, i.e. the likelihood of a repair being completed increases with time. The experience with the machine controllers does not invalidate the reasonableness of this assumption. (This subject is rather complex).

Doubling of the mean life i.e. halving of the unavailability of the interpolator would be achieved by introducing the operator into the control scheme by requesting him to remove a failed part. His reactions and the speed of repairs need not be fast to maintain this improvement.

## 7. CONCLUSIONS

Reliability predictions based on theoretical information on the final design of equipment and on failure rate data of components available to us now have yielded results comparable with observations.

The mechanical and electronic assemblies can be highly reliable provided they are well designed, manufactured and stressed conservatively.

The extension of existing techniques for analysis of redundant assemblies and its application to operational equipment indicates practical ways of improving noticeably the availability of this equipment. In the case of the interpolator this improvement does not require addition of new major parts, demonstrating the usefulness of such analyses.

## 8. ACKNOWLEDGEMENTS

The author acknowledges the permission of the Central Electricity Generating Board to publish this paper.

## 9. REFERENCES

1. Moran F., Prewett J.N., "An experiment in the automatic control of power generation in a limited area of the C.E.G.B.", Proposed paper for the IVth IFAC Congress, WARSZAWA 1969.
2. Moran, F., Bain D.K.S., Sohal J.S., "Development of the equipment required for the loading of turbogenerators under automatic power-system control". I.E.E. Paper 5552C, London 1968.
3. Green A.E., Bourne, A.J., "Safety assessment with reference to automatic protective systems for nuclear reactors", U.K.A.E.A., AHSB (S)R117, London, 1966.
4. Alven von W.H., Editor "Reliability Engineering", A.R.I.N.C. Research Corporation, Prentice Hall, Inc. Englewood, 1964.
5. Epstein B., Hosford J., "Reliability of some two unit redundant systems". Proc. VIth National Symposium on Reliability and Quality Control, I.R.E., E.I.A., A.S.Q.C., A.I.E.E., Washington D.C. 1960.

**Table 1: Comparison of complexity of a machine controller envisaged at the conclusion of feasibility studies and actually achieved**

Components:			
Type	No. Estimated	No. Used	Used/Estimated
Resistors fixed	426	966	2.3
Resistors variable	5	19	3.8
Capacitors	86	233	2.7
Inductors, coils	11	4	0.36
Transformers	19	26	1.4
Transistors	133	268	2.0
Diodes, rectifiers	97	387	4.0
Motors etc.	2	13	6.5

Note: Remote Control Cubicle is excluded from this table. Its design was not envisaged at the feasibility studies stages.

**Table 3: Prediction of failure rate of torque converter**

Components		Assessed/"Assumed" failure rate $\times 10^{-6}$ per hour	
Type	No. Used	per component	per number used
Ball bearings	1	0.13*	0.13
Pivot bearings	2	0.013*	0.026
Spiral springs	2	0.0026*	0.0052
Connections (springs)	10	0.013*	0.13
Coils	8	0.005	0.04
Resistors (W.W. special)	4	0.01	0.04
Resistors (general)	3	0.002	0.006
Capacitors	3	0.025	0.075

Total predicted failure rate

$$\lambda_p = 0.4522 \times 10^{-6} \text{ per hour}$$

\*U.K.A.E.A. Data

i.e. Predicted m.t.b.f. =  $1/\lambda_p = 2.2 \times 10^6$  hours.

Total time in service accumulated in 18 months by 31 converters

$\tau = 401760$  hours. Probability of zero failures  $P(r=0) = \exp(-\lambda_p \tau) = 0.834$

Probability of 1 failure  $P(r=1) = (\lambda_p \tau / 1!) \exp(-\lambda_p \tau) = 0.151$ .

i.e. Probability of not more than 1 failure =  $P(r \leq 1) = P(r=0) + P(r=1) = 0.985$

i.e. 98% confidence that not more than 1 failure would occur. In fact no failures were reported.

Table 2: Comparison of predicted and observed number  
of failures of machine controllers

Component	Failure Rate $\times 10^{-6}$ per hour			No. of failures of 31 controllers during 18 months operation	
	Assessed/ Component	Source of Data	Predicted/ Controller	Predicted	Observed
Resistors fixed	0.002	CERL	2.2	0-3	0
Resistors variable	0.4	CERL	8	0-7	1
Capacitors	0.025	CERL	6.1	0-6	2
Diodes low signal	0.02	CERL	7.4	0-7	4
power	0.1	CERL	6.9	0-6	5
Transistors (Si planar)	0.005	UKAEA	1.38	0-2	0
Transformers (windings)	0.004	UKAEA	0.42	0-1	0
Fuses	0.3	CERL	3	0-4	0
Lamps	0.2	CERL	8.2	0-7	4
Overload trips	0.3	Estimated	2.1	0-3	0
Joints, connectors	0.002	CERL	14	1-11	14
Other (whole modules)					2
Total electronic Components			59.7	16-35	32
Relays: coils	0.1	CERL	57.2	13-32	6
contact sets	0.2	CERL			
Switches: micro	0.1	CERL	11.7	1-9	8
dry reed	0.1	CERL			
standard	0.2	CERL			
special	0.25	CERL			
Clutches, brakes	0.13	UKAEA	0.26	0-1	8
Windings, motor coils	0.05	UKAEA	1.7	0-3	3
Motors	0.13	UKAEA	1.8	0-3	2
Meters (various)		UKAEA	4.8	0-5	3
Others:					
Constructional					3
Cross shaft bearings					5
Total electro-mechanical and mechanical components			77.5	21-41	38
Total machine controller			137.2	41-70	70
i.e. predicted mean time observed between failures = $10^6/137 = 7,300$ hours					
and observed mean time between failures (point estimate) = 5,740 hours					

See Notes:



Table 4: Predicted failure rates of interpolator

Block	A	B	C	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	E	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>	F	F'	$\tau$	30
Predicted failure rate $\times 10^{-6}$ per hour	5.3	7.2	4.7	5.3	7.2	4.6	2.2	3.4	4.8	9.6	14.4	11.9	17.1

NOTES:

(i) Valid for: temperature range 20-30°C, relative humidity <60%, no vibrations.

(ii) C.E.R.L. (Central Electricity Research Laboratories) data: point estimates based on 50% confidence level limit for observations in various power stations.

(iii) U.K.A.E.A. "Assumed" data: yield reasonable predictions.

(iv) Predicted number of failures: 95% confidence interval limits quoted.

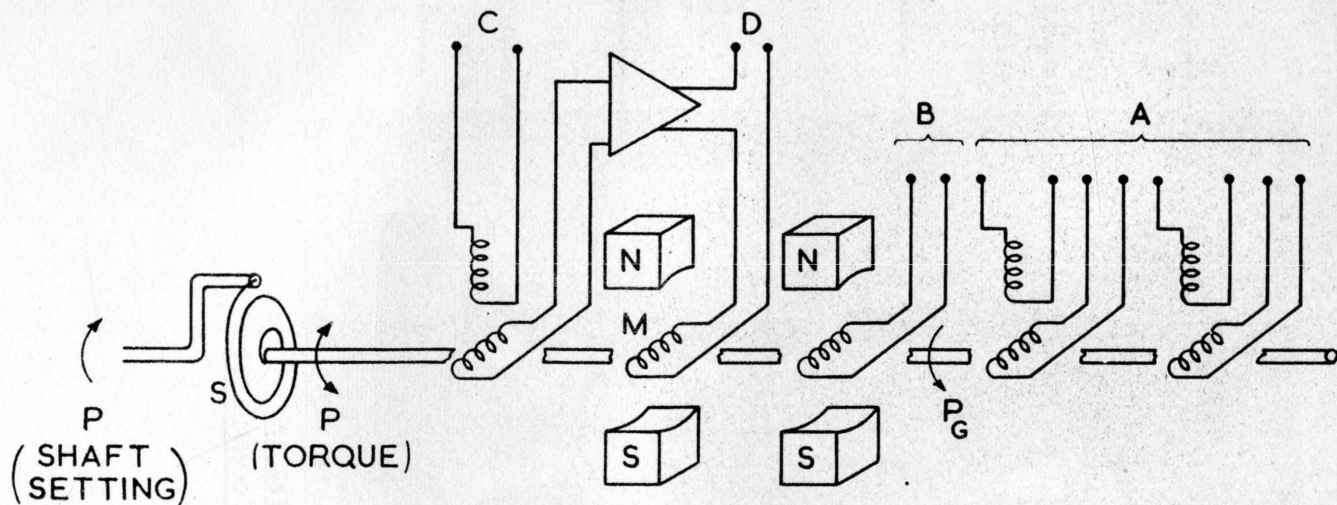


FIG.1 SCHEMATIC DIAGRAM OF THE TORQUE CONVERTOR

- P SHAFT POSITION PROPORTIONAL TO INTERPOLATED POWER
- A CURRENT AND VOLTAGE INPUTS FROM ALTERNATOR GIVING  
A 2-WATTMETER MEASUREMENT OF ACTUAL POWER OUTPUT
- B INPUT FOR FREQUENCY BIAS SIGNAL
- C EXCITATION FOR SENSING COIL
- D OUTPUT-ERROR SIGNAL TO SPEEDER MOTOR ACTUATOR
- M TORQUE MOTOR

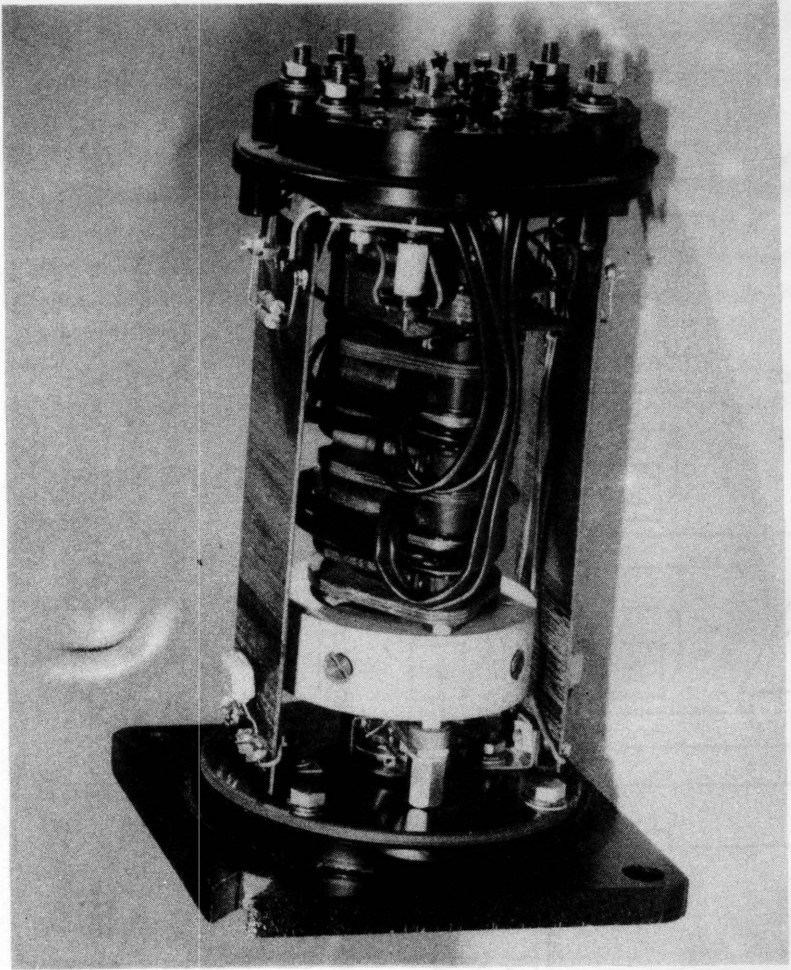


FIG. 1A  
TORQUE CONUERTOR

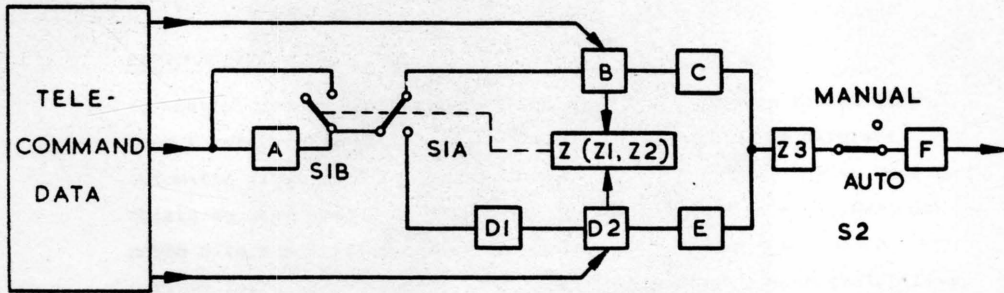


FIG. 2

RELIABILITY BLOCK DIAGRAM OF THE INTERPOLATOR

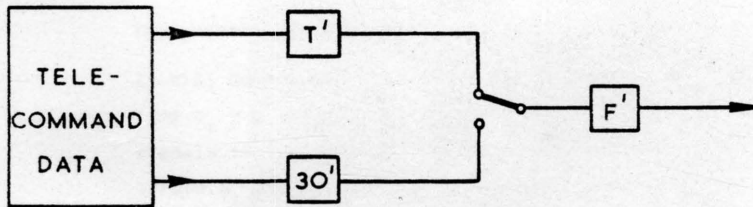


FIG. 3

PROPOSED SIMPLIFIED INTERPOLATOR



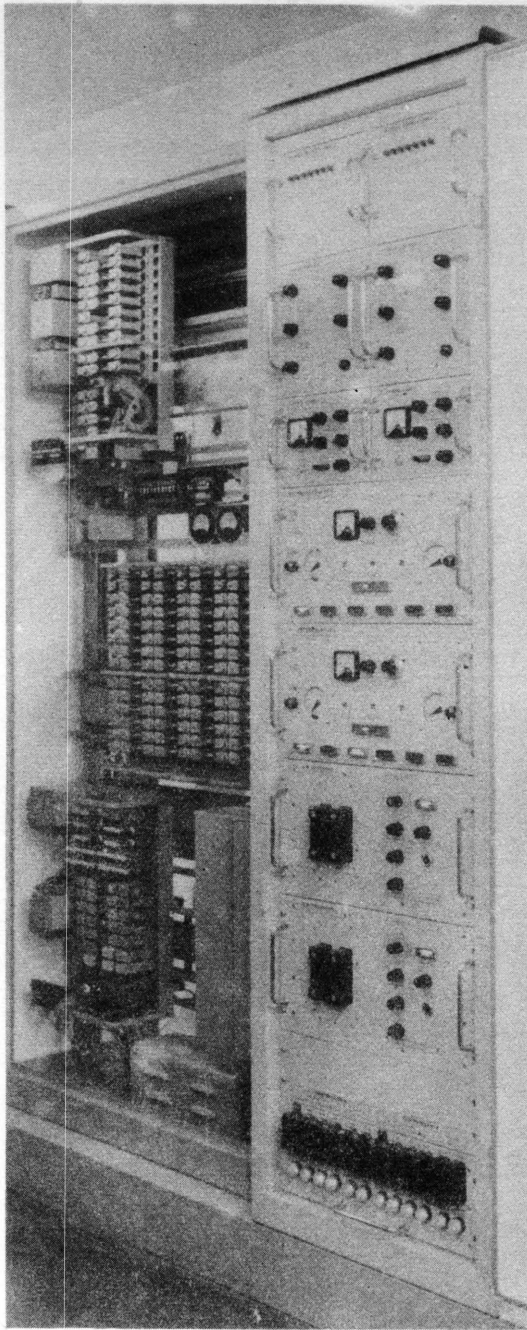


FIG. 4  
TWO CONTROLLERS AND  
TELECOMMAND CUBICLE

# A COMPARISON OF SOME METHODS OF MULTIPLEX OPERATION

by D.A. Lloyd and A.J. Dymock

Smiths Industries

Aviation Division

Cheltenham England

## 1. INTRODUCTION

In control system applications which demand a very high reliability over a relatively short period of time, (for example, an aircraft automatic pilot used for automatic landing), redundancy may be used to obtain an improvement in reliability of many orders of magnitude compared with a non-redundant system. Many authors<sup>1</sup> have discussed various forms of redundancy, and their influence on system reliability.

The object of the present paper is to discuss in more detail certain problems in the design of such systems, in particular those concerned with component tolerances, and the response of the system to faults. It should be emphasized that this is only one aspect of the overall problem; a system which is sub-optimal from the points of view considered here may yet be preferred because of its advantages in other respects.

The general problem considered may be defined as follows:

It will be assumed that there exist  $n$  signals  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) of the form  $x_i = y + e_i$ , where  $y$  is the value that would be taken by all  $n$  signals in the absence of faults or component tolerances, and the errors  $e_i$  are assumed to be mutually independent random variables. The system output,  $Y$ , is a function, to be chosen, of some or all of the signals  $x_i$ , and should ideally be equal to  $y$ . The mean square error in  $Y$  is a useful basis of comparison in making this choice of output, and one that is easy to compute. One is, however, also interested in minimizing the likelihood of very large errors in  $Y$ , and in minimizing the disturbance to the output that could result from the occurrence of a fault (which may be regarded as causing a large and rapid change in one of the quantities  $e_i$ ).

The achievement of the latter objective may be eased by the incorporation of logical elements which detect a faulty signal, and subsequently eliminate it from the computation of system output. The use of such

logical elements (often termed 'active redundancy') also enables the system to survive a greater number of faults, and still produce a sensible output. The authors are aware that passive redundancy has been used with some success at component level, where the additional logical elements necessary would add unduly to the overall complexity. They consider, however, that active redundancy has considerable advantages when applied to large-scale systems, and only this form of redundancy will be considered here.

The general problem originally posed may then be divided into two distinct portions:

- (a) The design of the logical elements for the detection and elimination of faults. This is discussed in sections 2 - 9 of this paper.
- (b) The choice of system output as a function of those signals which are accepted by the logical elements. This is discussed in sections 10 - 12 of this paper.

## 2. FACTORS AFFECTING DESIGN OF LOGICAL ELEMENTS

It will be assumed in all that follows that there is no absolute standard by which it is possible to judge whether or not a particular signal is faulty. Thus a faulty signal can only be identified as such by comparison with other signals, or combinations of signals. Even in the absence of faults, however, these signals will in practice differ to a certain extent, due to manufacturing tolerances, and so there is a possibility of nuisance cut-outs occurring due to this cause. It is desired to design the logic so that the probability of nuisance cut-outs is low, whilst the probability of eliminating the correct signal when a genuine fault occurs is high.

For a duplex system ( $n = 2$ ) only one logical choice seems possible: to compare the two signals ( $x_1, x_2$ ), and disengage both if they differ by more than a pre-determined limit ( $L$ ).

For higher orders of redundancy, the comparator limits will have different significance according to the particular signals being compared, and the nature of the comparator logic. In order to compare different systems, therefore, in the subsequent analysis these systems will all be assumed to have the same comparator limit setting in the duplex mode, to which mode they all revert after a sufficient number of faults. In general, the greatest disturbance to the system output, due to a fault

which is not large enough to cause disengagement, will occur when the system is operating in the duplex mode. The above procedure is therefore approximately equivalent to comparing systems which permit the same maximum disturbance to the system output. In these circumstances, it is reasonable to compare them solely on the basis of probabilities of nuisance cut-outs.

Several possible triplex arrangements ( $n = 3$ ) will be examined in some detail. A similar analysis could be applied to systems employing a higher order of redundancy.

### 3. THE SIGNAL STATE DIAGRAM

For  $n = 3$ , it is possible to obtain a convenient pictorial representation of the behaviour of the comparator logic. Since only differences between signals are of interest, these may be expressed in terms of the two variables  $u = 2x_1 - (x_2 + x_3)$  and  $v = (x_2 - x_3) \sqrt{3}$  (these particular functions were chosen as being statistically independent, and having the same variance).

The  $(u, v)$  plane may then be divided into regions within which either all signals remain engaged or one or more of the signals is disengaged. The resultant diagram completely describes the comparator logic.

### 4. TWO SIMPLE TRIPLEX SYSTEMS

#### 4.1 Comparison of Pairs of Signals

A particular signal,  $x_i$ , is disengaged if it differs from both the other signals by more than  $L$  or, equivalently, if it differs from the median of the three signals by more than  $L$ . Following a single disengagement, the resultant duplex system is subsequently disengaged if the remaining two signals differ by more than  $L$ . The state diagram corresponding to this logic is shown as Figure 1.

#### 4.2 Comparison with Mean

A particular signal,  $x_i$ , is disengaged if it differs from  $\bar{x} = (x_1 + x_2 + x_3)/3$  by more than  $L/2$ . The criterion for duplex operation is as in sub-section 4.1. The choice of  $L/2$  as the comparator limit in the triplex mode is determined by the facts that:-

- (a) If the limit were greater than  $L/2$ , there would be a possibility that the two extreme signal values could differ by more than  $L$ , so that a subsequent single fault in the median signal could result in a cut-out of the complete system.



- (b) The limit should be as large as possible, so as to minimize the probability of nuisance cut-outs.

The corresponding signal state diagram is shown in Figure 2. (The significance of the broken line will be explained in the next section).

#### 5. NECESSITY FOR WARNINGS

The signal state diagram also enables a pictorial representation to be given of the effect of a fault developing in one of the signals. For example, the arrows in Figures 1 and 2 show the result of a fault in signal  $x_1$ , starting from an initial state in which all signals are engaged. In the examples illustrated, it is seen that the wrong signal is initially disengaged ( $x_3$  rather than  $x_1$ ). This is clearly an undesirable state of affairs, since it means that a single fault can result in the disconnection of the complete triplex system.

In order to avoid this possibility, it is necessary to introduce an additional 'warning' state. Here the occurrence of a warning is to be interpreted as indicating the existence of a latent fault somewhere within the system, so that a single further fault could cause disengagement of all three signals. There is not sufficient evidence of the location of this latent fault, however, for a particular signal to be automatically disengaged.

For the system illustrated in Figure 1, a warning should be given if a single difference exceeds  $L$ .

For the system illustrated in Figure 2, a warning should be given if any signal differs from the mean by more than  $L/2$ , and a particular signal disengaged only if it differs from the mean by more than  $L$ . (The 'warning' area being bounded by the broken line in the figure).

#### 6. AN 'OPTIMUM' SYSTEM

One might start from the condition that:

"If the system is initially in a state where all signals are engaged, and no warnings indicated, then a runaway of a single signal shall cause that signal, and only that signal, to be disengaged".

If one now attempts to construct the signal state diagram, with  $u$  and  $v$  as variables as before, the picture illustrated in Figure 3 emerges. Starting from an arbitrary area within which all signals are engaged, and no warnings given:-

- (a) Areas A may be reached by runaways of either of two signals. It is therefore impossible to disengage any particular signal, but a warning must be given.
- (b) Areas B may only be reached by runaways of two signals, and this should therefore imply disconnection of the complete system.
- (c) In order to maximize the probability of having full triplex integrity, the system should be designed so that the area within which all signals are engaged and no warnings given extends over the whole central hexagonal region.
- (d) The remaining areas can only be reached by runaways of the specific signals named. In order to maximize sensitivity to genuine faults, disconnection of the appropriate signal should take place over the whole of these regions.

It is seen that the final diagram is identical to Figure 1 (defined by the system described in section 4.1), the latter being drawn for the particular case in which all the comparator limits are equal.

#### 7. CALCULATION OF PROBABILITIES OF NUISANCE CUT-OUTS

It will be assumed that, in the absence of faults, the signals  $x_i$  have identical, though independent, normal probability distributions, with mean zero, and variance  $\sigma^2$ .

The probabilities of disengagement and warning may then be computed by integrating the joint probability density of  $u$  and  $v$  over the appropriate areas of the  $(u, v)$  plane.

The resultant probabilities, for comparison of pairs, and comparison with the mean, are plotted in figure 4, where the various probabilities are defined as follows:

- $P_1$  = probability of warning for comparison with mean
- $P_2$  = probability of warning for comparison of pairs
- $P_3$  = probability of cut-out of one signal for comparison with mean
- $P_4$  = probability of cut-out of one signal for comparison of pairs
- $P_E$  = probability that all signals are disengaged.

#### 8. REPLACEMENT FOLLOWING A WARNING

It is seen from Figure 4 that the probability of errors due to random tolerances resulting in the disconnection of a particular signal is

## 9. CHOICE OF COMPARATOR LIMITS

The comparator limits must be chosen to provide adequate protection against genuine faults, whilst giving an acceptably low probability of nuisance cut-outs.

So far no mention has been made of the source of the errors due to tolerances. If these are regarded as being made up of a gain error plus a datum error, then there is a strong argument in favour of varying the comparator limits as a function of signal magnitude. For otherwise a gain error is liable to remain undetected until large signals arise. (As would occur in an aircraft autopilot during the final stages of automatic landing).

If this is done, one must choose a suitable measure of signal magnitude. The most suitable would appear to be the average of the two signals being compared, this being unaffected by any errors in the remaining signal or signals.

Different system configurations may, of course, demand different forms of variation of the comparator limits. For example, the form of variation suggested above would not be appropriate in the case where the signal being examined consists of the small difference between two large signals, as will often be the case in feedback control systems. In these circumstances the relevant variables for the determination of the comparator limit would more likely be the magnitudes of the individual signals, before differencing.

## 10. FACTORS AFFECTING CHOICE OF OUTPUT

No attempt has been made to determine an 'optimum' output since, as explained in the introduction, there are many factors to be considered in choosing the form of output, and the relative importance attached to these will differ for different applications.

In the absence of faults, the quantities  $e_i$  (and hence  $x_i$ ) may be assumed to have identical, though independent, probability distributions. The determination of the output  $Y$  is then equivalent to the estimation of the mean from  $n$  independent samples ( $x_i$ ) of a random variable. It is known that for a large class of distributions, the minimum variance estimate of the mean is the sample mean  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , and this is there-

$$i = 1$$

fore one obvious possible choice for the output  $Y$ .

small, compared with the probability that these tolerance errors will merely result in a warning being given. If the three signals being compared arise as the outputs of three independent sub-systems, this implies a degree of uncertainty as to which single sub-system to replace.

This should not be interpreted as a failure to identify a faulty sub-system. Rather is it a consequence of the fact that, with the assumptions made, it is relatively unlikely that there will be one faulty sub-system, having a large error. It is more likely that two sub-systems will both have moderately sized errors, of opposite sign.

In view of this it would be misleading, when considering the problem of replacement following a warning, to consider the probability of replacing the 'correct' sub-system. The relevant measure of success would be the probability that, if a particular sub-system is replaced, the signal differences in the resultant new triplex system will all be less than the comparator limit, so giving full triplex integrity. Since the most likely situation is that in which both suspect sub-systems have moderately large errors, of opposite sign, this probability may be quite high, whichever of the two sub-systems is replaced. In order to maximize this probability, one should clearly replace that sub-system which differs from the median (or mean) by the greatest amount.

A numerical example follows to illustrate this point. A value of  $(L/\sigma)=4$  has been used, and the comparator logic is assumed to be based on comparison of pairs.

Suppose  $x_1 = -0.5L$ ,  $x_2 = -0.4L$ ,  $x_3 = +0.5L$ . If  $x_3$  is replaced (the logical choice), a satisfactory triplex system will result if the error in the replacement lies between  $-1.4L$  and  $0.5L$ . The probability of this, for  $L/\sigma = 4$ , is 97.7%.

If  $x_1$  is replaced, a satisfactory triplex system will result if the error in the replacement lies between  $-0.5L$  and  $+0.6L$ . The probability of this, for  $L/\sigma = 4$ , is 96.9%.

It is seen that, in this particular example, it makes little difference which sub-system is replaced. Whilst this is not invariably true, the example does indicate that perhaps less importance should be attached to the relatively high probability of having a warning rather than a definite cut-out than might appear at first sight.



The presence of a fault may be regarded as causing one of the quantities  $e_i$  to have a large r.m.s. value, so that the above argument no longer applies. Moreover, in these circumstances one is more concerned with avoiding the possibility of the output having a large error. One possible approach (for  $n$  greater than or equal to 3) is to eliminate the two extreme values of  $x_i$  in the computation of  $Y$ . If it is sufficient to consider only the effect of a single fault, then this procedure will serve the same purpose as the logical elements discussed previously. Normally this is not the case, but even so this procedure will then allow a longer time lag to be introduced on the action of the comparators, so reducing the probability of nuisance cut-outs due to high-frequency noise and transient effects.

Many possible functions of the remaining  $(n - 2)$  signals might be considered for use as the system output. Two are considered in more detail here.

- (a) The median (for  $n$  odd) or mean of the middle two (for  $n$  even).

This has the desirable property of being an unbiased estimate of  $y$ .

- (b) The largest but one signal. Although biased, this choice permits a very simple means of rejecting a particular signal following action of the comparators (by setting the rejected signal to a large negative value). Other choices of output may need a change of logic following comparator action.

In analysing these various possibilities, it is necessary to make some assumption as to the form of the probability distribution of the signals  $x_i$ . The relevant distribution here is the conditional distribution, given that  $x_i$  is acceptable to the comparator logic. It would seem reasonable to assume that the original signals  $x_i$  are normally distributed. The effect of the comparator logic will be to reduce the probability of extreme values (ideally, giving an output with a truncated normal distribution). Accordingly, normal and rectangular distributions have been examined, as two extreme cases.

## 11. GENERAL EQUATIONS

Consider the fault-free case, so that all the signals  $x_i$  may be assumed to have the same probability density function,  $p(x_i)$ . Then the probability density functions of the quantities of interest may be computed as follows:

### 11.1 Mean

Let  $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

and let the probability density function of  $s = p_s(s)$ . Then

$$p_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1) p(x_2) \dots p(x_{n-1}) p(s - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}$$

The mean value of all signals  $x_i$  is  $m = s/n$ , whence the probability density function of  $m$  is given by

$$p_m(m) = np_s(nm)$$

### 11.2 Largest-but-one Signal

Denote this signal by  $b$ . Then the probability density function of  $b$  is given by:

$$p_b(b) = n(n-1) P^{n-2}(b) \{1 - P(b)\} p(b)$$

where  $p(b)$  is defined as before and  $P(b) = \int_{-\infty}^b p(x) dx$

### 11.3 Median (for $n$ odd)

Denote the median by  $Z$ , and let  $n = 2N + 1$

Then the probability density function of  $Z$  is:

$$p_Z(Z) = \frac{(2N+1)!}{N! N!} P^N(Z) \{1 - P(Z)\}^N p(Z)$$

where  $p(Z)$  and  $P(Z)$  are defined as before.

### 11.4 Mean of middle two signals (for $n$ even)

Denote this quantity by  $Z$  and let  $n = 2N$

Suppose the two middle signals are  $u, v$  ( $u < v$ ).

Then the joint probability density function of  $(u, v)$  is:

$$f(u, v) = \frac{(2N)!}{(N-1)! (N-1)!} P^{N-1}(u) \{1 - P(v)\}^{N-1} p(u)p(v)$$

for  $u < v$ , = 0 otherwise

whence the probability density function of  $Z = (u + v)/2$  is:

$$p_Z(Z) = 2 \int_{-\infty}^Z f(u, 2Z - u) du.$$

12. Some particular cases

The preceding expressions have been evaluated for the cases where the parent distribution  $p(x)$  is rectangular and normal in form.

The resultant probability density functions are shown in figures 5(a), (b), (c) for the case of a rectangular parent distribution (limits at  $+1$  and  $-1$ ), and for  $n = 2, 3, 4$ .

The most important parameters of these distributions have also been computed, and are tabulated below. Table 1 contains the results for a rectangular parent distribution, and Table 2 those for a normal parent distribution. The results are given in terms of the variance,  $\sigma^2$ , of the parent distribution. (Limits for rectangular distribution are  $\pm \sigma\sqrt{3}$ ).

TABLE 1

STATISTICAL PARAMETERS - RECTANGULAR PARENT

Function	Mean	Mean Square	Variance
<u>Duplex</u> ( $n = 2$ )			
Mean	0	$0.5\sigma^2$	$0.5\sigma^2$
Largest-but-one	$-0.58\sigma$	$\sigma^2$	$0.67\sigma^2$
<u>Triplex</u> ( $n = 3$ )			
Mean	0	$0.33\sigma^2$	$0.33\sigma^2$
Median	0	$0.6\sigma^2$	$0.6\sigma^2$
<u>Quadruplex</u> ( $n = 4$ )			
Mean	0	$0.25\sigma^2$	$0.25\sigma^2$
Mean of middle two	0	$0.4\sigma^2$	$0.4\sigma^2$
Largest-but-one	$0.35\sigma$	$0.6\sigma^2$	$0.48\sigma^2$

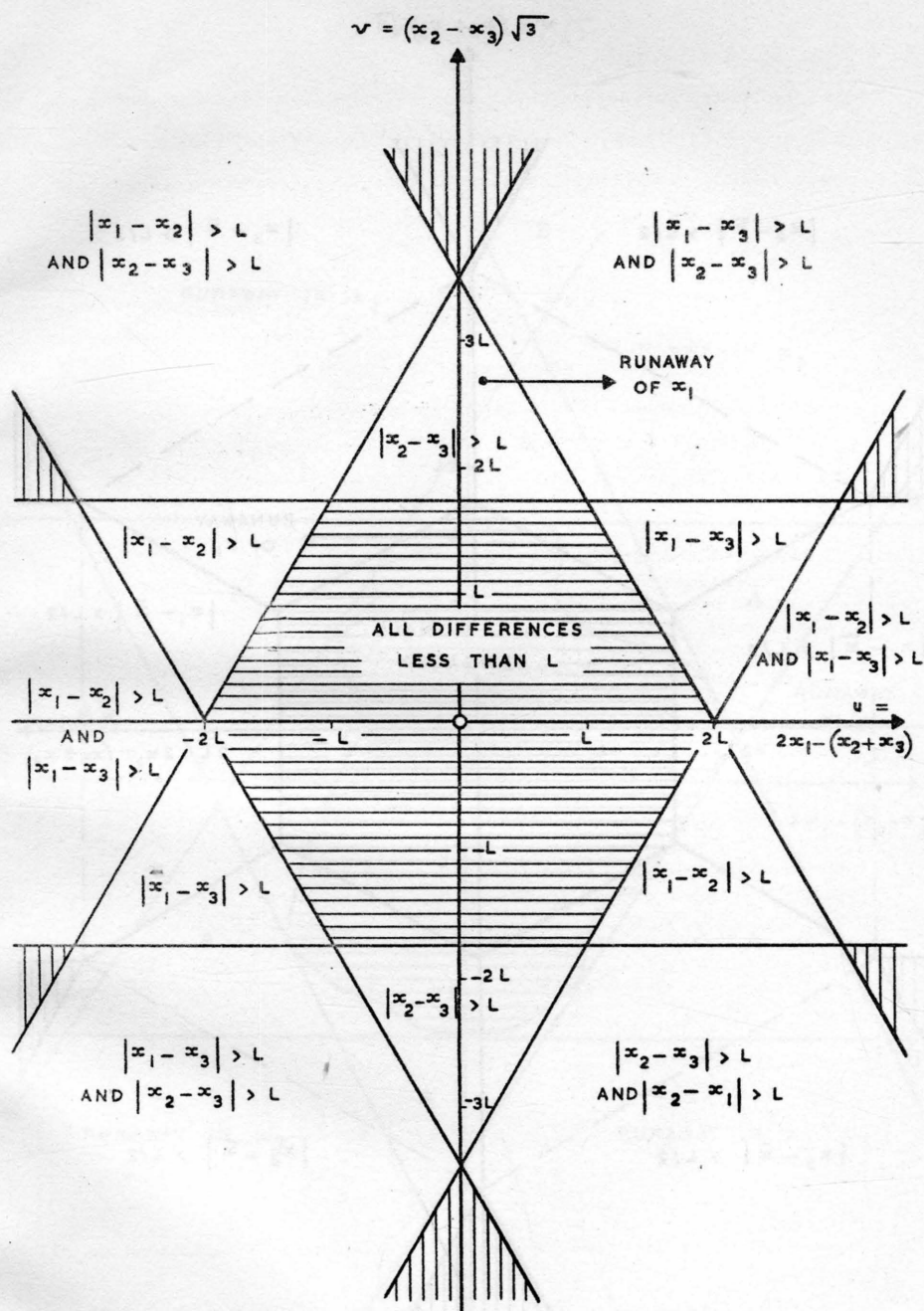
TABLE 2

STATISTICAL PARAMETERS - NORMAL PARENT

Function	Mean	Mean Square	Variance
<u>Duplex</u> ( $n = 2$ )			
Mean	0	$0.5\sigma^2$	$0.5\sigma^2$
Largest-but-one	$-0.56\sigma^2$	$\sigma^2$	$0.68\sigma^2$
<u>Triplex</u> ( $n = 3$ )			
Mean	0	$0.33\sigma^2$	$0.33\sigma^2$
Median	0	$0.45\sigma^2$	$0.45\sigma^2$
<u>Quadruplex</u> ( $n = 4$ )			
Mean	0	$0.25\sigma^2$	$0.25\sigma^2$
Mean of middle two	0	$0.30\sigma^2$	$0.30\sigma^2$
Largest-but-one	$0.30\sigma^2$	$0.45\sigma^2$	$0.36\sigma^2$

References

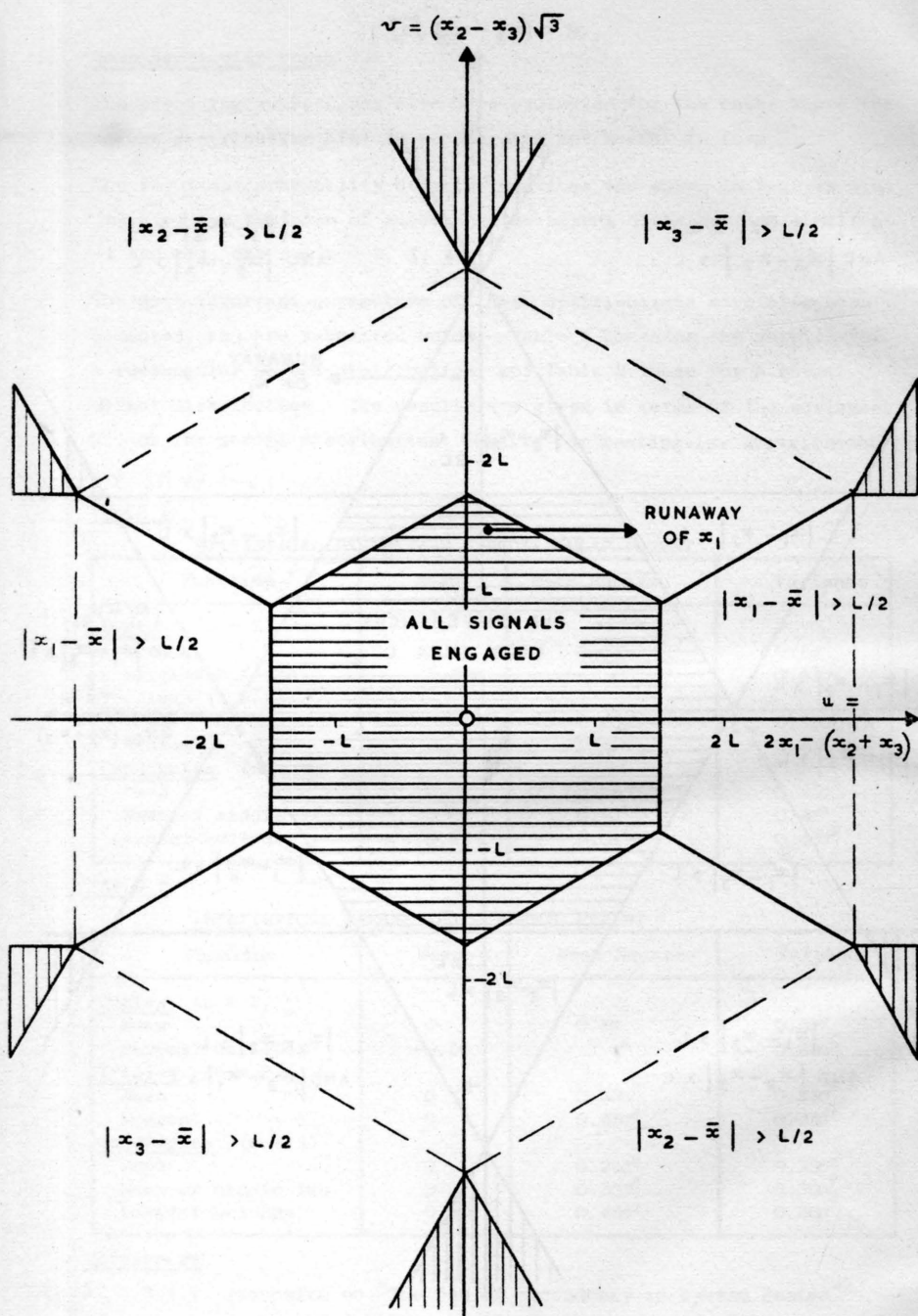
1. S.I.T. symposium on "The use of redundancy in system design" - London, 14th February, 1964.



VERTICAL SHADING = ALL DIFFERENCES GREATER THAN L

FIG 1 SIGNAL STATE DIAGRAM—COMPARISON OF PAIRS





VERTICAL SHADING: ALL SIGNALS DISENGAGED

FIG 2 SIGNAL STATE DIAGRAM—COMPARISON WITH MEAN

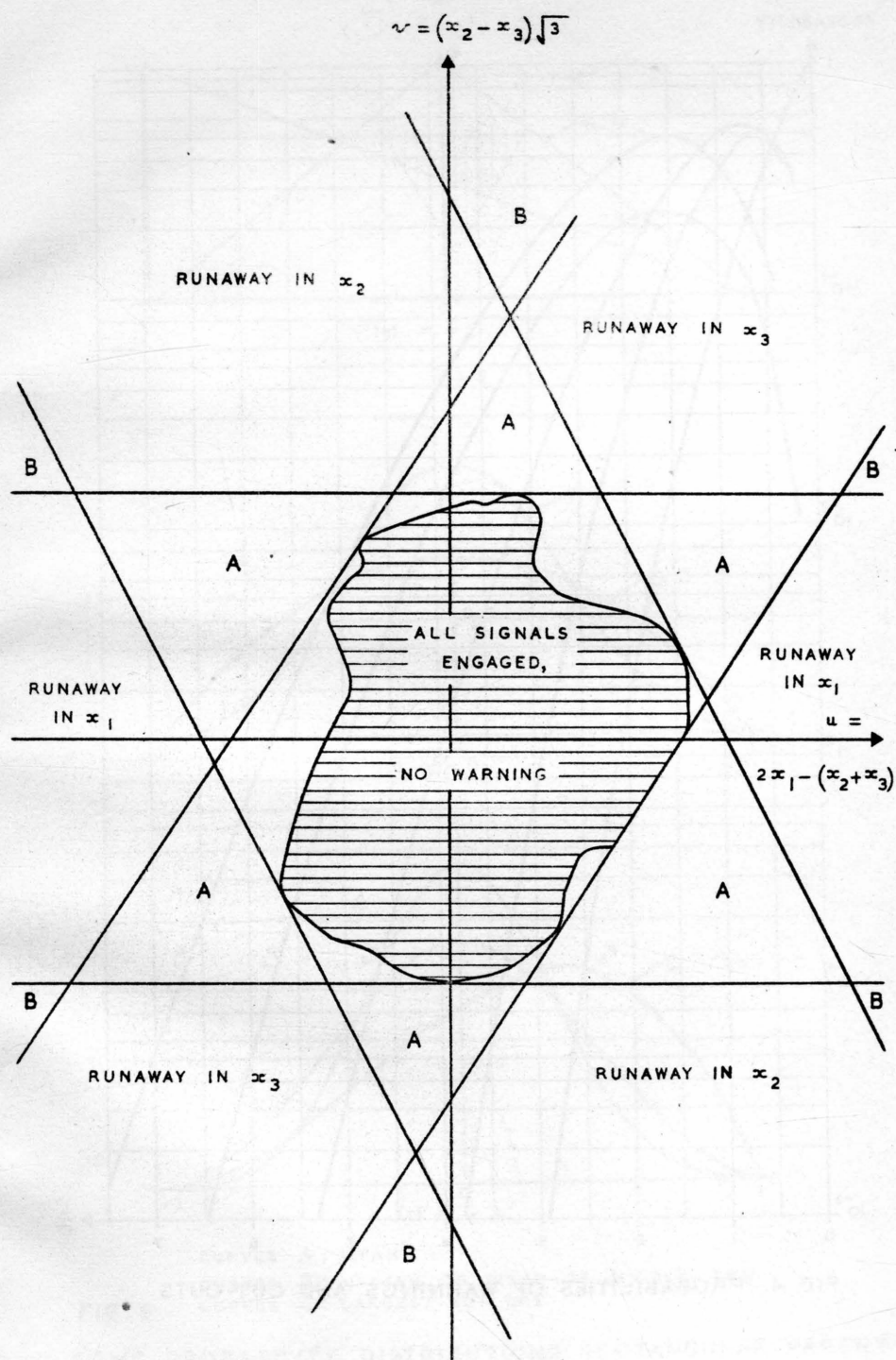


FIG 3 DERIVATION OF OPTIMUM SYSTEM

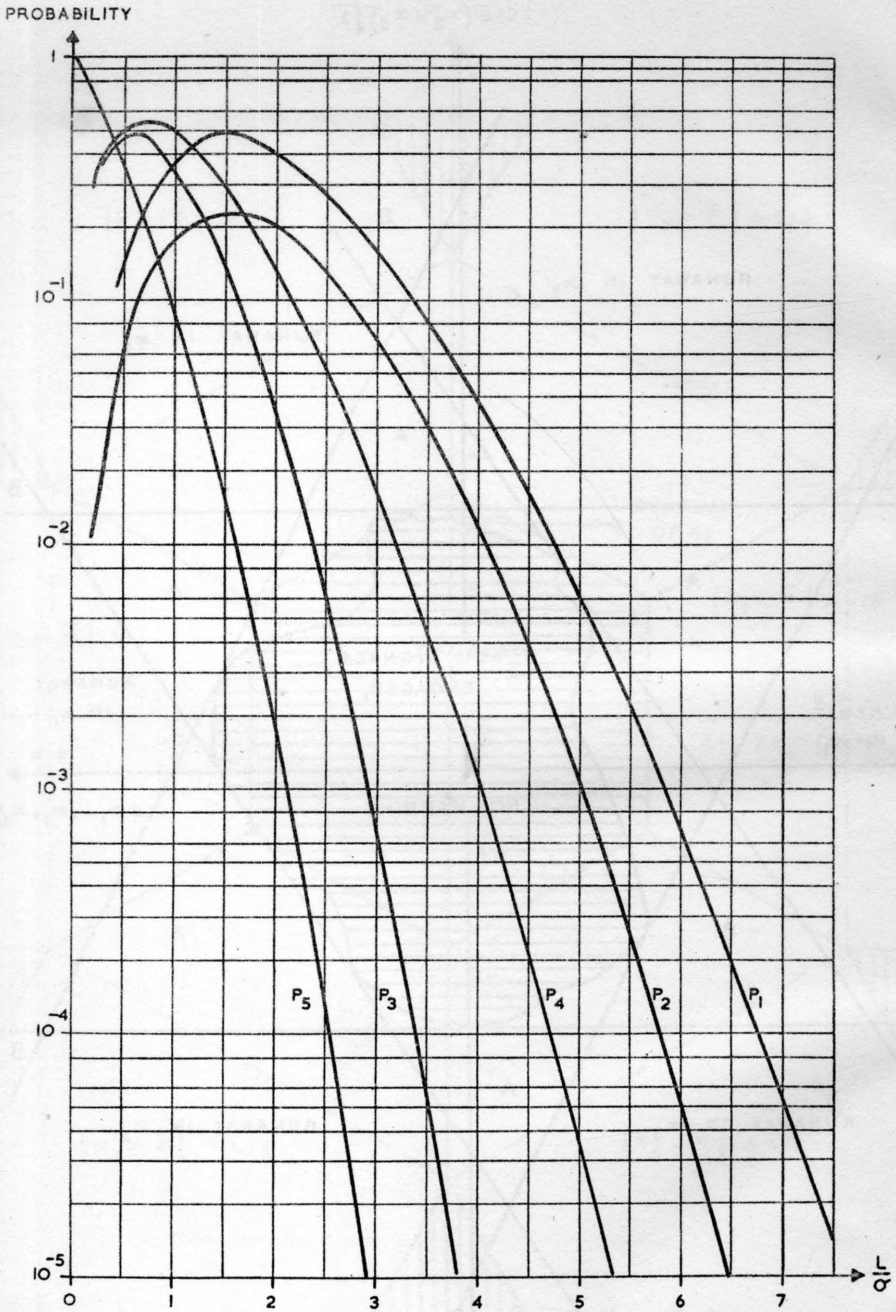
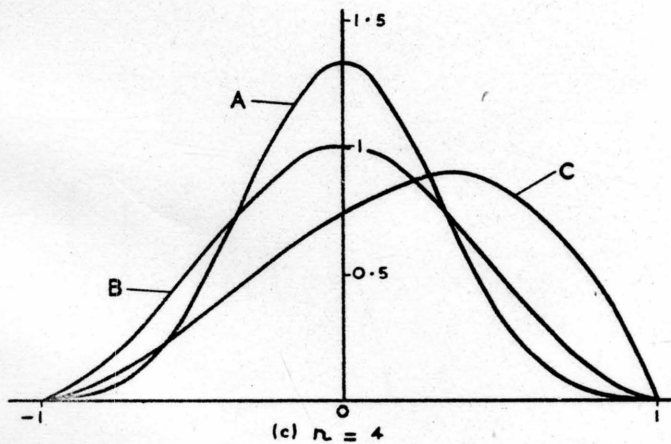
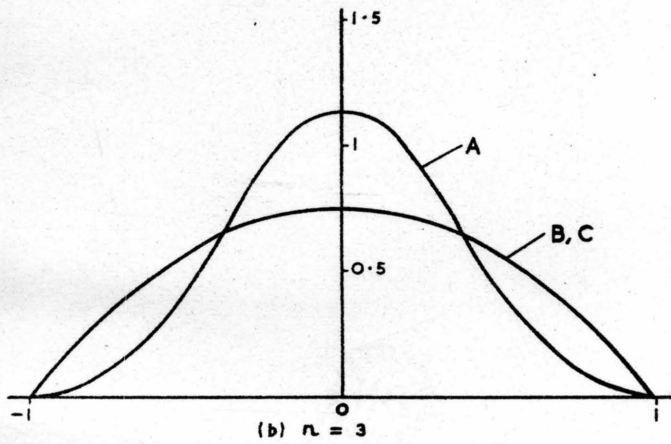
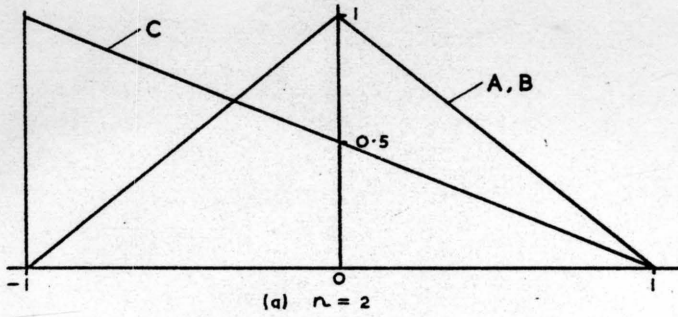


FIG 4 PROBABILITIES OF WARNINGS AND CUT-OUTS



CURVES A : MEAN

CURVES B : MEDIAN OR MEAN OF MIDDLE TWO

CURVES C : LARGEST BUT ONE

FIG 5

SOME PROBABILITY DISTRIBUTIONS, RECTANGULAR PARENT