

IFAC



WARSZAWA 1969

INTERNATIONAL FEDERATION
OF AUTOMATIC CONTROL

Optimal Control

Fourth Congress of the International
Federation of Automatic Control
Warszawa 16–21 June 1969

TECHNICAL
SESSION

7



Organized by
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce

INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL

Optimal Control

TECHNICAL SESSION No 7

**FOURTH CONGRESS OF THE INTERNATIONAL
FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL
WARSZAWA 16 — 21 JUNE 1969**



**Organized by
Naczelna Organizacja Techniczna w Polsce**



K-1284

Biblioteka
Politechniki Białostockiej



1181030

Contents

Paper No			Page
7.1	SU	- F.M.Kirillova, R.Gabasov, I.A.Poletayeva S.V. Churakova - Controllability and Synthesis of Opti- mum Dynamic Systems.....	3
7.2	PL	- Cz.Olech - Integrals of Set Valued Functions and Linear Optimal Control Problems.....	22
7.3	GB	- J.C.Allwright - Optimal Control Synthesis Using Function Decomposition Techniques.....	36
7.4	PL	- S.Raczyński - On the Determination of Emission Zones and Optimum Trajectories of Nonlinear Control Systems.....	49
7.5	SU	- A.I.Propoy - Of Multistep Games.....	67

Wydawnictwa Czasopism Technicznych NOT
Warszawa, ul. Czackiego 3/5 — Polska

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ф.М.Кириллова, И.А.Полетаева,

С.В.Чуракова, Р.Габасов

Белорусский государственный Университет им.В.И.Ленина
С С С Р

Техника получения фундаментального результата теории оптимальных процессов - принципа максимума Л.С.Понтрягина [1] в настоящее время развита настолько основательно, что необходимые условия оптимальности можно записать практически для любой задачи оптимизации в обыкновенных непрерывных динамических системах. Постепенно принцип максимума переносится на объекты, описываемые уравнениями, отличными от обыкновенных дифференциальных. В последние годы в связи с оптимизацией траекторий космической навигации, а также для изучения скользящих режимов начала развиваться теория особых управлений. Усилился интерес и к исследованию других вопросов теории оптимальных процессов. Здесь следует отметить работы по управляемости, по вопросам существования оптимальных управлений, по достаточным условиям оптимальности, по вычислительным алгоритмам теории оптимальных процессов. Последняя проблема, а также наличие специфических задач оптимизации возбудили интерес к теории оптимальных процессов в дискретных системах. Новейшее развитие теории оптимальных процессов связано также с теорией дифференциальных игр.

В настоящем докладе приводятся результаты авторов по различным аспектам теории оптимизации систем управления, полученные с помощью двух методов. Первый метод (метод приращений[2])

основан на исследовании приращений скалярных и векторных функций, заданных на траекториях динамических систем. В основу второго метода (метода функционального анализа [3]) положены различные теоремы и факты функционального анализа.

§ I. Управляемость

Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad f(0, 0) = 0, \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad (I)$$

где x_i - фазовые координаты, характеризующие состояние объекта, $u = \{u_1, \dots, u_r\}$ - управляющее воздействие, t - время.

Определения. I. Состояние x_0 системы (I) назовем управляемым, если существует такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, что траектория $x = x(x_0, u, t)$ системы (I), соответствующая управлению $u = u(t)$, удовлетворяет условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, $t_1 < +\infty$.

2. Систему (I) назовем вполне управляемой, если для любого τ , $\tau = t_1 - t_0$, $\tau > 0$, найдется число $\alpha = \alpha(\tau) > 0$ такое, что все состояния x_0 , $\|x_0\| \leq \alpha$, T - управляемы.

Исследование этих свойств начнем с системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b(u). \quad (2)$$

Здесь $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $u = \{u_1, \dots, u_r\}$, A - постоянная матрица, $b(u)$ - непрерывная функция.

Пусть $\Omega(\mathcal{A})$ выпуклая оболочка множества $\{b(u), \|u\| \leq \mathcal{A}\}$. Обозначим через $b^1, \dots, b^q$ базис минимального подпространства (размерности $q = q(\mathcal{A})$), содержащего множество $\Omega(\mathcal{A})$.

Методом приращений векторных функций можно показать, что справедлива

Теорема 1. Система (2) вполне управляема ограниченными управлениями ($\|u\| \in \mathcal{L}$), если выполняется одна из следующих групп условий:

А. 1) $\text{ранг} \{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n$, $B = \{b^1, \dots, b^2\}$;

2) начало координат — внутренняя точка множества $\Omega(\mathcal{L})$.

В. Для некоторой матрицы C , составленной из ненулевых векторов $c^1, \dots, c^p$ таких, что $c^1, \dots, c^p \in \Omega(\mathcal{L})$ и $\beta_1 c^1 + \dots + \beta_p c^p = 0$, $\beta_1 \neq 0, \dots, \beta_p \neq 0$, выполняется условие

$$\text{ранг} \{C, AC, \dots, A^{n-1}C\} = n.$$

Вторая группа условий является необходимой для вполне управляемости системы (2) с $\|u\| \in \mathcal{L}$.

Эта теорема может быть обобщена на нестационарные системы.

Для исследования управляемости системы (1) рассмотрим ее линейную модель (2), где

$$A = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \quad b(u) = f(0,u).$$

Теорема 2. Если

$$\text{ранг} \{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n,$$

где $B = \{b^1, \dots, b^2\}$,

и начало координат является внутренней точкой множества $\Omega(\mathcal{L})$, то система (1) вполне управляема.

Результаты по управляемости обыкновенных динамических систем можно перенести в некоторых случаях на системы с запаздывающим аргументом. Пусть дана система

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-h) + Cu(t), \quad (3)$$

где h - постоянное запаздывание; начальное состояние задается соотношением

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t), t_0 - h \leq t < t_0, x(t_0) = x_0\}. \quad (4)$$

Здесь $\varphi(t)$ - непрерывная функция, x_0 - известный вектор.

Если для системы (3) и начального состояния (4) выполнены свойства из определений I-2, то в каждое из определений будем добавлять слово "относительно". Например, система (3) называется относительно управляемой, если для каждого начального состояния (4) из некоторой окрестности нулевого элемента пространства непрерывных функций существует такое кусочно-непрерывное управление, что $x(t_i) = 0$, $t_i < +\infty$.

При исследовании относительной управляемости систем типа (3) важную роль играет определяющее уравнение, которое по простому правилу составляется с помощью правых частей уравнения (3):

$$q_{\kappa}(s) = A q_{\kappa-1}(s) + B q_{\kappa-1}(s-h); \quad q_0(0) = C, \quad q_0(s) = 0, \quad s \neq 0.$$

Определяющее уравнение назовем невырожденным, если

$$\text{ранг } \{q_{\kappa}(s), \kappa = 1, \dots; s = 1, \dots\} = n.$$

Теорема 3. Для относительной управляемости системы (3) необходимо и достаточно, чтобы определяющее уравнение было невырождено.

Этот результат легко обобщается на нестационарные системы, на системы с переменным запаздыванием, на нелинейные системы с запаздыванием.

Следует подчеркнуть, что относительная управляемость в

линейном случае уравнений с запаздыванием сводится к алгебраической проблеме, также, как в теории устойчивости исследование линейных систем сводится к алгебраической проблеме.

Состояние (4) системы с запаздыванием в момент t определяется отрезком траектории, поэтому для системы (3) естественно следующее понятие.

Определение 3. Система (3) называется полностью управляемой, если для каждого начального состояния (4) найдется конечный момент t_1 и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, такие, что траектория $x(t)$ удовлетворяет условию $x(t) \equiv 0$, $t_1 - h \leq t \leq t_1$. Можно показать, что в общем

случае из относительной управляемости не следует полная управляемость. Однако существует несколько классов систем, для которых относительная управляемость влечет за собой полную управляемость. Например,

$$\dot{x}(t) = Ax(t-h) + Cu(t)$$

или

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + Cu(t), \quad C - \text{неособая матрица}.$$

§ 2. Существование оптимальных управлений

Управляемость динамических систем тесно связана с задачей существования допустимых управлений, удовлетворяющих граничным условиям. Следующим вопросом, возникающим при исследовании оптимальных процессов в динамических системах, является проблема существования оптимальных управлений.

Пусть на траекториях системы (I) задан, например, функционал

$$J(u) = \varphi(x(t_1)). \quad (5)$$

При каких условиях среди измеримых функций $u(t)$ со значениями в заданном множестве $\mathcal{U}$ найдется управление, доставляющее минимум функционалу (5)?

Известно, что уже в простейших задачах оптимальное управление может не существовать.

Пример 1. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $t \in [0, 1]$,
 $\mathcal{U} = \{u: u = \pm 1\}$, $J(u) = x_2(1)$.

Метод приращений скалярных функций позволяет доказать ряд новых теорем существования оптимальных управлений, в которых известные ограничения типа выпуклости удается снять. Например, оптимальные управления существуют в задаче:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + c(u(t), t),$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0,$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} [f'_{n+1}(x, x(t-h)) + f''_{n+1}(u, t)] dt \rightarrow \min_u,$$

если $\varphi(x)$, $f'_{n+1}(x, y)$ — вогнуты по $\{x, y\}$, $\mathcal{U}$ — компакт.

На системы с запаздыванием общего вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-h(x, u, t)), u(t), t), \quad (6)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in S_0, \quad S_0 - \text{начальное множество,}$$

удается распространить теорему А.Ф.Филиппова [4].

§ 3. Принцип максимума

Традиционная форма записи принципа максимума заметно теряет свою стройность при переходе от системы (I) к более сложным. Пусть объект управления описывается одной из следующих систем уравнений:

$$a) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, u, t),$$

$$б) \quad \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t-h), u(t), t), \quad h = h(x, u, t)$$

$$в) \quad \frac{dx(t)}{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x(t), x(t-\tau), u(t), u(t-\sigma), t, \tau, \sigma) d\tau d\sigma,$$

$$г) \quad R^N(\mathcal{D}, t) x(t) = f(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(\kappa)}(t), u(t), t),$$

$$R^N(\mathcal{D}, t) = R^0(t) \mathcal{D}^N + \dots + R^N(t), \quad \mathcal{D} = \frac{d}{dt},$$

$$д) \quad x(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(\tau), u(\tau), \tau, t) d\tau.$$

Каждую из введенных систем представим в виде следующих уравнений

$$X_i(x(\cdot), \dot{x}(\cdot), \dots, x^{(\ell)}(\cdot), u(\cdot), t) = 0, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

где символы X_i означают функционалы, определенные на функциях $x(\cdot) = \{x(t), t \in T\}$, $u(\cdot) = \{u(t), t \in T\}$ и производных $\dot{x}(\cdot), \dots, x^{(\ell)}(\cdot)$.

На управлениях $u(t)$ и траекториях $x(t)$, $t \in T$, рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x, u, t) dt$$

с помощью кусочно-непрерывных функций $u(t)$, принимающих значения из ограниченного множества $\mathcal{U}$:

$$u(t) \in \mathcal{U}, \quad t \in T. \quad (7)$$

Введем функционал

$$\pi(x, \varphi, u) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi'(t) X(x(t), \dots, x^{(n)}(t), u(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x, u, t) dt,$$

где $\varphi(t)$ — некоторые вспомогательные функции.

Теорема 4. Для оптимального управления $u^*(t)$ и соответствующих ему в силу уравнений

$$\frac{\delta \pi(x^*; \varphi^*; u^*)}{\delta \varphi(t)} = 0, \quad \frac{\delta \pi(x^*; \varphi^*; u^*)}{\delta x(t)} = 0 \quad (8)$$

траекторий $x^*(t), \varphi^*(t)$ выполняется условие максимума

$$\frac{\delta_u \pi(x^*; \varphi^*; u^*)}{\delta u(t)} \leq 0, \quad u \in \mathcal{U}, \quad t \in T. \quad (9)$$

Здесь $\frac{\delta \pi}{\delta x(t)}$ — вариационная производная в момент t от

функции π по функциям $x(t)$, $t \in T$, $\frac{\delta_u \pi}{\delta u(t)}$ означает вариационную производную второго рода, которая определяется с помощью игольчатых вариаций управления $u(t)$ следующим образом:

$$J(u + \Delta u) - J(u) = \varepsilon \frac{\delta_u J(u)}{\delta u(\theta)} + o(\varepsilon),$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} u - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases}$$

Уравнения (8) задают $x^*(t), \varphi^*(t)$, вообще говоря, лишь на интервале (t_0, t_1) (недостающие граничные условия зави-

сят от конкретной задачи). Чтобы избавиться от необходимости каждый раз выписывать граничные условия для переменных x, ψ , рекомендуется уравнения движения сводить к интегральной форме (д). Если в уравнения движения входят линейные дифференциальные операторы ($\mathcal{R}$), то для упрощения вычислений члены, соответствующие в (8) этим операторам, целесообразно выделить. Уравнения движения систем управления тогда записываются в виде

$$\mathcal{R}^N(\mathcal{A}, t) x(t) = \bar{X}(x(s), \dot{x}(s), \dots, x^{(l)}(s), u(s), t),$$

а с помощью функционала

$$\bar{\mathcal{K}}(x, \psi, u) = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \bar{X}(x(s), \dots, x^{(l)}(s), u(s), t) dt - \int_{t_0}^{t_1} f_{n+1}(x, u, t) dt$$

необходимые условия оптимальности сводятся к следующим соотношениям

$$\mathcal{R}^N(\mathcal{A}, t) x^0(t) = \frac{\delta \bar{\mathcal{K}}(x^0; \psi^0; u^0)}{\delta \psi(t)},$$

$$\mathcal{R}^{*N}(\mathcal{A}, t) \psi^0(t) = \frac{\delta \bar{\mathcal{K}}(x^0; \psi^0; u^0)}{\delta x(t)},$$

$$\frac{\delta_v \bar{\mathcal{K}}(x^0; \psi^0; u^0)}{\delta u(t)} \leq 0, \quad v \in \mathcal{U}, \quad t \in T.$$

Здесь
$$\mathcal{R}^{*N}(\mathcal{A}, t) \psi(t) = \sum_{m=0}^N (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} [\mathcal{R}^{*N-m}(t) \psi(t)] -$$

сопряженные дифференциальные операторы.

Форма (8), (9) необходимых условий оптимальности может быть распространена на задачи оптимизации для объектов управления, описываемых уравнениями относительно функций нескольких переменных. Например, в задаче минимизации

$$J(u) = \iint_{\omega} f_{n+1}(x(s, t), u(s, t), s, t) ds dt$$

для уравнения

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t \partial s} = f(x(t,s), \frac{\partial x(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial x(t,s)}{\partial s}, u(t,s), t, s)$$

изменения в формулировке приведенного выше результата сводятся к замене одного аргумента t на два t, s .

§ 4. Принцип максимума для экстремалей

Принцип максимума Л.С.Понтрягина задачу оптимизации функционала

$$J(u) = c'x(t_1), \quad x(t_0) = 0, \quad (10)$$

для системы (1), (7) сводит к нахождению экстремалей, т.е. к отысканию функций $u(t)$, удовлетворяющих условию

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t), \quad (11)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial u}, \quad x(t_0) = 0, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -c. \quad (12)$$

Выделение среди экстремалей оптимальных управлений представляет серьезную задачу, если число экстремалей бесконечно. Последняя ситуация может возникнуть уже в простейших задачах.

Пример 2. Дана система: $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = -x_1^2$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $T = [0, 1]$, $U = \{u: |u| \leq 1\}$, $J(u) = x_2(t_1)$.

Среди экстремалей этой задачи находятся следующие

$$u^p(t) = \operatorname{sign} \cos \frac{(2p+1)\pi}{2} t, \quad p=0, 1,$$

Необходимые условия оптимальности для экстремалей можно сформулировать следующим образом.

Обозначим через $H^*(t)$ значение $H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t)$ вдоль экстремального управления $u^*(t)$ и соответствующих в силу (I2) траекторий $x^*(t), \psi^*(t)$.

Теорема 5. Оптимальное управление $u^*(t)$ в процессах с малой продолжительностью $t \approx t_1 - t_0$ таково, что $H^*(t_1)$ принимает максимальное значение среди остальных $H^*(t_i)$:

$$H^*(t_1) = \max_{u^*(t)} H^*(t_i) \quad (I3)$$

Поскольку для стационарных систем функция $H^*(t)$ вдоль экстремали постоянна, то для них последнее условие можно проверять в любой точке отрезка T . В силу этого критерия управления $u^p(t)$, $p \geq 1$, в примере 2 не могут быть оптимальными.

Условия (II), (I3) являются и достаточными для оптимальности управления, если система (I) и функционал (IO) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(u), \dots, \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(u), \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, u), x_i(0) = 0, i=1, \dots, n, \\ f_n(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n-1}, u) &= \lambda^m f(x_1, \dots, x_{n-1}, u), J(u) = x_n(t_1), m > -1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что управление $u \equiv 1$ в примере 2 оптимально.

§ 5. Особые управления

Интерес к теории особых управлений объясняется тем, что оптимальные особые управления не охватываются принципом максимума. Эта теория имеет большое значение и при изучении скользящих режимов и для оптимизации траекторий космической навигации. Например, известная спираль Лоудена порождается особым управлением.

В большинстве из существующих работ по особым управлениям необходимые условия получены или для частного вида систем, или в предположении открытости области $\mathcal{U}$ допустимых управлений. Метод приращений позволяет получить необходимые условия оптимальности особых управлений для общего случая задачи минимизации функционала (5) для системы (I).

Определение 4. Управление $u(t)$, $t \in T$, назовем особым управлением первого порядка, если

$$H(x(t), \psi(t), v, t) - H(x(t), \psi(t), u(t), t) \equiv 0, v \in \mathcal{U}, t \in T,$$

т.е. функция H вдоль $u(t)$, $t \in T$, и соответствующих ему в силу (I) и

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial x}, \quad \psi(t_f) = - \frac{\partial \varphi(x(t_f))}{\partial x},$$

функций $x(t)$, $\psi(t)$ не зависит от параметров v , $v \in \mathcal{U}$.

Теорема 6. Оптимальное особое управление первого порядка $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию

$$\Delta_{\sigma} f(x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), t) [\psi^{\circ}(t) + \psi^{\circ}(t)] \Delta_{\sigma} f(x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), t) + \\ + \psi^{\circ}(t) \frac{\partial \Delta_{\sigma} f(x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), t)}{\partial x} \Delta_{\sigma} f(x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), t) \leq 0 \quad (15)$$

для всех $\sigma \in \mathcal{U}$, $t \in T$.

Здесь $x^{\circ}(t)$ – оптимальная траектория, $\psi^{\circ}(t)$ – решения системы (14), $\psi^{\circ}(t)$ – решения уравнений

$$\dot{\psi}^{\circ} = - \frac{\partial f(x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), t)}{\partial x} \psi^{\circ} - \psi^{\circ} \frac{\partial f(x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), t)}{\partial x} - \\ - \frac{1}{2} \psi^{\circ} \frac{\partial^2 f(x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), t)}{\partial x^2}, \quad \psi^{\circ}(t_1) = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(x^{\circ}(t_1))}{\partial x^2}.$$

Этим же методом можно исследовать особые управления второго порядка, т.е. такие оптимальные особые управления первого порядка, вдоль которых левая часть (15) обращается в тождественный нуль по $\sigma \in \mathcal{U}$, $t \in T$.

§ 6. Задача оптимизации с параметрами.

Пусть заданы множества V и W в p -мерном и q -мерном векторных пространствах. Среди элементов $\sigma \in V$, $w \in W$ этих множеств требуется указать такие оптимальные параметры σ° , w° , что

$$J(\sigma^{\circ}, w^{\circ}) = \min_{\sigma \in V, w \in W} J(\sigma, w), \quad (16)$$

где $J(\sigma, w) = c(x(t_1))$ – функция, определенная на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \sigma), \quad \sigma \in V, \quad t \in T = [t_0, t_1] \quad (17)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = g(w), \quad w \in W. \quad (18)$$

Обозначим через $\delta(\varepsilon, \bar{x})$ звездную окрестность точки $\bar{x}$



относительно множества $Z: y \in G(z, Z)$, если найдется последовательность чисел $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, \varepsilon_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$, такая, что $(1 - \varepsilon_i)z + \varepsilon_i y \in Z$ при всех $i \geq 1$. Введем функции

$$H(x, \psi, v) = \psi' f(x, v), \quad h(\psi, w) = \psi' g(w).$$

Через $x^*(t)$ и $\psi^*(t)$, $t \in T$, будем обозначать решения основной системы (I7) и сопряженной системы

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H(x, \psi, v)}{\partial x}, \quad \psi(t_1) = -c,$$

соответствующие оптимальным параметрам v^*, w^* . Выражение типа $f(x, V)$ означает множество

$$\{z: z = f(x, v), v \in V\}.$$

Теорема 7. Для задачи (I6)–(I8) справедливы следующие утверждения:

$$I. \quad a) \quad H(x^*(t), \psi^*(t), v^*) \geq \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} H(x^*(t), \psi^*(t), v) dt$$

для всех v таких, что при $t \in T$

$$f(x^*(t), v) \in G(f(x^*(t), v^*), f(x^*(t), V));$$

$$b) \quad h(\psi^*(t_0), w^*) \geq h(\psi^*(t_0), w) \quad \text{для всех } w \text{ таких, что } g(w) \in G(g(w^*), g(W)).$$

2. Принцип максимума. Если при каждом x множества

$f(x, V), g(W)$ выпуклы, то

$$a) \quad H(x^*(t), \psi^*(t), v^*) = \max_{v \in V} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} H(x^*(t), \psi^*(t), v) dt, \quad (I9)$$

$$b) \quad h(\psi^*(t_0), w^*) = \max_{w \in W} h(\psi^*(t_0), w). \quad (20)$$

3. Если функции $f(x, v), g(w)$ дифференцируемы по v, w ,

то

$$a) \quad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^*(t), \psi^*(t), v^*)}{\partial v} dt v^* \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^*(t), \psi^*(t), v)}{\partial v} dt v$$

для всех $v \in G(v^*, V)$;

$$b) \quad \frac{\partial h'(\psi^*(t_0), w^*)}{\partial w} w^* \geq \frac{\partial h'(\psi^*(t_0), w)}{\partial w} w \quad \text{для всех } w$$

$$w \in G(w^0, W)$$

4. Если функции $f(x, v)$, $g(w)$ дифференцируемы по v , w , множества V , W выпуклы, то

$$a) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), v^0)}{\partial v} dt v^0 = \max_{v \in V} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), v)}{\partial v} dt v, \quad (21)$$

$$b) \frac{\partial h(\psi^0(t_0), w^0)}{\partial w} w^0 = \max_{w \in W} \frac{\partial h(\psi^0(t_0), w)}{\partial w} w. \quad (22)$$

5. Если в дополнение к условиям утверждения 4 функции $H(x, \psi, v)$, $h(\psi, w)$ вогнуты по v , w , то для v^0 , w^0 выполняются (19), (20).

Условия данного утверждения реализуются, например, для системы (17), в которой функции $f_i(x, v)$ не зависят от x_n , функции $f_1(x, v), \dots, f_{n-1}(x, v), g_1(w), \dots, g_{n-1}(w)$ линейны по v , w , функции $f_n(x, v)$, $g_n(w)$ выпуклы по v , w , постоянные c_i равны нулю, за исключением последней: $c_n = 1$.

6. Если функции $f(x, v)$, $g(w)$ дифференцируемы по v , w , множества V , W открыты, то

$$a) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), v^0)}{\partial v} dt = 0, \quad (23)$$

$$b) \frac{\partial h(\psi^0(t_0), w^0)}{\partial w} = 0. \quad (24)$$

7. Если функции $f(x, v)$, $g(w)$ дифференцируемы по v , w , то градиенты функции $J(v, w)$ в точке v^1, w^1 равны:

$$a) \frac{\partial J(v^1, w^1)}{\partial v} = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^1(t), \psi^1(t), v^1)}{\partial v} dt,$$

$$b) \frac{\partial J(v^1, w^1)}{\partial w} = - \frac{\partial h(\psi^1(t_0), w^1)}{\partial w},$$

где $x^1(t), \psi^1(t)$ - решения основной и сопряженной систем, соответствующие параметрам v^1, w^1 .

8. Если $f(x, v) = Ax + b(v)$, то условия (19), (20) необ-

ходимы и достаточны для оптимальности u^* , w^* .

9. Принцип ε -максимума:

$$a) \quad H(x^*(t), \psi^*(t), u^*) \geq \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} H(x^*(t), \psi^*(t), u) dt - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \geq 0, \quad (25)$$

для всех $u \in V$;

$$b) \quad h(\psi^*(t_0), w^*) \geq h(\psi^*(t_0), w) - \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 \geq 0, \quad (26)$$

для всех $w \in W$.

При ограниченных множествах V, W для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ можно указать такое число τ , что выполняются условия (25), (26) в любой задаче (I6)–(I8) с $t_1 - t_0 \leq \tau$.

Для уяснения существенности основных условий в приведенных утверждениях рассмотрим

Пример 3. $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $\dot{x}_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_1(0) = w_1$, $x_2(0) = w_2$, $x_3(0) = 0$, $0 \leq t \leq \tau$, $u_1 = u_2 = 0$, $c_3 = 1$

$$V = W = \{u_1, u_2 : (u_1 - 1)^2 + (u_2 + 1)^2 \geq 8, (u_1 - 2)^2 + (u_2 + 2)^2 \leq 18\}$$

Сначала рассмотрим задачу оптимизации только по параметрам u_1 , u_2 , полагая $w_1 = w_2 = 0$. Имеем $x_1(t) = u_1 t$, $x_2(t) = u_2 t$, $x_3(t) = (u_1^2 + u_2^2) \frac{\tau^3}{2}$. Отсюда $u_1^* = -1$, $u_2^* = 1$. Далее

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 + \psi_3 (x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{\psi}_1 = -2x_1 \psi_3, \quad \dot{\psi}_2 = -2x_2 \psi_3, \quad \dot{\psi}_3 = 0, \\ \psi_1(\tau) = \psi_2(\tau) = 0, \quad \psi_3(\tau) = -1, \quad \int_0^\tau H(x^*(t), \psi^*(t), u) dt = \frac{2}{3} \tau^3 (u_1 - u_2) - \frac{2\tau^3}{3}.$$

Последняя функция в точке $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ достигает абсолютного минимума среди V . Таким образом, условие (I9) в данном примере не имеет места. По той же причине нарушается свойство (2I). В этом примере не выполняется и свойство (22).

Перейдем к оптимизации по параметрам w_1 , w_2 при условии, что $u_1 = u_2 = 0$. Имеем $x_1(t) = w_1$, $x_2(t) = w_2$, $x_3(\tau) = \tau(w_1^2 + w_2^2)$. Отсюда $w_1^* = -1$, $w_2^* = 1$.

Проверим необходимые условия оптимальности:

$$h(\psi, w) = \psi_1 w_1 + \psi_2 w_2, \quad h(\psi^0(0), w) = 2\tau(w_1 - w_2)$$

Последняя функция не удовлетворяет ни одному из свойств (20), (22), (24).

Из того, что свойства (19), (20) нарушаются при любом $\tau > 0$ следует, что утверждение 9 в общем случае нельзя улучшить.

§ 7. Оптимизация дискретных систем

Значение теории оптимальных процессов в дискретных системах определяется уже тем фактом, что решение сколь-нибудь сложных задач оптимизации непрерывных систем связано с использованием ЭЦВМ. Общая теория этого вопроса весьма запутана.

Следующий пример показывает, что многие известные формы необходимых условий оптимальности некорректны.

пример 4. Уравнения объекта: $x(t+1) = u(t)$, $y(t+1) = v(t)$,
 $z(t+1) = z(t) + x^2(t) + y^2(t)$, $0 \leq t \leq 2$, $x(0) = y(0) = z(0) = 0$

; управление $\{u, v\}$ выбирается

из множества $\mathcal{U} : \{u, v : (u-2)^2 + (v+2)^2 \leq 18, (u-1)^2 + (v+1)^2 \geq 8\}$.

Требуется минимизировать функционал $J(u, v) = z(2)$.

Нетрудно подсчитать, что на оптимальном управлении при $t=0$ функция $H(x, \psi, u, v)$ не имеет стационарного значения и не достигает локального максимума.

Известные формы необходимых условий оптимальности имеют

тот недостаток, что не переходят в принцип максимума, когда дискретная система стремится к непрерывному аналогу.

Для дискретных систем справедлив следующий результат, свободный от этого недостатка.

Теорема 8. Если $u^*(t)$ — оптимальное управление в системе

$$x(t+h) = x(t) + h f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T_h = [t_0, t_{1h}],$$

для функционала

$$J_h(u) = \varphi(x(t_{1h})), \quad u(t) \in \mathcal{U}$$

где $\mathcal{U}$ — ограниченное множество, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $h = h(\varepsilon) > 0$, что выполняется условие ε -максимума:

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) \geq H(x(t), \psi(t), v, t) - \varepsilon$$

для всех $v \in \mathcal{U}$, $t \in T_h$.

$$\text{Здесь } H(x, \psi, u, t) = \psi'x + h \psi' f(x, u, t),$$

$$\psi(t-h) = \psi(t) + h \frac{\partial f'(x, u, t)}{\partial x} \psi(t), \quad \psi(t_{1h}-h) = - \frac{\partial \varphi(x(t_{1h}))}{\partial x}.$$

Эта теорема в общем случае не может быть улучшена.

Пример 5. $x_1(t+h) = x_1(t) + h u(t)$, $x_2(t+h) = x_2(t) + h [x_1^2(t) - u^2(t)]$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $|u| \leq 1$, $\varphi(x) = x_2$, $t_0 = 0$, $t_{1h} = 2$.

В примере 5 ни при каком $h > 0$ оптимальное управление не удовлетворяет дискретному аналогу принципа максимума Л.С.Понтрягина.

§ 8. Оптимальные процессы при нескольких ^{ни}участках.

При использовании изложенных выше методов в задачах с

несколькими участниками по обычной схеме получаются некоторые теоремы существования оптимальных управлений, необходимые и достаточные условия оптимальности [5].

Цитированная литература

1. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Л.И.Розоноэр. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, № 10-12, 1959.
3. Ф.М.Кириллова. Об одном направлении в теории оптимальных процессов. Автоматика и телемеханика, № 11, 1967.
4. Р.Габасов, С.В.Чуракова. О существовании оптимальных управлений в системах с запаздыванием. Дифференциальные уравнения, № 12, 1967.
5. Ф.М.Кириллова, М.А.Полетаева. О некоторых задачах преследования. Аннотация докл. Междунар. конгресса матем. (Москва, 1966).

INTEGRALS OF SET VALUED FUNCTIONS AND LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Czesław Olech

Institute of Mathematics, Cracow Branch, Polish Academy of Sciences

Introduction. Consider a set valued function P sending $t \in J = [0,1]$ into a closed subset $P(t) \subset E$, where E is a finite dimensional real inner product space. Let $L_1(J, E)$ (L_1 for short) denote the space of Lebesgue integrable functions from J into E and let K_P be the subset of L_1 of all v such that $v(t) \in P(t)$ almost everywhere (a.e.) in J . If K_P is not empty then P is called integrable and the integral of P is defined by

$$I(P) = \int_J P(t) dt = \left\{ I(v) = \int_J v(t) dt \mid v \in K_P \right\}. \quad (0.1)$$

If $P(t) = \{0, d(t)\}$, $d \in L_1$, Then $K_P = \{ \chi_A d \mid A \subset J, A \text{ is measurable} \}$, where χ_A stands for the characteristic function of A . In this case $I(P)$ reduces to the range of the vector valued measure $\mu(A) = \int_A d(t) dt$, and a result due to Lapunov [8] tells us that $I(P)$ is compact and convex. This result has been generalized, that is convexity and compactness of $I(P)$ have been obtained by several authors for various classes of maps P . Let us mention here papers [1], [2], [4], [5], [6], [7], [9], [10], [11] and [12]. What was common to all those papers was a more or less explicit assumption that $I(P)$ is bounded. In fact from the author's paper [12] one can easily obtain the following

Theorem 1. If $P(t)$ is closed for each $t \in J$ and $I(P)$ is bounded then $I(P)$ is convex and compact.

In the next section we discuss in more details the relation between Theorem 1 and the results of [12] as well as other results in the case when $I(P)$ is bounded. However the main purpose of the paper is to examine the case $I(P)$ unbounded and in particular to extend Theorem 1. In this case examples

show that $I(P)$ need not be closed. We will give in section 2 a characterisation of $I(P)$ which will lead us in a natural way to sufficient conditions for closedness of $I(P)$.

Besides applications to economics (cf. [1] and [6]), the integrals of set valued mappings are related to the so called attainable set for a linear control system (cf. [9], [10] and [11]) and the results we are discussing here have relevant implications to some optimal control problems. This application is discussed in the last section.

Finally let us remark that all results presented in this paper hold true if the Lebesgue measure on the interval J is replaced by any abstract measure but finite and nonatomic.

The case of bounded integral. In [12] the author considered the class $K \subset L_1(J, E)$ satisfying the following three conditions:

- (i) K is closed with respect to the convergence in measure (hence also in L_1 strong topology).
- (ii) $|I(v)| \leq m < +\infty$ for each $v \in K$.
- (iii) If $u, v \in K$ and $s \in J$, and if we put $w(t) = u(t)$ for $0 \leq t < s$ and $w(t) = v(t)$ for $s \leq t \leq 1$, then $w \in K$.

It is clear that K_P satisfies conditions (i) and (iii) provided $P(t)$ is closed a.e. in J and condition (ii) is the same as to say that $I(P)$ is bounded. Theorem 5 of [12] states that if K satisfies (i), (ii) and (iii) then $I(K)$ is closed and compact. Thus Theorem 1 is a consequence of this result.

In the same paper we proved (compare Theorem 1 of [12]) that for each basis ξ in E there is an extremal element in K , denoted by $e(K, \xi)$, with the property that for each $v \in K$ the inequality holds $v(t) \leq_\xi e(K, \xi)(t)$ a.e. in J and $I(e(K, \xi))$ is an extreme point of the closure $cl I(K)$ of $I(K)$. Vice versa, for each extreme point p of $cl I(K)$, there is a basis ξ such that $p = I(e(K, \xi))$. Here " $\leq_\xi$ " stands for the lexicographical order with respect to the basis ξ . Let us also recall that an extremal face or an extremal subset of a convex set B is a set $A \subset B$ with the property that each line segment contained in B with interior points in A is contained in A . In particular a single point extremal subset of B is called an extreme point of B .

Denote by $E(K)$ the set of extremal elements of K and by K_0 the closure of $E(K)$ with respect to property (iii). Again in [12] we proved the following

Theorem 2. The set K_0 is the smallest subset of K closed with respect to condition (iii) and having the same range of integrals as K ; that is $I(K_0) = I(K)$ and if $K_1 \subset K$ satisfies (iii) and $I(K_1) = I(K)$ then $K_0 \subset K_1$.

Theorem 2 can be considered as a generalization of the so called "bang-bang" principle of LaSalle (cf. [9]).

Let us observe that Theorem 1 and Theorem 2 for $K = K_P$ are true without any regularity assumptions on the map P but only that values of P are closed subsets of E .

The case of unbounded integral $I(P)$ of P . Notice first that convexity of $I(P)$ follows from the results quoted in the previous section. Indeed, let $u, v \in K_P$ and let $K_1 \subset K_P$ be the set obtained by closing with respect to properties (i) and (iii) the two point set $\{u, v\}$. It is easy to check that $K_1 = \{w \mid w = \chi_A u + \chi_{J \setminus A} v, A \subset J \text{ is measurable}\}$. Hence K_1 satisfies also (ii). Therefore $I(K_1)$ is convex. But $I(u), I(v) \in I(K_1) \subset I(P)$, which implies convexity of $I(P)$.

The basic result in the case we consider is the following lemma (compare [13], Lemma 1).

Lemma 1. Suppose e is an extreme point of the closure $\text{cl } I(P)$ of $I(P)$. Then for each $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that for any two $u, v \in K_P$ the inequalities $|e - I(u)| < \delta$ and $|e - I(v)| < \delta$ imply that $\|u - v\| < \varepsilon$, where $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_1$ stand for the norm in E and L_1 respectively.

Proof. Without any loss of generality we may assume that $e = 0$. There is a basis (orthonormal) in E such that $e = 0$ is the lexicographical maximum of $\text{cl } I(P)$. That simply means that for each $s \in \text{cl } I(P)$, if the first k coordinates of s with respect to this basis are zeros, $0 \leq k < n$, n is dimension of E , then the $k+1$ coordinate of s is nonpositive. In which follows we shall consider the coordinates corresponding to this basis in E and we denote them by upper script. Hence s^i, u^i denotes the i -th coordinate of point s and function u respectively.

Contradicting the conclusion of the lemma we conclude

that there exist two sequences $\{u_m\}$ and $\{v_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, both contained in K_P with the properties

$$\lim_m I(u_m) = 0 = \lim_m I(v_m) \quad (2.1)$$

while

$$a_m = \int_J |u_m(t) - v_m(t)| dt \geq \varepsilon_0 > 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

Denote by

$$b_m^i = \int_J |u_m^i(t) - v_m^i(t)| dt, \quad i=1, \dots, n, \quad m=1, 2, \dots \quad (2.3)$$

A simple induction argument allows to choose an integer $k \leq n$ and subsequences $b_{m_\alpha}^i$ with the following properties

$$b_{m_\alpha}^k \geq \eta > 0, \quad b_{m_\alpha}^i / b_{m_\alpha}^k \rightarrow 0 \text{ as } \alpha \rightarrow \infty \text{ for } i < k, \quad (2.4)$$

and

$$b_{m_\alpha}^i / b_{m_\alpha}^k \leq M < +\infty \text{ for } i > k. \quad (2.5)$$

Let us define now a sequence $w_\alpha \in K_P$ so that

$$\begin{aligned} w_\alpha(t) &= u_{m_\alpha}(t) \quad \text{if } u_{m_\alpha}^k(t) \geq v_{m_\alpha}^k(t), \\ w_\alpha(t) &= v_{m_\alpha}(t) \quad \text{if } u_{m_\alpha}^k(t) < v_{m_\alpha}^k(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

In particular, $w_\alpha^k(t) = \max(u_{m_\alpha}^k(t), v_{m_\alpha}^k(t))$ and by (2.1), (2.3) and (2.4) we get that there is α_0 such that

$$\int_J w_\alpha^k(t) dt \geq \eta/4 > 0 \quad \text{if } \alpha \geq \alpha_0.$$

Moreover, from (2.1), (2.4) and (2.5) it follows that

$\int_J w_\alpha^i(t) dt / b_{m_\alpha}^k$ tends to 0 if $i < k$ and is bounded if $i \geq k$. Therefore there is a subsequence for simplicity still denoted by w_α such that

$\int_J w_{\alpha}^i(t) dt / b_m^k$ converges for each i and the limit is 0 if $i < k$ and positive if $i = k$. But $d_{\alpha} = \int_J w_{\alpha}(t) dt \in \text{cl } I(P)$ and so does 0. Therefore by convexity of $\text{cl } I(P)$ we conclude that also $\eta d_{\alpha} / b_m^k \in \text{cl } I(P)$, since $\eta / b_m^k \leq 1$. Hence also the limit $d = \lim \eta d_{\alpha} / b_m^k$ belongs to $\text{cl } I(P)$. But $d = (0, \dots, 0, \delta, \dots)$, where δ is positive, therefore 0 is not the lexicographical maximum of $\text{cl } I(P)$, contrary to what was assumed. This completes the proof.

Since the space L_1 is complete and K_P is closed in L_1 it follows from Lemma 1 that each extreme point of $\text{cl } I(P)$ belongs to $I(P)$ and the corresponding $v \in K_P$ is unique. This leads to the following extension of Theorem 1.

Theorem 3 Suppose values of P are closed subsets of E . Then the integral $I(P)$ of P is convex and each compact extremal face of the closure $\text{cl } I(P)$ of $I(P)$ is contained in $I(P)$. Proof. Suppose S is a compact extremal face of $\text{cl } I(P)$. From the remark following Lemma 1 it follows that the set $\text{ext } S$ of all extreme points of S is contained in $I(P)$. But $I(P)$ is convex and S is equal to the convex hull of $\text{ext } S$ (since S is compact and E is finite dimensional), therefore $S \subset I(P)$, what was to be proved.

A more detailfull analysis allows to prove a sharper result.

Theorem 3' Suppose S is a compact extremal face of $\text{cl } I(P)$ and denote by $E(S) = \{v \in K_P \mid I(v) \text{ is an extreme point of } S\}$. Then $S = I(K_0)$, where K_0 is obtained from $E(S)$ by closing with respect to property (iii).

Proof. For each extremal subset S of a closed convex set B there are orthogonal vectors $a_1, \dots, a_k$, $k \leq n$, such that $S = S_k$, where $S_1 = \{x \in B \mid \langle x, a_1 \rangle = \max \langle b, a_1 \rangle \text{ for } b \in B\}$ and $S_j = \{x \in S_{j-1} \mid \langle x, a_j \rangle = \max \langle s, a_j \rangle \text{ for } s \in S_{j-1}\}$ if $j > 1$.

This can be proved by induction. Consider now a basis in E whose k first vectors are $a_1, \dots, a_k$ corresponding to the fixed extremal subset S of $\text{cl } I(P)$. With respect to such basis the first k coordinates of any two points of S are the same. Correspondingly one can prove that if $u, v \in K_P$ and $I(u), I(v) \in S$ then the first k coordinates of u and v are equal a.e. in J , respectively. From it we get that the set $K_1 =$

$\{v \in K_P \mid I(v) \in S\}$ is not empty and satisfies conditions (i), (ii) and (iii). Therefore by Theorem 1 $I(K_1)$ is convex, compact and by definition $I(K_1) \subset S$ as well as $\text{ext} S \subset I(K_1)$. The last two relations imply that $S = I(K_1)$. From Lemma 1 we know that to each extreme point p of S there is a unique v in K_1 such that $p = I(v)$. Thus $E(S)$ is the set of extremal elements of K_1 and therefore Theorem 2 completes the proof.

Notice that the closure $\text{cl } I(P)$ of $I(P)$ may not admit any extreme points. This suggests that $I(P)$ may be open. In fact it is easy to give examples of P such that $I(P)$ is open. The set of extreme points of $\text{cl } I(P)$ is not empty if and only if the latter set does not contain a line. From Theorem 3 we will derive now a sufficient condition for closedness of $I(P)$.

Theorem 4. If each proper extremal subset of $\text{cl } I(P)$ is compact then $I(P)$ is closed.

Proof. For each $p \in (\text{cl } I(P) \setminus I(P))$, if the latter is not empty, there is a hyperplane H which supports $\text{cl } I(P)$ at p and which does not contain $\text{cl } I(P)$ (cf. [15]). The intersection $H \cap \text{cl } I(P)$ is then a proper extremal subset of $\text{cl } I(P)$ containing p . By assumption it is compact and by Theorem 3 it is contained in $I(P)$. Hence also $p \in I(P)$. Thus $I(P) = \text{cl } I(P)$, what was to be proved.

For the next result we need a regularity condition concerning mapping P . Namely, we assume that for each a

$$\sup_{p \in P(t)} \langle p, a \rangle = \sup_{v \in K_P} \langle v(t), a \rangle. \quad (2.7)$$

This condition is connected with measurability of set valued mappings.

Theorem 5. If P satisfies (2.7), the values of P are closed subsets of E and the set

$$A = \left\{ a \mid \max_{p \in P(t)} \langle p, a \rangle \text{ exists a.e. in } J \text{ and is integrable} \right\}$$

is open, then $I(P)$ is closed.

Proof. For each $a \in A$ $\sup \langle a, s \rangle$ for $s \in I(P)$ is finite. Since A is open, this implies that $I(P)$ hence also $\text{cl } I(P)$ does not contain a line. Consequently each extremal subset of $\text{cl } I(P)$ does not contain a line but does contain an extreme point. Let S be a proper extremal face of $\text{cl } I(P)$ and $p \in S$ be an extreme point of $\text{cl } I(P)$. There is $b \neq 0$ such that

$$S \subset S_0 = \left\{ x \mid \langle x, u \rangle = \langle p, u \rangle = \max_{y \in \text{cl } I(P)} \langle y, u \rangle \right\}. \quad (2.8)$$

Suppose $v \in K_P$ and $I(v) = p$. Then for each $w \in K_P$ we have the inequality $\langle w(t), u \rangle \leq \langle v(t), u \rangle$ a.e. in J . Indeed, if $\langle w(t), u \rangle < \langle v(t), u \rangle$ on a set $B \subset J$ of positive measure, then putting $u(t) = w(t)$ if $t \in B$ and $v(t)$ if $t \in J \setminus B$ we get $u \in K_P$ and $\langle I(u), u \rangle > \langle I(v), u \rangle = \langle p, u \rangle$, contrary to (2.8). From (2.7) and (2.8) we have that a.e. in J

$$\sup_{p \in P(t)} \langle p, u \rangle = \sup_{w \in K_P} \langle w(t), u \rangle = \langle v(t), u \rangle = \max_{p \in P(t)} \langle p, u \rangle \quad (2.9)$$

Hence $b \in A$. Now we will prove that S is bounded. If S were unbounded then there would exist $d \neq 0$ and a sequence in $I(P)$ $x_n = p + dt_n + a_n$, where t_n tends to $+\infty$ and $|a_n|$ tends to 0. Suppose $x_n = I(v_n)$, $v_n \in K_P$. Take $a = u + \varepsilon d$, $\varepsilon > 0$ and $\sup_n \langle a, v_n(t) \rangle$. Since $I(\langle a, v_n \rangle) = \langle u, p \rangle + \varepsilon \langle d, d \rangle t_n + \langle a_n, a \rangle$ approaches infinity as $n \rightarrow \infty$, therefore $\sup_n \langle a, v_n(t) \rangle \leq \sup_{v \in K_P} \langle a, v(t) \rangle$ is not integrable and by (2.7) $a = u + \varepsilon d$

cannot be in A contrary to assumption that A is open. Thus S is compact. Since S was an arbitrary proper extremal face of $\text{cl } I(P)$ therefore each proper extremal face of $\text{cl } I(P)$ is compact and Theorem 3 yields the conclusion of Theorem 4.

From theorems 5 and 3' we have the following extension of LaSalle's "bang-bang" principle.

Theorem 6. Under the assumptions of Theorem 5, the set $K_0 \subset K_P$ obtained by closing the set of all extremal elements of K_P with respect to both L_1 topology and condition (iii) has the properties: $I(K_0) = I(K_P) = I(P)$ and for each $K_1 \subset K_P$ closed in L_1 topology and having the property (iii) we have the inclusion $K_0 \subset K_1$.

Remark. Under the assumption of Theorem 5 one can prove that if $P_0(t) = \text{cl}(\text{ext}(\text{clco } P(t)))$, then $P_0(t) \subset P(t)$ a.e. in J and $I(P_0) = I(P)$. Moreover, if $P_1(t)$ is closed subset on E , $P_1(t) \subset P(t)$ a.e. in J and $I(P_1) = I(P)$, then $P_0(t) \subset P_1(t)$ a.e. in J .

As we pointed out once before $I(P)$ when unbounded need not be closed. However, if $I(P)$ does not contain a line one can show that $I(P)$ is "lower closed" (comp. [16], where the same term is used, though not in the same sense). To define this consider an order in E induced by a closed convex and proper cone $C \subset E$; that is $x, y \in E$ and $x \leq y$ if and only if $y - x \in C$. We will say that a set $S \subset E$ is C -lower closed if for each $p \in \text{cl } S$ there is $q \in S$ such that $q \leq p$.

For the next result we need to recall the definition of the asymptotic cone of a convex set. Let S be a closed convex set. Set

$$C(S) = \left\{ c \mid s + tc \in S \text{ for each } s \in S \text{ and } t \geq 0 \right\}.$$

The set $C(S)$ is closed convex cone and proper ($C(S) \cap (-C(S)) = \emptyset$) if S does not contain a line. $C(S)$ is called the asymptotic cone of S . From Theorem 3 we have the following theorem (compare [13], Theorem 2).

Theorem 7. If $I(P)$ does not contain a line, $P(t)$ is closed subset of E for each t and $C_{\infty} = C(\text{cl } I(P))$ is the asymptotic cone of $\text{cl } I(P)$, then $I(P)$ is C_{∞} -lower closed.

Proof. Take $p \in \text{cl } I(P)$ and consider the set $Q = \text{cl } I(P) \cap (p - C_{\infty})$. We claim that Q is compact (it clearly is nonempty, closed and convex). If it were unbounded there would exist a ray $\{p + ta \mid t \geq 0\}$, $a \neq 0$, contained in Q . This would imply that $a \in (-C_{\infty})$ by definition of Q and also $a \in C_{\infty}$. Which can be the case only if $a = 0$. Thus Q is bounded. Take now d such $\langle d, c \rangle$ is negative for each $c \in C_{\infty}$. Since C_{∞} is proper, such d exists. Put

$$Q_1 = \left\{ q \in Q \mid \langle q, d \rangle = \max_{q \in Q} \langle q, d \rangle \right\}.$$

For each $p_0 \in Q_1$ we have the inequality $p_0 \leq p$. On the other hand let S be the smallest extremal face of $\text{cl } I(P)$ containing p_0 . For each $s \in S$ there is $\varepsilon > 0$ such that $q = p_0 + t(s - p_0)$ belongs to S if $|t| < \varepsilon$. In other words, p_0 is an interior point of S relative to the linear variety of the smallest dimension containing S . Suppose now S contains a ray $p_0 + ta$ then on one hand $a \in C_{\infty}$ on the other $p_1 = p_0 - \varepsilon a \in S$ for some

$\varepsilon > 0$. Hence $\langle d, p_1 \rangle = \langle d, p_0 \rangle - \varepsilon \langle d, a \rangle < \langle d, p_0 \rangle$. But $p_1 \leq p_0$ and $p_1 \in \text{cl } I(P)$, thus also $p_1 \in Q$. Hence the latter inequality is impossible, so S is compact and by Theorem 3 contained in $I(P)$. Hence also $p_0 \in I(P)$, which finishes the proof.

Suppose now that a cone C is given and we ask for sufficient conditions for $I(P)$ to be C -lower closed. An answer to this question is given by the next result.

Theorem 8. Suppose $C \subset E$ is a proper, closed and convex cone. Assume that for each $a \in \text{int } C^0 = \text{int } \{a \mid \langle a, c \rangle \leq 0 \text{ for each } c \in C\}$ $\sup \langle p, a \rangle$ for $p \in P(t)$ is bounded by an integrable function, then $I(P)$ is C -lower closed.

Proof. Again by C_∞ denote the asymptotic cone of $\text{cl } I(P)$. By the assumption for each $a \in \text{int } C^0$ we have $\sup \langle a, p \rangle$ for $p \in I(P)$ is finite. Therefore $\langle a, c \rangle \leq 0$ for each $c \in C_\infty$, which implies that $C_\infty \subset C$. In particular C_∞ is proper and $I(P)$ does not contain a line. By the previous theorem $I(P)$ is C_∞ -lower closed, therefore the inclusion $C_\infty \subset C$ implies that also $I(P)$ is C -lower closed, what was to be proved.

Till now we did not assume any convexity assumption concerning P . For P with convex values some sufficient conditions for closedness of $I(P)$ could be derived from existence theory in calculus of variation or optimal control theory (cf. [3] and [14]). In fact the lemma in [14] gives immediately the following

Theorem 9. If $P(t)$ is convex and closed for each $t \in J$, the asymptotic cone of $P(t)$ is constant and equal C a.e. in J and the assumption: $\sup \langle p, a \rangle$ for $p \in P(t)$ is bounded by an integrable function for each $a \in \text{int } C^0$ holds true, then $I(P)$ is closed and the asymptotic cone of $I(P)$ is equal C .

Theorem 9 can be obtained also from Theorem 8. In fact we have the following sharper result.

Theorem 10. Assume all assumption of Theorem 9 except convexity of $P(t)$. Instead assume that on a set $A \subset J$ of positive measure

$$P(t) + C \subset P(t), \quad t \in A. \quad (2.10)$$

Then $I(P)$ is closed and the asymptotic cone of $I(P)$ is equal C .

Proof. From Theorem 7 it follows that $I(P)$ is C -lower closed. Thus if $p \in \text{cl } I(P)$, then there is $q \in I(P)$ and such that $p - q \in C$. Let $v \in K_P$ and $I(v) = q$. Put $w(t) = v(t)$ if $t \in J \setminus A$ and $w(t) = v(t) + (p - q)/a$ if $t \in A$, where a is the measure of A . By (2.10), $w \in K_P$, and $I(w) = p$. Hence $p \in I(P)$ which shows that $I(P)$ is closed. The same argument shows that $I(P) + C \subset I(P)$. Therefore the asymptotic cone of $I(P)$ contains C . On the other hand as in the proof of Theorem 8 the opposite inclusion can be established also. Therefore the asymptotic cone of $I(P)$ is equal C .

Applications to linear control problems. Consider a linear control system

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, u), \quad (3.1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, A is a n by n matrix and $u \in \mathbb{R}^m$. Suppose the cost functional is of a similar form, namely

$$\int_J (\langle b(t), x(t) \rangle + f_0(t, u(t))) dt. \quad (3.2)$$

As admissible control function we take all measurable $u: J \rightarrow \mathbb{R}^m$ subject to constraint $u(t) \in U(t)$ a.e. in J , where U is a given set valued mapping. The optimal problem we wish to discuss briefly consists in minimizing (3.2) in the class of solutions of (3.1) corresponding to admissible control functions and satisfying the following boundary value condition

$$x(0) = x_0 \quad \text{and} \quad x(1) = x_1. \quad (3.3)$$

The solution to the problem we will call an optimal solution.

Increasing the dimension by one, we can transform the problem to the form: the system

$$\dot{y} = D(t)y + F(t, u), \quad y \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (3.4)$$

where $D(t) = \begin{Bmatrix} A(t), 0 \\ b(t), 0 \end{Bmatrix}$, $F(t, u) = (f(t, u), f_0(t, u))$, the class of admissible controls is unchanged, the boundary value condition is

$$y(0) = y_0 = (x_0, 0) \quad \text{and} \quad y(1) \in \{x_1\} \times \mathbb{R} \quad (3.5)$$

and the problem is to minimize the last coordinate of $y(1)$ in the class of all admissible solution of (3.4) subject to (3.5).

Consider the set, denoted by A , of all points in $\mathbb{R}^{n+1}$ we attain by admissible solutions at time $t = 1$ beginning at y_0 for $t = 0$. This is the so called attainable set for system (3.4) and it is given by

$$A = \left\{ Y(1)(y_0 + \int_0^1 Y^{-1}(s)F(s, u(s))ds) \mid u - \text{admissible} \right\}$$

where $Y(t)$ is the fundamental matrix solution of the homogenous system corresponding to (3.4).

Suppose $\bar{y}$ is an optimal solution then as is easy to see $\bar{y}(1)$ belongs to the boundary of A . On the other hand optimal solution exists if the intersection of $\{x_1\} \times \mathbb{R}$ with A is not empty and if the latter set is closed or it is enough to know that it is C -lower closed for C being the positive half axis of the last coordinate of y .

Now the set A is up to the linear transformation and translation equal to the integral of set valued map P given by

$$P(t) = \left\{ Y^{-1}(t)F(t, u) \mid u \in U(t) \right\}. \quad (3.6)$$

The inclusion in one way is obvious, in the other some very mild regularity conditions on D , F and U are needed to enforce P to be a measurable set valued mapping so that for each $v \in K_P$ there exist an admissible u such that $v(t) = Y^{-1}(t)F(t, u(t))$ a.e. in J . Finally notice that A is C -lower closed with C described above if and only if $I(P)$ has this property. This is due to a special structure of $Y(t)$, namely the last column has all zeros but the last which is equal 1.

This discussion indicates clearly the connection between the results of this paper and optimal control problems of the form described here and others but linear. Consequently, each of theorems given in the previous section can be applied to the above problem similarly as theorems of the bounded case are (cf. [9], [10] and [11]).

In this section we restrict ourselves to one theorem, an application of Theorem 8, and two examples of classical two point variational problem illustrating Theorem 5.

Theorem 11. Assume that $A(t)$ in (3.1) and $b(t)$ in (3.2) are integrable, f and f_0 are measurable in t and continuous in u , that mapping U is measurable in t , that the set $P(t)$ defined by (3.6) is closed for each t , that for each $\varepsilon > 0$ there is an integrable $\varphi_\varepsilon: J \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$|f(t, u)| - \varepsilon f_0(t, u) \leq \varphi_\varepsilon(t) \quad \text{if } u \in U(t). \quad (3.7)$$

Under those assumption an optimal solution exists.

Notice that as in [10] there is no convexity assumption in Theorem 11 as well as no boundness assumption neither on U nor on P , but the result applies only to linear problem. Condition (3.7) is the so called growth condition. For analogous existence theorems concerning nonlinear case, but with convexity assumptions see [3] and [14].

Consider now the two point problem in calculus of variations of minimizing the integral

$$\int_0^1 L(t, \dot{x}(t)) dt \quad (3.8)$$

in the class of absolutely continuous functions on J with fixed end points, say $x(0) = 0$ and $x(1) = 1$. Notice that the integrand in (3.8) does not depend on $x(t)$. This is the case when existence of a minimum follows directly from closedness of the integral of the set valued map defined by

$$P(t) = \{(x, y) \mid x = u, y = L(t, u), u \in \mathbb{R}\}.$$

Consider now two examples of the integrand L :

$$1) L(t, u) = |u|(1 + |u|\exp(-|u|)), 2) L(u) = (1 + u^2 + |\sin u|u^2)^{1/2}$$

In both cases L is not convex in u . The set A in Theorem 5 is the set of all $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ such that the $\max(a_1 u + a_2 L(u))$ for $u \in \mathbb{R}$ exists and is finite. In the case 1) A is determined by the inequality $|a_1| \leq a_2 < 0$, hence A is not open and in 2) by inequality $|a_1| < a_2 < 0$ and A is open. Thus the integral

$I(P)$ is closed for the case 2), consequently the optimal solution exists, while in the case 1) the integral $I(P)$ may be not closed. In fact, it is easy to check that infimum of (3.8) in this case is equal one while for any x satisfying the boundary condition the value of (3.8) is greater than one. Therefore the optimal solution does not exist in the case 1).

References.

- [1] R.J. Aumann, Integrals of set-valued functions, J.Math. Anal. and Appl., 12(1965), 1-12.
- [2] D. Blackwell, The range of certain vector integrals, Proc. Am. Math. Soc., 2(1951), 390-395.
- [3] L. Cesari, Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints.I, Trans. Amer. Math. Soc. 124(1966), 369-472.
- [4] H. Halkin, A generalization of LaSalle's "bang-bang" principle, SIAM J. Control, 2(1965), 199-202.
- [5] H. Hermes, A note on the range of a vector measure; applications to the theory of optimal control, J.Math.Anal. Appl., 8(1964), 78-83.
- [6] G. Debreu, Integration of correspondences, Proc. Fifth Berk. Symp.Math. Statis. and Prob., Univ. of Calif. Press, 1966, 351-360.
- [7] M. Jacobs, Attainable sets in systems with unbounded controls, J. Diff. Eqs., in press.
- [8] A.A. Liapunov, Sur les fonctions-vecteurs completment additives., Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 8(1940), 465-478.
- [9] J.P. LaSalle, The time optimal control problem, Contribution to Nonlinear Oscillations, vol.V, Princeton, 1960, 1-24.
- [10] L. Neustadt, The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions, J.Math. Ana. Appl., 7(1963), 110-117.
- [11] C. Olech, Extremal solutions of a control system., J. Diff. Eqs., 2(1966), 74-101.
- [12] ———, Lexicographical order, range of integrals and "bang-bang" principle, Mathematical Theory of Control. Ed. by A.V. Balakrishnam and L.W. Neustadt, Acad. Press, New York, 1967, 35-44.
- [13] ———, On the range of unbounded vector valued measure, Math. System Theory, 2(1968), 251-256.

- [14] ———, Existence theorems for optimal problems with vector valued cost function, Trans. Amer. Math. Soc., in press.
- [15] F.A. Valentine, Convex sets, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
- [16] P. Brunovský, On the necessity of a certain convexity condition for lower closure of control problems, SIAM J. Control, 6(1968), 174-185.

OPTIMAL CONTROL SYNTHESIS USING FUNCTION DECOMPOSITION TECHNIQUES

J. C. Allwright,
Control Systems Group,
Centre for Computing and Automation,
Imperial College,
London,
England.

1. Introduction

The control optimisation problem considered is:

$\min V(x_s, u)$ for the linear dynamical system
 $u[t_s, t_f]$

$$(d/dt)x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) : x(t_s) = x_s ,$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) , \quad (1)$$

$$\text{where } V(x_s, u) = \int_T F[y(t), u(t), t] dt + G[y(t_f)] , \quad (2)$$

F and G are twice differentiable with respect to y and u almost everywhere on T , with bounded derivatives, and have zero higher-order derivatives,

and $T = [t_s, t_f]$.

The first order gradient function $(\partial V / \partial u)$, or sensitivity of the performance index on the control function, can be evaluated for a control function u using the following reverse-time equations:

$$-(d/dt)V_x(t) = C(t)'F_y(t) + A(t)'V_x(t) : V_x(t_f) = C(t_f)'$$

$$(\partial V / \partial u(t)) = F_u(t) + D(t)'F_y(t) + B(t)'V_x(t), \quad t \in T,$$

(3)

all derivatives being calculated for the control u and the associated response y , of (1).

In the past, techniques^{1,2,3} have been developed for calculating the optimal control function in one iteration as a function of the initial conditions x_s . The computational effort required becomes large, however, when x has large dimension. To help overcome this problem, a class of iterative optimisation algorithm, related to but more versatile than the conjugate-gradient algorithm⁴, has been developed⁵. These algorithms use only the simple first-order gradient equations (3) but optimise on a sequence of linear manifolds of the control space of increasing dimensionality. The optimal control belonging to each linear manifold can be synthesized from the basis-functions spanning that manifold, as a linear function of the initial conditions (hence the title of this paper). The paper is concerned with the determination of the number of basis-functions which are required to enable an adequate approximation to be obtained to the optimal control belonging to the (infinite dimensional) control space U , to which control functions for the above problem belong.

2. Optimisation on a Finite-Dimensional Linear Manifold of the Control Space

Suppose that the linear dynamical system (1) has also the description:

$$y(t) = \theta(t, t_s)x_s + \int_{t_s}^t W(t, \tau)u(\tau)d\tau, \quad t \in T, \quad (4)$$

with θ and W suitably bounded.

On substituting (4) into (2) it can be seen that:

$$\begin{aligned} V(\bar{x}_s + \delta x_s, \bar{u} + \delta u) &= V(\bar{x}_s, \bar{u}) + \langle V_{x_s}, \delta x_s \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle \delta x_s, V_{xx} \delta x_s \rangle + \int_T \langle V_{u(\tau)}, \delta u(\tau) \rangle d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \int_T \int_T \langle \delta u(\tau_1), V_{u(\tau_1)u(\tau_2)} \delta u(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 + \int_T \langle \delta u(\tau), V_{u(\tau)x} \delta x_s \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

The optimal control function u^* can be obtained as $u^* = \bar{u} + \delta u^*$, where δu^* is the function δu which minimises (5). Although (5) is a quadratic functional of δu , the

determination of δu^* from it is not feasible computationally because of the infinite dimensionality involved. Computational feasibility can, however, be achieved by restraining δu to belong to a finite-dimensional linear manifold of the control space.

Denote by $U(1,j)$ the linear manifold of the control space U which is spanned by the (possibly vector-valued) basis-functions $f_i(t)$, $i=1,2,\dots,j$. The basis-functions are assumed to be orthonormal in that:

$$\begin{aligned} \int_T \langle f_i(t), f_j(t) \rangle dt &= 0, \quad i \neq j, \\ &= 1, \quad i = j. \end{aligned}$$

Denote by $U(1,j)''$ the translate of $U(1,j)$ along the initial control function $\bar{u}$, so that:

$$U(1,j)'' = [u(t) : u(t) = \bar{u}(t) + s(t) ; s \in U(1,j) ; t \in T].$$

A control change belonging to $U(1,j)$ is then:

$$\delta u(t) = F(j,t) \delta u^j, \quad t \in T,$$

where $F(j,t) = [f_1(t) \dots f_j(t)]$,

$$\delta u^j = [\delta u_1 \dots \delta u_j]',$$

and is the vector of scalar components δu_i of the basis-functions f_i constituting the control change δu .

Suppose that x_s belongs to R^n and that the initial conditions of interest belong to a p -dimensional linear manifold of R^n , $p \leq n$, which is spanned by the linearly independent vectors $X_i \in R^n$, $i=1,2,\dots,p$. Denote the manifold by $X(p)$. Any initial condition change of interest can then be written as:

$$\delta x_s = X^p \delta x^p,$$

where $X^p = [X_1 \dots X_p]$,

and $\delta x^p \in R^p$ is the vector of scalar changes δx_i in the components of the basis-vectors X_i constituting δx_s .

For control changes belonging to $U(1,j)$ and initial conditions belonging to $X(p)$, (5) becomes:

$$V(\bar{x}_s + \delta x_s, \delta u^j) = V(\bar{x}_s, \bar{u}) + \langle V_x, \delta x_s \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta x_s, V_{xx} \delta x_s \rangle + \langle g^j, \delta u^j \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta u^j, T(j,j) \delta u^j \rangle + \langle \delta u^j, P(j,p) \delta x^p \rangle, \quad (6)$$

where $g^j = \int_T F(j, \tau)' V_u(\tau) d\tau$,

and is the vector of the components of $f_1, \dots, f_j$ present in the gradient V_u ,

$$T(j,j) = \int_T \int_T F(j, \tau_1)' V_u(\tau_1) u(\tau_2) F(j, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2,$$

and is a $j \times j$ matrix mapping changes in the components of basis-functions $f_1, \dots, f_j$ present in the control to changes in the components of the basis-functions present in the gradient,

$$P(j,p) = \int_T F(j, \tau)' V_u(\tau) x d\tau,$$

and is the $j \times p$ matrix mapping initial condition changes belonging to $X(p)$ to changes in the components of $f_1, \dots, f_j$ present in the gradient.

If $T(j,j)$ is invertible (see 3.), the optimal control belonging to $U(1,j)$ can be determined, and is:

$$u_j^*(t) = \bar{u}(t) - F(j,t) T(j,j)^{-1} [g^j + P(j,p) \delta x^p]. \quad (7)$$

The optimal performance index on $U(1,j)$ is then:

$$V^*(\bar{x}_s + \delta x_s, j) = V(\bar{x}_s, \bar{u}) + \langle V_x, \delta x_s \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta x_s, V_{xx} \delta x_s \rangle - \frac{1}{2} \langle [g^j + P(j,p) \delta x^p], T(j,j)^{-1} [g^j + P(j,p) \delta x^p] \rangle. \quad (8)$$

The construction of the basis-functions f_i and the determination of $T(j,j)$ and $P(j,p)$ without the explicit evaluation of the expansion terms of (5) are discussed in⁵. For the purposes of this paper, however, it is sufficient to assume that optimisation on $U(1,j)$ is achieved as sketched above.

For finite j , the optimal control belonging to $U(1,j)$ ", u_j^* , is unlikely to be the optimal control belonging to the control space, U ". To provide a measure of the closeness of u_j^* to u^* , we define an ϵ -approximation to the optimal control function.

Definition For some x_s , the optimal control belonging to $U(1,j)$ " will be referred to as an ϵ -approximation to the optimal control function (belonging to U) if:

$$|V^*(x_s, j) - V^*(x_s)| \leq \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

where $V^*(x_s, j)$ is the optimal performance index on $U(1,j)$ " and $V^*(x_s)$ is the optimal performance index on U , for the particular x_s considered.

This definition seems to be of little practical utility since the computation of $V^*(x_s)$ requires the optimal control belonging to the control space U , and if this is available there will be little interest in the optimal control belonging to $U(1,j)$ ". The definition is rendered useful computationally in 4., using a result of 3.

3. The Minimum Eigenvalue of $T(j,j)$

For the optimisation problem of 1., assume that:

$$\begin{aligned} F[(y + \delta y)(t), (u + \delta u)(t), t] &= F[y(t), u(t), t] \\ &+ \langle F_y(t), \delta y(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta y(t), F_{yy}(t) \delta y(t) \rangle + \langle F_u(t), \delta u(t) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle \delta u(t), F_{uu}(t) \delta u(t) \rangle, \quad \text{for all } t \in T, \end{aligned} \quad (9)$$

where F_{uu} is positive-definite and F_{yy} is non-negative definite on T . Assume also that G_{yy} is non-negative definite.

Using (9) and the convolution description (4), we see that $V_{u(\tau_1)u(\tau_2)}$ of (5) is:

$$\begin{aligned}
V_u(\tau_1)u(\tau_2) &= F_{uu}(\tau_1)\delta(\tau_1, \tau_2) + \int_{\tau_a}^{\tau_f} W(t, \tau_1)' F_{yy}(t) W(t, \tau_2) dt \\
&+ D(\tau_1)' F_{yy}(\tau_1) D(\tau_1) \delta(\tau_1, \tau_2) + W(t_f, \tau_1)' G_{yy} W(t_f, \tau_2) \\
&+ D(\tau_a)' F_{yy}(\tau_a) W(\tau_a, \tau_B)
\end{aligned}$$

where τ_a is the larger of τ_1 and τ_2 ,

τ_B is the smaller of τ_1 and τ_2 ,

$\delta(\tau_1, \tau_2)$ is a unit matrix when $\tau_1 = \tau_2$, and a zero matrix otherwise.

Then, for a control change belonging to $U(1, j)$ of $F(j, t)\delta u^j$, we see that:

$$\begin{aligned}
&\frac{\int_T \int_T \langle \delta u(\tau_1), V_u(\tau_1)u(\tau_2) \delta u(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2}{\int_T \langle \delta u(\tau), \delta u(\tau) \rangle d\tau} = \frac{\langle \delta u^j, T(j, j) \delta u^j \rangle}{\langle \delta u^j, \delta u^j \rangle} \\
&\geq \int_T \frac{\langle \delta u(t), [F_{uu}(t)] \delta u(t) \rangle dt}{\int_T \langle \delta u(t), \delta u(t) \rangle dt} \\
&\geq \min_{t \in T} \lambda_{\min} [F_{uu}(t)] \\
&\triangleq \lambda^* > 0, \tag{10}
\end{aligned}$$

where $\lambda_{\min} [F_{uu}(t)]$ denotes the minimum eigenvalue of $F_{uu}(t)$.

Hence, when (9) holds and F_{uu} is positive-definite on T , F_{yy} is non-negative definite on T , G_{yy} is non-negative definite:

- 1) $T(j, j)$ is positive-definite and therefore invertible
- 2) the minimum eigenvalue of $T(j, j)$ is greater than or equal to λ^* of (10), which is independent of j .

4. Lower Bounds for the Minimum Performance Index

Suppose that the optimal control belonging to $U(1, j)$ for some initial condition x_s is applied to the dynamical system of 1., and that the associated gradient function, $(\partial V(x_s, j)^* / \partial u)$, is calculated. Suppose also that $(\partial V(x_s, j)^* / \partial u)$ is exactly characterised by the components $g^k(x_s, j)^* = [0(1, j)]$

$g_{j+1}(x_s, j)^* \dots g_k(x_s, j)^*] \in R^k$ of basis-functions $f_1, \dots, f_k$ for some $k \geq j+1$, where $O(1, j)$ is a zero row-matrix of dimension j . The last of the further basis-functions $f_{j+1}, \dots, f_k$, perhaps f_{j+1} if $k = j+1$, may be defined using Gram-Schmidt orthonormalisation to ensure that $(\partial V(x_s, j)^* / \partial u)$ can be exactly characterised by components of the defined basis-functions.

Then, from (8), the optimal performance index on $U(1, k)''$ is:

$$V^*(x_s, k) = V^*(x_s, j) - \frac{1}{2} \langle g^k(x_s, j)^*, T(k, k)^{-1} g^k(x_s, j)^* \rangle.$$

On using result 2) of 3.:

$$V^*(x_s, k) \geq V^*(x_s, j) - \frac{1}{2} \langle g^k(x_s, j)^*, g^k(x_s, j)^* \rangle / \lambda^* \\ \triangleq V_j^*(x_s, k). \quad (11)$$

$V_j^*(x_s, k)$ of (11) is a lower-bound for the optimal performance index on $U(1, k)''$ - calculated for the optimal control belonging to $U(1, j)''$, $k > j$.

A stronger statement can in fact be made. Suppose that optimisation on $U(1, k'')''$ were considered, for $k'' > k$. The gradient following optimisation on $U(1, j)''$ would then consist exactly of the components $g^{k''}(x_s, j)^* = [g^k(x_s, j)^* \ O(1, k'' - k)]^*$ of basis-functions $f_1, \dots, f_{k''}$, since we have said that $g^k(x_s, j)^*$ exactly represents $(\partial V(x_s, j)^* / \partial u)$. We then see from (11) that: $V_j^*(x_s, k'') = V_j^*(x_s, k)$, so that the lower-bound to the optimal performance index on $U(1, k'')''$, calculated for the optimal control belonging to $U(1, j)''$, is equal to that on $U(1, k)''$, $k'' > k$. Since k'' can be made sufficiently large for $f_1, \dots, f_{k''}$ to span the (infinite dimensional) control space with no change in this result, $V_j^*(x_s, k)$ of (11) is also a lower-bound to the optimal performance index $V^*(x_s)$ on the control space. Hence $V^*(x_s) \geq V_j^*(x_s, k)$ and:

Remark The optimal control belonging to $U(1, j)''$ is an ϵ -approximation to the optimal control function (belonging to U) if:

$$|v^*(x_s, j) - v_j^*(x_s, k)| \leq \epsilon.$$

From the definition of 2. and (11), we see that the minimal ϵ for which the optimal control belonging to $U(1, j)$, u_j^* , is an ϵ -approximation to the optimal control belonging to U , u^* , has the upper-bound:

$$\epsilon(x_s, j)^* = \frac{1}{2} \langle g^k(x_s, j)^*, g^k(x_s, j)^* \rangle / \lambda^*. \quad (12)$$

As j and k increase, allowing optimisation on linear manifolds of the control space of increasing dimension, we expect $\epsilon(x_s, j)^*$ to decrease, so that the lower-bound $v_j^*(x_s, k)$ approaches the minimal performance index, $v^*(x_s)$, from below.

We have said that the gradient following optimisation on $U(1, j)$, $[\partial V(x_s, j)^* / \partial u]$, consists exactly of components $g^k(x_s, j)^*$ of basis-functions $f_1, \dots, f_k$, i.e. that:

$$[\partial V(x_s, j)^* / \partial u(t)] = F(k, t) g^k(x_s, j)^*, \quad t \in T.$$

Because the basis-functions are orthonormal, we see from (12) that:

$$\epsilon(x_s, j)^* = \frac{1}{2} \int_T \langle [\partial V(x_s, j)^* / \partial u(t)], [\partial V(x_s, j)^* / \partial u(t)] \rangle dt / \lambda^*. \quad (13)$$

(12) or (13) enable an upper-bound to be efficiently computed for the minimal ϵ for which the optimal control belonging to $U(1, j)^*$, u_j^* , is an ϵ -approximation to the optimal control u^* without knowing u^* , and thus for determining whether u_j^* is an adequate approximation to u^* . If it is not an adequate approximation, j can be increased until it is. Careful algorithm organisation can lead to many of the quantities calculated for optimising on $U(1, j)$ being used when optimising on $U(1, j+1)$, etc., with computational advantage.

5. An $\epsilon_{\bar{X}(p)}$ - Approximation to the Optimal Control Law

There is little practical restriction involved in restraining the initial conditions of interest, which belong to $X(p)$ of 2., to also belong to a closed neighbourhood of a nominal

initial condition $\bar{x}_s$. The neighbourhood is denoted by $\bar{X}(p)$ and is defined by:

$$\bar{X}(p) = [x_s : x_s = \bar{x}_s + \sum_{m=1}^p X_m \delta x_m ; |\delta x_m| \leq |\delta \hat{x}_m|, m = 1, \dots, p],$$

where $|\delta \hat{x}_m|$ is pre-chosen for each m .

Definition Optimal control law (7) synthesizes the optimal control belonging to $U(1, j)$ as a function of x_s . It will be referred to as an $\varepsilon_{\bar{X}(p)}$ -approximation to the optimal control law which selects the optimal control belonging to the control space U , as a function of x_s , if the optimal control belonging to $U(1, j)$ for each $x_s \in \bar{X}(p)$ is an ε -approximation to the associated optimal control belonging to U .

It is desirable to determine control law (7) for the smallest j for which (7) is an $\varepsilon_{\bar{X}(p)}$ -approximation for a pre-chosen ε , to reduce the computational effort involved. A simple iterative algorithm for establishing a suitable small j is next proposed, although the resulting j , j_p , is not necessarily minimal.

1) For initial condition $\bar{x}_s$, determine the j_0 such that the optimal control function belonging to $U(1, j_0)$, $\bar{u}_0$, is an ε_0 -approximation to the optimal control function, as discussed in 4. Denote the gradient function for the control function $\bar{u}_0$ by $[\partial V(\bar{x}_s, j_0)^* / \partial u]$. Go to 2).

2) Set $r=1$. Go to 3).

3) Equate the control function to $\bar{u}_0$.

Perturb the initial condition to $\bar{x}_s + X_r |\delta \hat{x}_r|$, on the boundary of $\bar{X}(p)$. Calculate the resulting gradient function, $[\partial V(r) / \partial u]$. The gradient change caused by the initial condition change $X_r |\delta \hat{x}_r|$ is then:

$$[\partial V(|\delta \hat{x}_r|) / \partial u(t)] = [\partial V(r) / \partial u(t)] - [\partial V(\bar{x}_s, j_0)^* / \partial u(t)], t \in T.$$

For some j_r (as yet not chosen), the components of basis-functions $f_1, \dots, f_{j_r}$ present in the gradient change $[\partial V(|\delta \hat{x}_r|) / \partial u]$ can be reduced to zero by applying the control:

$$u(t) = \bar{u}_0(t) - F(j_r, t) T(j_r, j_r)^{-1} \int_T F(j_r, \tau) [\partial V(\hat{x}_r) / \partial u(\tau)] d\tau.$$

Denote the resulting gradient function by $[\partial V / \partial u]$. Then, the gradient change due to the initial condition change after optimisation on $U(1, j_r)$ is:

$$[\partial V(\hat{x}_r, j_r) / \partial u(t)] = [\partial V / \partial u(t)] - [\partial V(\bar{x}_s, j_0)^* / \partial u(t)], \quad t \in T. \quad (14)$$

If $j_r = j_{r-1}$ is such that:

$$\frac{1}{2} \int_T [\partial V(\hat{x}_r, j_r) / \partial u(t)], [\partial V(\hat{x}_r, j_r) / \partial u(t)] dt / \lambda^* \leq \epsilon_r, \quad (15)$$

set $j_r = j_{r-1}$. Otherwise choose the smallest $j_r > j_{r-1}$ such that (15) is satisfied by increasing j_r until it is satisfied. Go to 4).

4) If the initial condition changes which have been made do not span $X(p)$, i.e. if $r \neq p$, set $r = r+1$ and go to 3). If $r = p$, stop.

Remark Optimal control law (7) with $j = j_p$ is an $\epsilon_{\bar{X}(p)}$ -approximation to the optimal control law determining optimal controls belonging to U if:

$$\epsilon_r \text{ of the above algorithm is } \epsilon / (p+1)^2, \quad r = 0, 1, \dots, p.$$

Use of the Remark with the above algorithm enables the j to be determined for which (7) is an $\epsilon_{\bar{X}(p)}$ -approximation in a simple and efficient way for any pre-chosen positive ϵ .

Proof Consider the control function:

$$u_{0-p}(t) = \bar{u}(t) - F(j_0, t) T(j_0, j_0)^{-1} g^{j_0} - \sum_{r=1}^p F(j_r, t) T(j_r, j_r)^{-1} \times P(j_r, p) \delta x_r, \quad (16)$$

where $P(j_r, p)_r$, column r of the matrix $P(j_r, p)$ of $2 \times$, maps initial condition changes δx_r to changes in the components of basis-functions $f_1, \dots, f_{j_r}$ present in the gradient, and $g^{j_0} \in R^{j_0}$ is the vector of components of the basis-functions $f_1, \dots, f_{j_0}$ present in the gradient for the control function $\bar{u}$.

Clearly if u_{o-p} is an ε -approximation to the optimal control for each initial condition belonging to $\bar{X}(p)$, control law (7) with $j = j_p$ is also an $\varepsilon_{\bar{X}(p)}$ -approximation, since u_{o-p} is not the optimal control belonging to $U(1, j_p)$ if any $j_r \neq j_p$, $r = 0, 1, \dots, p-1$.

Suppose the gradient following the application of u_{o-p} consists exactly of components $g^k(\delta x^p) \in R^k$ of basis-functions $f_1, \dots, f_k$ for some $k > j_p$ and for some choice of $f_{j_p+1}, \dots, f_k$. Because the gradient varies linearly with the initial conditions, $g^k(\delta x^p)$ has the form:

$$g^k(\delta x^p) = G_0 + \sum_{m=1}^p G_m \delta x_m, \quad (17)$$

where $G_m \in R^k$, $m = 0, 1, \dots, p$.

From (12), the minimal ε for which u_{o-p} yields an ε -approximation for some $x_s \in X(p)$ has the upper-bound:

$$\varepsilon(x_s, u_{o-p})^* = \frac{1}{2} \langle [\sum_{m=0}^p G_m \delta x_m], [\sum_{i=0}^p G_i \delta x_i] \rangle / \lambda^*, \quad (18)$$

where $\delta x_0 = 1$. For all initial conditions x_s belonging to $\bar{X}(p)$:

$$\varepsilon(x_s, u_{o-p})^* \leq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^p \sum_{i=0}^p \|G_m\| \|G_i\| |\delta x_m^\wedge| |\delta x_i^\wedge| / \lambda^*, \quad (19)$$

where $|\delta x_0^\wedge| = 1$.

Thus control law (7) with $j = j_p$ is an $\varepsilon_{\bar{X}(p)}$ -approximation if:

$$\|G_r\| |\delta x_r^\wedge| \leq [\sqrt{(2\varepsilon\lambda^*)}] / (p+1), \quad r = 0, 1, \dots, p, \quad (20)$$

since then $\varepsilon(x_s, u_{o-p})^* \leq \varepsilon$ for all $x_s \in \bar{X}(p)$, which ensures that (16) is an $\varepsilon_{\bar{X}(p)}$ -approximation.

Consider optimisation on $U(1, j_0)$ for initial condition $\bar{x}_s$. From (18):

$$\varepsilon(\bar{x}_s, u_{o-p})^* = \frac{1}{2} \|G_0\|^2 |\delta x_0^\wedge|^2 / \lambda^*.$$

Hence, for condition (20) to hold for $r = 0$, we require that $\varepsilon(\bar{x}_s, u_{o-p})^* \leq \varepsilon / (p+1)^2$. Since the control u_{o-p} for $\bar{x}_s$ is the optimal control belonging to $U(1, j_0)$ for $\bar{x}_s$ (from (16)), we require that j_0 be chosen so that the optimal control belonging to $U(1, j_0)$ for $\bar{x}_s$ be an $\varepsilon / (p+1)^2$ -approximation to the optimal

control. This justifies the above Remark for $r = 0$.

For $r = 1, \dots, p$, the gradient function change, following optimisation on $U(1, j_r)$, which is caused by the initial condition change $X_r | \delta \hat{x}_r |$ is denoted by $[\partial V(|\delta \hat{x}_r|, j_r)/\partial u]$, of (14). From (16) and (17), $[\partial V(|\delta \hat{x}_r|, j_r)/\partial u]$ consists exactly of the components $G_r | \delta \hat{x}_r | \in R^k$ of the basis-functions $f_1, \dots, f_k$, i.e. $[\partial V(|\delta \hat{x}_r|, j_r)/\partial u(t)] = F(k, t) G_r | \delta \hat{x}_r |$, $t \in T$. (21)
Satisfaction of condition (20) requires that:

$$\|G_r\|^2 |\delta \hat{x}_r|^2 \leq 2 \varepsilon \lambda^* / (p+1)^2.$$

On using the orthonormality of the basis-functions and (21), this requires that:

$$\frac{1}{2} \int_T [\partial V(|\delta \hat{x}_r|, j_r)/\partial u(t)], [\partial V(|\delta \hat{x}_r|, j_r)/\partial u(t)] > dt / \lambda^* \leq \varepsilon / (p+1)^2.$$

This justifies the above Remark for $r = 1, \dots, p$, and concludes the proof.

6. Concluding Comments

In this paper it has been shown how lower-bounds to the minimal performance index on the control space can be obtained (when only suboptimal controls are available) and used to determine the number of basis-functions needed to obtain adequate approximations, performance-wise, to the optimal control function or optimal control law.

Lower bounds to the optimal performance index have also been considered by J. D. Pearson⁶; the developments and results of this paper are, however, different. Better (more positive) lower bounds have been determined for both the problem considered here and a similar problem subject to terminal equality-constraints⁵.

7. Acknowledgments

The author gratefully acknowledges the financial support of the Science Research Council and the interest of Professor J. H. Westcott and Dr. D. Q. Mayne, both of Imperial College.

8. References

1. KALMAN, R.E.: Contributions to the Theory of Optimal Control; Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 102-119, 1960.
2. MAYNE, D.Q.: A Second-Order Gradient Method for Determining Optimal Trajectories of Non-Linear Discrete-Time Systems; International Journal of Control, Vol 3, No. 1, 85-95, 1966.
3. JACOBSON, D.H.: Differential Dynamic Programming Methods for Determining Optimal Control of Non-Linear Systems; Ph.D. Thesis, London University, 1967.
4. LASDON, L.S., MITTER, S.K., WARREN, A.D.: The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems; I.E.E.E. Trans. Autom. Control, Vol. AC-12, No. 2, April 1967.
5. ALLWRIGHT, J.C.: Optimal Control Synthesis by Hill-Climbing in Function-Space; Ph.D. Thesis, London University, 1968.
6. PEARSON, J.D.: Reciprocity and Duality in Control Programming Problems; Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 10, 338-408, 1965.

ON THE DETERMINATION OF EMISSION ZONES AND OPTIMUM TRAJECTORIES OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

by

S. Raczyński

Academy of Mining and Metallurgy

Department of Automatics and Industrial Electronics

Kraków

POLAND

The problem of optimum control of nonlinear systems is usually given in terms of a variational problem and hence the methods of its solution are variational methods. It is shown in this paper that there is a possibility of a different /not variational/ approach to this problem. The method leading to equations of optimum trajectory presented here has been suggested by T. Wazewski [2]. The present paper presents an attempt of finding in this way actual equations of optimum trajectory and optimum control for nonlinear control systems.

The method, which is described in detail in further sections, consists in the following consideration: consider a control system and some restrictions imposed upon the control vector which define the so called control domain. On the basis of the equations of this system one can find the orientor field N associated with this system. One can determine the convex hull /envelope/ E of the orientor N at each point of the (x, t) - space /where x is the vector of the state of the system and t the time/. The field $E(x, t)$ can be interpreted as a family of convex cones in the (x, t) space. This family will be treated as a family of Monge cones of some first order nonlinear partial differential equation. The boundary of the emission zone of the point P_0 which represents the initial conditions must satisfy /according to [2]/ this partial differential equation and the optimum time characteristics of the system extending from the point P_0 , are at the same

time the characteristics of this equation. The problem thus consists in finding the above-mentioned differential equation determining its integral surface and its characteristics. The application of the method of characteristic strips permits a reduction of the problem to a system of equations of the type of Hamilton equations /rigorous definitions of the sets N , E and Q as well as of the orientor field are given in Ref. [2]/.

When going over to actual equations and restricting conditions occurring in real control systems this method becomes more complicated owing to discontinuities appearing in the structure of the sets A and E . It turns out that the family of cones, obtained by forming the sets N and E , usually consists of cones whose lateral surfaces degenerate to a finite number of rays. The differential equation corresponding to such a family of Monge cones does not satisfy the assumption of continuity with respect to the partial derivatives appearing in this equation. This rules out a direct application of the method of characteristic strips. To apply this method it is indispensable to introduce the concept of distribution and distributional derivatives /cf. e.g. [5]/.

In the following considerations we shall look for optimum control signal for a system described by the following set differential equations.

$$\dot{x}_i = f_i (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_s, t) \quad 1$$

$i = 1, \dots, n$

which in vector notation is written as

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} (\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad 1a$$

where $\mathbf{x}$ is a vector function $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ and analogously $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_s(t))$. The function $\mathbf{f}$ is a vector function with the components $f_1, \dots, f_n$ and depends on $n + s + 1$ variables: $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_s, t$. The functions $x_1(t), \dots, x_n(t)$ will be called coordinates of the system while $u_1(t), \dots, u_s(t)$ control functions or simply control.

The investigated system satisfies the following assumptions.

Assumption I

The functions

$$f_i (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_s, t) \\ i = 1, \dots, n$$

are defined in a bounded region Ω in $n + s + 1$ dimensional space. They are continuous and bounded. The functions $u_1(t), \dots, u_s(t)$ are measurable and bounded for all $t \geq 0$. The control vector fulfils the relationship $u(t) \in C(x, t)$ where $C(x, t)$ is a set which will be called in further consideration the control domain. It is assumed that this set is contained in a s -dimensional sphere with a constant radius, is defined for all t, x , and changes continuously depending on t, x .

Let us also assume that optimum control for the system 1 is tender control /which is a generalization of the "bang-bang" control/. As it is known from Ref. [4] this assumption is equivalent to the following assumption:

Assumption II

For arbitrary x' and x'' the following inequality holds:

$$|f(x', u, t) - f(x'', u, t)| \leq \omega(|x' - x''|, t)$$

where $\omega(v, t)$ is a function of the coordinates v, t such that $\omega(v, t) \geq 0$ and the equation $\dot{v} = \omega(v, t)$ has a single solution $v \equiv 0$ passing through the point $(0, 0)$.

We shall now determine the optimum trajectory and optimum control for a controlled system satisfying the assumptions I and II. The calculations are performed first for a two-dimensional system /for the sake of clarity/ and then generalized for multi-dimensional systems. Consider the following for of the equations of the system

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2, t)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2, t)$$

2

The control domain is given in the form of a set to which there belongs a vector $u(u_1, u_2)$

$$u \in C(x_1, x_2, t)$$

Let us now determine the orientor field associated with the system 2. For this purpose let us perform the transformation

$$v_1 = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2, t)$$

$$v_2 = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2, t)$$

3

If now u_1 and u_2 take all positions in the set $C(x_1, x_2, t)$ then v_1 and v_2 will take the values forming some set $N(x_1, x_2, t)$. This set defines the orientor field associated with the system 2. We shall now determine the convex hull of the set $N(x_1, x_2, t)$, $K = \text{env } N$ and the tensor $Q(x_1, x_2, t)$ of this set.

Let us now consider the general case when the set $Q(x_1, x_2, t)$ consists of points of some curve /depending on t / as shown in Fig.1a. Suppose that this curve can be described by the parametric equations

$$h_1 = h_1(x_1, x_2, t, w)$$

$$h_2 = h_2(x_1, x_2, t, w)$$

4

where h_1 and h_2 are coordinates of points belonging to the set $Q(x_1, x_2, t)$ and w is the parameter. After going over to tensor control the orientor condition has the form

$$\dot{x} \in Q(x_1, x_2, t)$$

Thus the set $Q(x_1, x_2, t)$ defines some set of directions in (x_1, x_2, t) - space which can be written in the form of a set of direction numbers

$$(h_1(x_1, x_2, t, w), h_2(x_1, x_2, t, w), 1) \quad 5$$

where $w \in [a, b]$.

One should find now such nonlinear partial differential equation of first order that the set of characteristic directions for this equation would coincide with the set 5. We shall look for this equation in the form:

$$F(x_1, x_2, t, p_1, p_2) = 0 \quad 6$$

where

$$p_1 \equiv \frac{\partial t}{\partial x_1} \quad p_2 \equiv \frac{\partial t}{\partial x_2}$$

The set of the characteristic directions of Eq. 6 has the form

$$(F_{p_1}, F_{p_2}, p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2}) \quad 7$$

where p_1 and p_2 may take arbitrary values satisfying the relationship 6 at each point (x_1, x_2, t) . The comparison of the coefficients 5 and 7 suggests that Eq. 6 has the form

$$F = p_1 h_1(x_1, x_2, t, w) + p_2 h_2(x_1, x_2, t, w) - 1 = 0 \quad 8$$

where w is some function of the variables x_1, x_2, t, p_1, p_2 . To determine this function we write explicitly the direction numbers of Eq. 8:

$$\left(h_1 + p_1 \frac{\partial h_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial h_2}{\partial p_1}, h_2 + p_1 \frac{\partial h_1}{\partial p_2} + p_2 \frac{\partial h_2}{\partial p_2}, \right. \\ \left. 1 - p_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial p_1} - p_1 p_2 \frac{\partial h_2}{\partial p_1} - p_2 p_1 \frac{\partial h_1}{\partial p_2} - p_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial p_2} \right) \quad 9$$

It is seen that the sufficient condition that the set of direction numbers 5 be identical with the set 9 is that the following relations must hold simultaneously

$$p_1 \frac{\partial h_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial h_2}{\partial p_1} = 0$$

$$p_1 \frac{\partial h_1}{\partial p_2} + p_2 \frac{\partial h_2}{\partial p_2} = 0$$

that is

$$\left(p_1 \frac{\partial h_1}{\partial w} + p_2 \frac{\partial h_2}{\partial w} \right) \frac{\partial w}{\partial p_1} \equiv 0$$

$$\left(p_1 \frac{\partial h_1}{\partial w} + p_2 \frac{\partial h_2}{\partial w} \right) \frac{\partial w}{\partial p_2} \equiv 0$$

The latter system of equations is fulfilled when

$$p_1 \frac{\partial h_1}{\partial w} + p_2 \frac{\partial h_2}{\partial w} \equiv 0 \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial p_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial p_2} \right)^2 \equiv 0 \quad 10$$

The relationship 10 permits the function $w(x_1, x_2, t, p_1, p_2)$ to be determined since the functions h_1 and h_2 are known. After substituting into Eq. 8 in place of w the function of the variables x_1, x_2, t, p_1, p_2 found by means of Eq. 10, we obtain the equation of the boundary of the emission zone of the control system 2 :

$$F(x_1, x_2, t, p_1, p_2) = F^*(x_1, x_2, t, w(x_1, x_2, t, p_1, p_2)) = 0 \quad 11$$

The emission zone of the point P_0 is the characteristic conoid of the equation 12 extending from the point P_0 .

It should be pointed out that the systems under consideration satisfy both assumptions I and II, and hence their quasi-trajectories are equivalent to the trajectories of aim reachability /in the sense of the definition I from Ref. [4]/. Thus when we limit our considerations to the aim reachability defined in this way we can regard as valid for these systems the theorem /3.7/ from Ref. [1] which holds for permanent orienter fields. According to this theorem the trajectory reaching the aim in optimum time /hitting it at the boundary of the emission zone/ lies completely on the boundary of the emission zone. Hence it follows that the optimum trajectories lie on the boundary of the emission zone and thus the characteristics of Eq. 11 are optimum trajectories /or quasi-trajectories/ of the system 2, and conversely, all optimum trajectories of the system 2 are characteristics of Eq. 11. The non-optimum trajectories obtained for control

signal $u \in C(x, t)$ may be interpreted as Monge's lines of Eq. 11. All such trajectories lie inside the characteristic conoid of this equation.

Let us now consider a special case which, however, is of great practical importance. Let us namely assume that the set $Q(x, t)$ cannot be described by means of equations 4 under the assumption of the existence of partial derivatives $\frac{\partial h_i}{\partial w}$. Let us take into consideration the extreme case when the set consists of a finite number of points /Fig.1b/. This can occur when the control domain will have the shape of a n -dimensional cube. The set $Q(x_1, x_2, t)$ can then be described by means of Eqs. 4, the functions $h_1(x_1, x_2, w, t)$ and $h_2(x_1, x_2, w, t)$ being discontinuous with respect to the parameter w . These functions h_1 and h_2 can be written in the following way:

$$h_i = \begin{cases} c_{i1}(x_1, x_2, t) & w_0 \leq w \leq w_1 \\ c_{i2}(x_1, x_2, t) & w_1 < w \leq w_2 \\ \vdots & \\ c_{ik}(x_1, x_2, t) & w_{k-1} < w \leq w_k \end{cases} \quad 12$$

where k is the number of points belonging to the set $Q(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$. We shall now assign to the functions h_1 and h_2 the corresponding distributions h_1^* , h_2^* with respect to the variable w . Thus there exist the distributional derivatives

$$\frac{\partial h_i^*}{\partial w} = \sum_{j=1}^k (c_{i,j+1} - c_{i,j}) \delta(w - w_j), \quad i = 1, 2 \quad 13$$

where $\delta(w - w_j)$ is the distribution corresponding to Dirac δ -function. The formulae 5 and 10 hold for the distributions h_1^* and h_2^* . After substituting the derivatives 13 formula 10 becomes

$$\sum_{j=1}^k [p_1(c_{1,j+1} - c_{1,j}) + p_2(c_{2,j+1} - c_{2,j})] \delta(w - w_j) = 0 \quad 14$$

It can be easily seen that the last equality is fulfilled when:

$$w = \prod_{j=1}^n [p_1 (c_{1,j+1} - c_{1,j}) + p_2 (c_{2,j+1} - c_{2,j}) - w_j] \quad 15$$

where $c_{1,j}$, $c_{2,j}$ and w are functions of the variables x_1, x_2, t . Thus this formula defines the function $w(x_1, x_2, t, p_1, p_2)$ we look for. It should be pointed out that from Eq. 15 results Eq. 14 but, not conversely. Eq. 15 gives one of the possible forms of the function w . Really important are only the zero points of this function since the function appears in the equation of the boundary of the emission zone in the argument of the sign or σ -function.

According to Eq. 8 the equation of the emission zone boundary of the investigated system has the form:

$$p_1 h_1(x_1, x_2, t, w) + p_2 h_2(x_1, x_2, t, w) - 1 = 0$$

Substituting into this equation in place of w the function of the variables x_1, x_2, t, p_1, p_2 which we have found in prior considerations, we obtain the following form of our equation:

$$F(x_1, x_2, t, p_1, p_2) = p_1 h_1[x_1, x_2, t, w(x_1, x_2, t, p_1, p_2)] + p_2 h_2[x_1, x_2, t, w(x_1, x_2, t, p_1, p_2)] \quad 16$$

The set of characteristic directions of this equation has the form:

$$(h_1[x_1, x_2, t, w(x_1, x_2, t, p_1, p_2)], h_2[x_1, x_2, t, w(x_1, x_2, t, p_1, p_2)])$$

and thus coincides with the set $Q(x_1, x_2, t)$ defined by Eqs. 12. Eqs. 12 - 16 hold also in the case when $Q(x_1, x_2, t)$ consists of an infinite number of points.

The method of determination of the equation of emission zone boundary can be generalized for multi-dimensional systems. Consider a system whose equations have the form

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_s, t) \quad 17$$

where $n \geq s$, $k = 1, \dots, n$.

For the solve of simplicity let us assume $s = n$ /the vector $u(u_1, \dots, u_s)$ can be extended to n -dimensions by assuming $u_{s+1} = \dots = u_n = 0/$.

The equation of the control system can be written in vector notation:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad 18$$

where $u \in C(x, t)$.

Now we find /in the way described above/ the orientor condition associated with the system 18

$$\dot{x} \in N(x, t)$$

Next we determine the tensor $Q(x, t)$ of the set $N(x, t)$. The set $Q(x, t)$ consists of the points of some /not necessarily regular/ $n-1$ - dimensional hypersurface. Let this hypersurface be described by parametric equations /in analogy with Eq. 4 /:

$$h_k = h_k(x_1, \dots, x_n, t, w_1, \dots, w_{n-1}) \quad 19$$

where $w_1, \dots, w_{n-1}$ are parameters, $k = 1, \dots, n$. and $w(w_1, \dots, w_{n-1}) \in A(x, t)$.

The orientor condition for tensor control has the form

$$\dot{x} \in Q(x, t) \quad 20$$

We look for a form of the partial differential equation of the emission zone boundary analogous to Eq. 8

$$F = \sum_{i=1}^n p_i h_i(x, t, w) - 1 = 0 \quad 21$$

where w is a vector function $w(x, t, p)$ and

$$p = p(p_1, \dots, p_n) \quad , \quad p_k = \frac{\partial t}{\partial x_k} \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

The function $w(x, t, p)$ must be chosen to satisfy the following relationships:

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial h_i}{\partial w_j} = 0 \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial w_1}{\partial p_k} \right)^2 \equiv 0 \quad 22$$

where $j = 1, \dots, n-1$, w taking all positions in the set $A(x, t)$ at each point (x, t) .

The function $w(x, t, p)$ found on the basis of Eq. 22 is substituted into Eq. 21 and thus the equation of the emission zone boundary becomes

$$F = \sum_{i=1}^n p_i h_i(x, t, w(x, t, p)) - 1 = 0 \quad 23$$

It can be easily checked that the set of characteristic directions of this equation is identical with the set of directions defined by the orientor condition 20. The characteristic directions of Eq. 23 have namely the form:

$$\begin{aligned} & \left(h_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial h_i}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial p_1}, h_2 + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial h_i}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial p_2}, \dots \right. \\ & \left. \dots, h_n + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial h_i}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial p_n}, 1 - \sum_{j=1}^n p_j \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial h_i}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial p_j} \right) \end{aligned} \quad 24$$

where $w \in A(x, t)$. After taking into account Eqs. 22 these directions are reduced to the form

$$(h_1, \dots, h_n, 1) \quad 25$$

and thus are identical with the set of directions defined by the condition 20. Eq. 23 is thus the equation of the emission zone boundary of the point P_0 for the system 18. This zone is the characteristic conoid of Eq. 23 extending from the point P_0 .

Example

Consider a control system described by equations:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \varphi(x_1, \dots, x_n, u, t) \end{aligned} \quad 26$$

where u is a scalar, $|u| \leq 1$.

Assume that this system satisfies both assumptions I and II. We form the orientor field associated with this

system . For this purpose we perform the transformation

$$\begin{aligned} v_1 &= x_2 \\ v_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ v_n &= \varphi(x_1, \dots, x_n, u, t) \end{aligned} \quad 27$$

When u takes all values from the interval $[-1, +1]$ the point $v(v_1, \dots, v_n)$ takes positions composing the set $N(x, t)$. This set has the shape of a unidimensional line segment in n -dimensional space, since only one component of the vector v changes with changing u . The tensor $Q(x, t)$ of the set $N(x, t)$ thus consists of the points:

$$\begin{aligned} P_1(x_2, \dots, x_n, \max_u \varphi(x_1, \dots, x_n, u, t)) \\ P_2(x_2, \dots, x_n, \min_u \varphi(x_1, \dots, x_n, u, t)) \end{aligned} \quad 28$$

The set 28 can be described by the parametric equations 19, the functions h_j having the form:

$$\begin{aligned} h_1 &= x_2 \\ h_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ h_{n-1} &= x_{n-1} \\ h_n &= 1(w_1) \phi_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ &\quad + 1(-w_1) \phi_2(x_1, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad 29$$

where

$$\phi_1 = \max_u \varphi(x_1, \dots, x_n, u, t)$$

$$\phi_2 = \min_u \varphi(x_1, \dots, x_n, u, t)$$

$1(w_1)$ - Heav side unit function /step function/

The parameters $w_1, \dots, w_{n-1}$ are now made dependent on the variables $x_1, x_2, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n$ in such a way that Eqs. 22 would be satisfied. $w_2, \dots, w_{n-1}$ do not appear in Eqs. 29 and we can thus assume

$$w_2 \equiv w_3 \equiv \dots \equiv w_{n-1} \equiv 0$$

Eqs. 22 reduce in our case to the form

$$p_n \frac{\partial h_n}{\partial w_1} \equiv 0 \quad 30$$

The distributional derivative $\frac{\partial h_n}{\partial w}$ has the form

$$\frac{\partial h_n}{\partial w} = \delta(w_1) (\phi_1 - \phi_2)$$

Thus Eq. 30 holds if

$$w_1(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n) \equiv p_n$$

The equation of the emission zone boundary for the system 26 has according to 23, the form

$$F = p_1 x_2 + \dots + p_{n-1} x_n + p_n [1(p_n) \phi_1(x_1, \dots, x_n, t) + 1(-p_n) \phi_2(x_1, \dots, x_n, t)] \quad 31$$

In the case when the function ϕ in the system 26 is monotonic with respect to u , Eq. 31 can be written in the form

$$F = p_1 x_2 + \dots + p_{n-1} x_n + p_n [1(p_n) \varphi(x_1, \dots, x_n, 1, t) + 1(-p_n) \varphi(x_1, \dots, x_n, -1, t)] \quad 32$$

Note that in the last equation the vector u does not appear. The control vector u does not appear in Eqs. 19 - 23 either. Therefore the method presented in this paper will be called, according to the suggestion of Wazewski.

Determination of optimum trajectory and optimum control

To determine the time optimum trajectory of the control system 18 one should find the characteristics of Eq. 23. We shall apply the method of characteristics of Cauchy. This method can be applied when the function F appearing in Eq. 23 has continuous derivatives with respect to will variables. In general this is not the case in practice, which results in the necessity of making use of the concept of distribution. In connection with this we shall assign to the

function F and to all not differentiable functions appearing later, the corresponding distributions which we shall denote by the same symbols as the functions considered. After obtaining final results we shall go over to the values of distributions appearing in these functions.

Let us thus apply to Eq. 23 the method of characteristic of Cauchy. Cauchy's equations for Eq. 23 are:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial p_i} & \frac{dp_i}{ds} &= -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{dt}{ds} &= \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}\end{aligned}\quad 33$$

where $i = 1, \dots, n$, and s is a parameter.

The last of Eqs. 33 permits the parameter s to be eliminated since $\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial F}{\partial p_j} = 1$. We thus obtain a system of $2n$ ordinary differential equations for $2n$ functions of time: $x_1(t), \dots, x_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial t} \quad 34$$

Eqs. 34 describe the optimum trajectory of the system 18 in $(x_1, \dots, x_n, t)$ -space. This trajectory is uniquely described by giving the coordinates of the initial point P_0 and the coordinates of the aim $g(g_1, \dots, g_n)$. Here again appears the two-point boundary value problem, similarly as in equations obtained by means of variational methods. This problem consists in the fact that in of the boundary conditions of Eq. 34 are given at the beginning of the trajectory in terms of the coordinates of the point P_0 while n are given at the end of the trajectory in terms of the coordinates of the aim.

Knowing the optimum trajectory we can determine the optimum control signal $u_{\text{opt}}(t)$ by substituting the determined function $x_{\text{opt}}(t)$ into the equation of the system 18. We can also determine the dependence between optimum control signal and the vector $p(t)$. For this purpose we can make use of the knowledge of the dependence of the vector $h(h_1, \dots, h_n)$, which takes the positions of the set $Q(x, t)$,

on the vectors x and p /see Eqs. 19 and 22 /. The set $Q(x, t)$ has been obtained by making use of the transformation

$$v = f(x, u, t) \quad 35$$

which is analogous to the transformation 3. Let us now focus our attention to the fixed point P of the (x, t) - space. The transformation 3 assigns at this point to each value of the vector u a certain element of the set $Q(x, t)$ and thus also a certain value

$$h(x, p, t) = f(x, u, t) \quad 36$$

In the case when the transformation 3 has an inverse we can find on the basis of 36 a unique dependence

$$u = u(x, p, t) \quad 37$$

In the case when the transformation ³⁵ has no inverse the function $u(x, p, t)$ is not unique which means that there exists more than one control signal $u_{opt}(t)$ giving the optimum trajectory.

Example 1

Let us determine the optimum trajectory and optimum control signal for the system 26. The equations of the optimum trajectory for this system are readily obtained by writing down the Cauchy equations for Eq. 31 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= x_{j+1} \\ \dot{x}_n &= 1(p_n) \phi_1(x_1, \dots, x_n, t) + \\ &\quad + 1(-p_n) \phi_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{p}_k &= p_n \left[1(p_n) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_k} + 1(-p_n) \frac{\partial \phi_2}{\partial x_k} \right] + F_{k-1} \end{aligned} \quad 38$$

where $j=1, \dots, n-1$; $k=1, \dots, n$; $p_0=0$.

From the transformation 27 we obtain the following form of the relationship 36 :

$$\begin{aligned} h_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ h_{n-1} &= x_n \\ h_n &= \varphi(x_1, \dots, x_n, u, t) \end{aligned}$$

After substituting for $h_1, \dots, h_n$ the values of 29 and taking into account the fact the $w = p_n$ we obtain the equality:

$$1(p_n) \phi_1(x_1, \dots, x_n, t) + 1(-p_n) \phi_2(x_1, \dots, x_n, t) = \varphi(x_1, \dots, x_n, u, t) \quad 39$$

and thus

$$u = \begin{cases} u'(x_1, \dots, x_n, t) & p_n \leq 0 \\ u''(x_1, \dots, x_n, t) & p_n > 0 \end{cases} \quad 40$$

where u' and u'' denote the values of the control signal u for which the function φ becomes maximum and minimum at the point (x, t) , respectively. In the case when φ is monotonic with respect to u for all x, t , the optimum control signal must satisfy the relation

$$u = \text{sign } p_n \quad 41$$

Example 2

Consider a system described by the equation

$$\ddot{x} + \dot{x}u_2 + x = u_1 \quad 42$$

which is equivalent to the system of equations

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 - x_2 u_2 - x_1 = \varphi(x_1, x_2, u_1, u_2) \end{aligned} \quad 43$$

where

$$|u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1$$

When writing down the transformation 3 for this system we come to the conclusion that the set $N(x, t)$ in our case is a line segment. Thus the set $Q(x, t)$ consists of the ends of this segment, i.e., the points

$$\begin{aligned} & (x_2, \max_{u_1, u_2}(\varphi)) \\ & (x_2, \min_{u_1, u_2}(\varphi)) \end{aligned} \quad 44$$

where

$$\max_{u_1, u_2} (\varphi) = 1 + x_2 - x_1$$

$$\min_{u_1, u_2} (\varphi) = -1 - x_2 - x_1$$

Eqs. 4 become

$$h_1 = x_2, \quad h_2 = \text{sign } w (1 + |x_2|) - x_1$$

while from Eqs. 10 it follows that

$$p_2 \frac{\partial h_2}{\partial w} = 0$$

Hence we can conclude that $w \equiv p_2$ and thus the equation of the emission zone boundary is

$$F = p_1 x_2 + p_2 [\text{sign } p_2 (1 + x_2) - x_1] \quad 45$$

The Cauchy equations are in this case the following:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = \text{sign } p_2 (1 + x_2 \text{ sign } x_2) - x_1$$

$$\dot{p}_1 = -p_2 \quad \dot{p}_2 = -p_2 \text{ sign } p_2 \text{ sign } x_2 \quad 46$$

Optimum control signal can be found by means of Eq. 36

$$\text{sign } p_2 (1 + x_2 \text{ sign } x_2) - x_1 = u_1 - x_2 u_2 - x_1$$

and thus

$$u_1 = \text{sign } p_2 \quad u_2 = \text{sign } (x_2) \cdot \text{sign } (p_2)$$

The formulae obtained by means of the method described in this paper are relationships between distributions assigned to the corresponding functions /cf. p.15/. To obtain the values of this functions one should go over to the values of the corresponding distributions. This is possible since the distributions obtained have some values at all or almost all points of the regions considered.

References

=====

- 1 Zaremba S.K. : O równaniach paratyngensowych.
 Supplement to Rocznik Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego. 9 , 1935.
- 2 Ważewski T. : O problemie optymalnego sterowania
 w przypadku nieliniowym. Archiwum Automatyki
 i Telemechaniki, 7 , 1962.
- 3 Turowicz A. : Sur les trajectoires et quasi-trajec-
 toires des systemes de commande non lineaires.
 Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Sci.Math.Astr.Phys,
 11 , 1963.
- 4 Raczyński S. : Applicability of the tendor control
 /of bang-bang type/ in the non-linear optimum
 systems. Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Sci.Tech.,
 /to appear/.
- 5 Mikusiński J., Sikorski R. : Elementarna teoria dys-
 trybucji. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw
 1964,

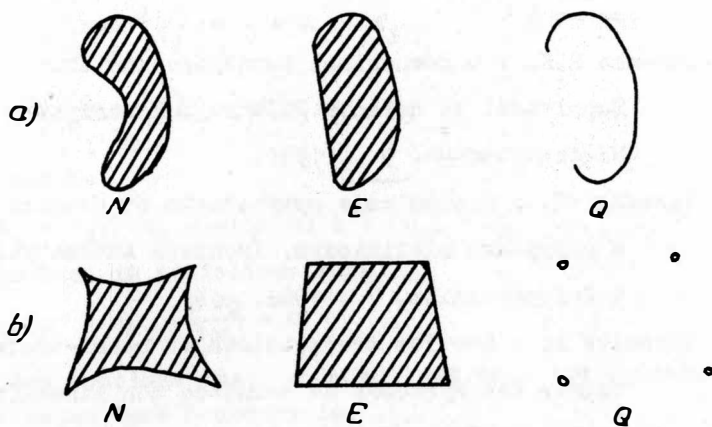


fig. 1

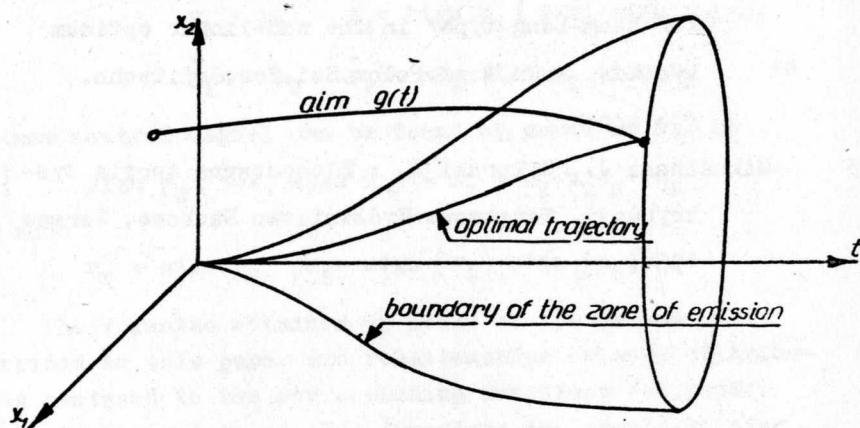


fig. 2

О МНОГОШАГОВЫХ ИГРАХ

А.И. Пропой

Институт автоматики и телемеханики /техни-
ческой кибернетики/
Москва /СССР/

1. В настоящем докладе приводятся некоторые результаты из теории многошаговых игр, т.е. таких, в которых поведение игроков описывается разностными уравнениями. Рассматриваются различные постановки многошаговых игр и соотношения между ними. Даны условия оптимальности для игр, имеющих седловую точку. Приводятся условия оптимальности для вычисления нижних и верхних границ качества игры при различной степени информированности игроков о ходе игры. В заключение аналогичные результаты формулируются для дифференциальных игр.

2. Пусть поведение игроков описывается разностным уравнением вида

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k) \quad (k=0, 1, \dots, N-1). \quad /2.1/$$

здесь вектор $x_k = \{x_k^1, \dots, x_k^n\}$ определяет состояние игры, векторы $u_k = \{u_k^1, \dots, u_k^r\}$, $v_k = \{v_k^1, \dots, v_k^s\}$ — управляющие воздействия I и II игроков на k -ом шаге. Игрок I может выбирать значения u_k из заданного множества U :

$$u_k \in U \quad (k=0, 1, \dots, N-1), \quad /2.2/$$

а игрок II — v_k — из множества V :

$$v_k \in V \quad (k=0, 1, \dots, N-1). \quad /2.3/$$

Число шагов в игре предполагается фиксированным заранее. Качество игры оценивается функционалом вида

$$J = P(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x_k, u_k, v_k), \quad /2.4/$$

причем игрок I стремится максимизировать значение функционала J , а игрок II — его минимизировать.

В дальнейшем будем предполагать, что множества U и V компактны, а функции $f_j(x, u, v)$, $P(x)$ ($j=0, 1, \dots, n$) непрерывно дифференцируемы на $E_n \times U \times V$.

назовем последовательности $u = \{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$, $v = \{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$, $x = \{x_1, \dots, x_N\}$ соответственно управлением

I, II игрока и траекторией игры. /Такое управление часто называют программным/. Очевидно, $J = J(x_0, u, v)$.

Кроме того, введем последовательности функций

$u(k, x) = \{u_0(x_0), \dots, u_{N-1}(x_{N-1})\}$, $v(k, x) = \{v_0(x_0), \dots, v_{N-1}(x_{N-1})\}$, которые назовем синтезом игроков I и II. Последовательности $u(k, x)$, $v(k, x)$ при заданном начальном состоянии также полностью определяют процесс: $J = J(x_0, u(k, x), v(k, x))$.

В зависимости от степени информированности игроков о ходе игры можно рассмотреть следующие задачи.

Задача I. допустим, что перед началом игры игроку I становится известным управление u игрока I. В этой ситуации наилучший выход для игрока I состоит в выборе такого управления u , которое обеспечивает

$$\max_u \min_v J(x_0, u, v) = \omega_1^-(x_0). \quad /2.5/$$

/При этом неявно предполагается, что игрок I применяет программное управление u , а не синтез $u(k, x)$, т.е. никак не использует текущую информацию о состоянии игры/. Выбирая такое управление, игрок I гарантирует себе значение функционала $J \geq \omega_1^-$, какое бы управление v не выбирал игрок II. ω_1^- - нижняя гарантированная оценка качества игры для игрока I при программном управлении.

Аналогичным образом определяется верхняя оценка игры $\omega_1^+(x_0)$ /случай, когда игрок I может знать заранее управление v игрока II/. Такая информированность игрока I приводит к нахождению

$$\min_v \max_u J(x_0, u, v) = \omega_1^+(x_0). \quad /2.6/$$

Задача 2. Пусть теперь игроку II в ходе игры на каждом шаге становится известным текущее состояние игры x_k и управляющее воздействие игрока I u_k ; игрок же I знает только v_k . В этой ситуации нетрудно показать, индукцией по шагам, начиная с последнего, что наилучшее поведение игрока I состоит в выборе такого управления u , которое обеспечивает

$$\max_{u_0} \min_{v_0} \max_{u_1} \min_{v_1} \dots \max_{u_{N-1}} \min_{v_{N-1}} J(x_0, u, v) = \omega_2^+(x_0) /2.7/$$

Если же наоборот, игрок I может получать информацию не только о текущем состоянии игры x_k , но и об управляющем воздействии v_k игрока II, то он может выбирать управле -

ние, гарантирующее

$$\min_{v_0} \max_{u_0} \min_{v_1} \max_{u_1} \dots \min_{v_{N-1}} \max_{u_{N-1}} J(x_0, u, v) = \omega_2^+(x_0). \quad /2.8/$$

Задача 3. Предположим, что перед началом игры игрок II знает синтез $u(k, x)$ игрока I, т.е. правила, по которым игрок I выбирает управляющие воздействия u_k в зависимости от состояния игры x_k /и, вообще говоря, от числа шагов k /. В этом случае игрок I должен так выбирать свой синтез, чтобы обеспечить

$$\max_{u(k, x)} \min_{v(k, x)} J(x_0, u(k, x), v(k, x)) = \omega_3^-(x_0). \quad /2.9/$$

$\omega_3^-(x_0)$ - нижняя оценка качества игры для игрока I, если он использует синтез. Верхняя оценка $\omega_3^+(x_0)$ определяется из решения задачи

$$\min_{v(k, x)} \max_{u(k, x)} J(x_0, u(k, x), v(k, x)) = \omega_3^+(x_0). \quad /2.10/$$

3. Установим соотношения между задачами I - 3. Для этого воспользуемся известными из теории одношаговых игр соотношениями /см., например, I,2 /:

$$\max_{u(x)} \min_{v(u, x)} \varphi(x, u, v) \leq \min_{v(x)} \max_{u(x, v)} \varphi(x, u, v), \quad /3.1/$$

$$\max_{u(x)} \min_{v(u, x)} \varphi(x, u, v) = \min_{v(u, x)} \max_{u(x)} \varphi(x, u, v), \quad /3.2/$$

справедливыми для любых непрерывных функций и ограниченных и замкнутых областей изменения u и v .

Неравенство /3.1/ означает, что выигрыш игрока I в случае, когда его выбор u известен противнику, не может быть больше выигрыша в случае, когда, наоборот, игрок I может знать выбор игрока II. Равенство /3.2/ означает, что операторы $\max$ и $\min$ коммутативны, если при этом информированность игроков о решении противника не меняется.

Применяя к задачам I-3 соотношения /3.1/, /3.2/, можно доказать следующую теорему 3.

Теорема 3.1. При сделанных предположениях относительно условий задач для любого начального состояния x_0 справедли-

$$\omega_3^-(x_0) = \omega_2^-(x_0); \quad \omega_3^+(x_0) = \omega_2^+(x_0), \quad /3.3/$$

$$\omega_1^-(x_0) \leq \omega_3^-(x_0) \leq \omega_3^+(x_0) \leq \omega_1^+(x_0), \quad /3.4/$$

где $\omega_j^{\pm}(x_0)$ ($j=1, 2, 3$) находятся из решения задач I-3 в силу уравнений движения /2.1/ при ограничениях /2.2/, /2.3/.

Также нетрудно установить следующие результаты.

Теорема 3.2. Для любых начальных соотношений справедливы равенства

$$\begin{cases} \max_{u(k,x)} \min_{v(k,x)} J = \max_{u(k,x)} \min_v J, \\ \min_{v(k,x)} \max_{u(k,x)} J = \min_{v(k,x)} \max_u J, \end{cases} \quad /3.5/$$

$$\begin{cases} \max_u \min_v J = \max_u \min_{v(k,x)} J, \\ \min_v \max_u J = \min_v \max_{u(k,x)} J, \end{cases} \quad /3.6/$$

Соотношения /3.3/ показывают, что задачи 2 и 3 являются, по существу, различными формулировками одной и той же задачи. Поэтому в динамических играх нужно различать две основные игры. В первой игре, которую будем обозначать через $J_1(x_0, u, v)$, игроки выбирают свои управления заранее и никак не используют текущую информацию о ходе игры; это, по существу, статическая игра. Во второй игре $J_2(x_0, u(k, x), v(k, x))$ игроки определяют свое поведение в зависимости от хода игры. Соотношения /3.4/ - /3.6/ показывают, что в этом случае игрок I, например, может повысить качество своей игры, независимо от поведения противника /применяет ли он тоже синтез или использует программное управление/. из теоремы 3.1 непосредственно вытекает

Теорема 3.3. Пусть игра $J_1(x_0, u, v)$ имеет седло, т.е.

$$\max_u \min_v J = \min_v \max_u J.$$

Тогда игра $J_2(x_0, u(k, x), v(k, x))$ также имеет седло, т.е.

$$\max_{u(k,x)} \min_{v(k,x)} J = \min_{v(k,x)} \max_{u(k,x)} J.$$

Обратное, вообще говоря, неверно.

Из этой теоремы следует, что программное управление эквивалентно синтезу только если существует седловая точка игры J_1 , что, по-видимому, редко встречается в реальных конфликтных ситуациях. В большинстве же игр ω_1^- значительно

больше . Поэтому использование игроком I синтеза часто улучшает качество его игры.

4. Перейдем к условиям оптимальности задач I-3. для этого воспользуемся результатами ⁴⁻⁶, полученными при решении одношаговых задач. Именно, рассмотрим задачу нахождения

$$\max_{u \in U} \min_{v \in V} \varphi(u, v), \quad /4.1/$$

где U и V — компактные множества, а функция $\varphi(u, v)$ непрерывно-дифференцируема на $U \times V$. Как следует из ⁴⁻⁶, функция $\varphi(u) = \min_{v \in V} \varphi(u, v)$ в этом случае непрерывна и дифференцируема по любому направлению $\delta u = u - \bar{u}$, причем

$$\delta \varphi(\bar{u}) = \frac{\partial \varphi(\bar{u})}{\partial u} = \min_{v \in V(\bar{u})} \left[\frac{\partial \varphi(\bar{u}, v)}{\partial u} \right]^T \delta u, \quad /4.2/$$

где $V(\bar{u})$ — множество оптимальных ответов v на $\bar{u} \in U$:

$$V(\bar{u}) = \{v / \varphi(\bar{u}, v) = \min_{v \in V} \varphi(\bar{u}, v)\}.$$

Кроме того, введем сопряженную систему, которую определим следующим образом:

$$p_k = \frac{\partial f_0(x_k, u_k, v_k)}{\partial x_k} + \left[\frac{\partial f(x_k, u_k, v_k)}{\partial x_k} \right]^T p_{k+1} \quad /4.3/$$

с граничным условием

$$p_n = \frac{\partial \varphi(x_n)}{\partial x_n}. \quad /4.4/$$

здесь вектор $p_k = \{p_k^1, \dots, p_k^n\}$; $\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right]_{ij}$;

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_0}{\partial x_j} \right]_j; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right]_{(i,j=1, \dots, n)};$$

^T означает транспонирование.

Определим также функцию Гамильтона

$$H(p_{k+1}, x_k, u_k, v_k) = f_0(x_k, u_k, v_k) + p_{k+1}^T f(x_k, u_k, v_k) \quad /4.5/$$

и обозначим через $\delta_u H$ и $\delta_v H$ допустимые дифференциалы этой функции

$$\delta_u H = \frac{\partial f_0(x_k, u_k, v_k)}{\partial u_k} \delta u_k + p_{k+1}^T \frac{\partial f(x_k, u_k, v_k)}{\partial u_k} \delta u_k;$$

$$\delta_v H = \frac{\partial f_0(x_k, u_k, v_k)}{\partial v_k} \delta v_k + p_{k+1}^T \frac{\partial f(x_k, u_k, v_k)}{\partial v_k} \delta v_k,$$

где $\delta u_k \in K(u_k)$, $\delta v_k \in K(v_k)$;

$K(u_k)$, $K(v_k)$

- конусы возможных вариаций в точках $u_k \in U$ и $v_k \in V$ ^{7,8} :

$$K(u) = \{ \delta u / u \in U; u + \varepsilon \delta u \in U; 0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon} \}.$$

5. Сформулируем теперь необходимые условия оптимальности для задачи I. Применяя введенные в п. 5 понятия и пользуясь обычными в теории оптимального управления рассуждениями /см., например, ⁸ /, можно установить следующий результат.

Пусть $\Omega_v(u^*)$ - множество оптимальных ответов /управлений v^* / игрока II на управление u^* . Множество $\Omega_v(u^*)$ определяется из решения следующей задачи

$$J^* = \{ \min_v J / x_{k+1} = f(x_k, u_k^*, v_k), v_k \in V (k=0, 1, \dots, N-1) \} / 5.1 /$$

Тогда справедлива

Теорема 5.1. На оптимальном управлении u^* игрока I выполняются неравенства

$$\min_{v \in \Omega_v(u^*)} \delta_u H(p_{k+1}, x_k, u_k^*, v_k) \leq 0 \quad / 5.2 /$$

для всех $\delta u_k \in K(u_k^*)$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), причем оптимальные значения x_k, p_k находятся из уравнений /2.1/, /4.3/, /4.4/ при соответствующих $v \in \Omega_v(u^*)$.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев.

Без ограничения общности можно считать, что

$$f_0(x, u, v) \equiv 0,$$

т.е. качество игры зависит только от конечного состояния x_N .

$$J = \varphi(x_N).$$

Теорема 5.2. Пусть известно, что множество

$$R_1^f(x, v) = \{ \tilde{x} / \tilde{x} = f(x, u, v), u \in U \}$$

выпукло при любых x и $v \in V$.

Тогда на оптимальном управлении справедливы равенства

$$\max_{u_k \in U} \min_{v \in Q_v(u^*)} [H(p_{k+1}, x_k, u_k, v_k) - H(p_{k+1}, x_k, u_k^*, v_k^*)] = 0 \quad /5.3/$$

Справедливость теоремы следует из неравенства /5.2/ и выпуклости множества $R_1^f(x, v)$ /ср. 5,8 /.

Теорема 5.3. Пусть известно, что множество $\Omega_v(u^*)$ состоит из единственного управления v^* . /Решение задачи /5.1/ единственно/. Тогда на оптимальном управлении справедливы неравенства

$$\delta_u H(p_{k+1}, x_k^*, u_k^*, v_k^*) \leq 0 \quad /5.4/$$

для всех $\delta u_k \in K(u_k^*)$ и

$$\delta_v H(p_{k+1}, x_k^*, u_k^*, v_k^*) \geq 0 \quad /5.5/$$

для всех $\delta v_k \in K(v_k^*)$ и $k = 0, 1, \dots, N-1$, где оптимальные значения p_k^*, x_k^* находятся из уравнений /2.1/, /4.3/, /4.4/ при $u_k = u_k^*, v_k = v_k^*$.

Неравенство /5.4/ непосредственно следует из /5.2/; неравенство /5.5/ выражает условие оптимальности управления игрока II.

Рассмотрим теперь опять случай, когда $f_0(x, u, v) \equiv 0$,

Теорема 5.4. Пусть известно, что:

1) множества

$$R_1^f(x, v) = \{ \tilde{x} / \tilde{x} = f(x, u, v), u \in U \}; \quad R_2^g(x, u) = \{ \tilde{x} / \tilde{x} = f(x, u, v), v \in V \}$$

выпуклы при любых x и $u \in U, v \in V$;

2) оптимальное управление v^* игрока II единственно /множество $\Omega_v(u^*)$ состоит из одной точки v^* /. Тогда для того, чтобы u^*, v^* были оптимальными управлениями игроков I и II, необходимо, чтобы функция Гамильтона имела седло в точках u_k^*, v_k^* ($k = 0, 1, \dots, N-1$), т.е. на оптимальном управлении

$$\begin{aligned} \max_{u_k} \min_{v_k} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k, v_k) &= \min_{v_k} \max_{u_k} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k, v_k) = \\ &= H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*) \end{aligned} \quad /5.6/$$

Аналогичный результат справедлив и для функционалов общего вида /2.4/ /ср. ⁸ /.

Доказательство. Из неравенства /5.4/ и выпуклости множества $R_1^I(x, v)$ следует ⁸ :

$$\max_{u_k \in U} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k, v_k^*) = H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*) \quad /5.7/$$

/Это же равенство, естественно, следует и из /6.3/ в случае единственности v^* /.

Из /5.5/ и выпуклости множества $R_1^I(x, u)$ следует

$$\min_{v_k \in V} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k) = H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*). \quad /5.8/$$

Равенства /5.7/, /5.8/, как известно ^{1,2}, эквивалентны /5.6/. Условия оптимальности, аналогичные /5.2/ - /5.6/, можно получить и для нахождения $\omega_j^*(x_0)$ /задача /2.6//.

6. Перейдем к формулировке необходимых условий оптимальности задач 2.3.

Пусть $u_k^*, v_k^* (k = 0, 1, \dots, N-1)$ - оптимальное решение задачи 2 для фиксированного начального состояния x_0 . Как доказано в п. 3, $u_k^* = u_k^*(x_k)$, $v_k^* = v_k^*(x_k, u_k^*)$, где $u_k^*(x)$, $v_k^*(x, u)$ - оптимальное решение задачи 3.

Теорема 6.1. Пусть u^* и v^* - оптимальные управления игроков I и II для начального состояния x_0 .

Тогда на оптимальном процессе, если он единственен, справедливы неравенства

$$\delta_u H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*) \leq 0, \quad \delta u_k \in K(u_k^*), \quad /6.1/$$

$$\delta_v H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*) \geq 0, \quad \delta v_k \in K(v_k^*),$$

где $u_k^* = u_k^*(x_k^*)$, $v_k^* = v_k^*(x_k^*, u_k^*)$, а оптимальные значения x_k^* и p_k^* находятся из уравнений /2.1/, /4.3/, /4.4/.

Доказательство этой теоремы проводится обычными в оптимальном управлении методами и здесь не приводится /ср. ⁸ /.

Таким образом, в случае единственности оптимальности процесса условия оптимальности для задач I-3 по форме совпадают, хотя имеют разный смысл, что показывают приводимые ниже следствия.

Следствие I. Пусть множества $\tilde{R}_1^I(x) = \{\tilde{x} / \tilde{x} = f(x, u, v_k^*(x, u)), u \in U\}$ где $v_k^*(x, u) (k = 0, 1, \dots, N-1)$ - оптимальный

синтез игрока II, и $R_1^{\bar{x}}(x, u)$ выпуклы при любых x и $u \in U$. Тогда для того, чтобы u^* были оптимальным управлением игрока I для начального состояния x_0 , необходимо, чтобы на этом управлении

$$\max_{u_k \in U} \min_{v_k \in V} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k, v_k) = H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*). \quad /6.3/$$

Доказательство. Из выпуклости множества $\tilde{R}_1^{\bar{x}}(x)$ и неравенства /6.1/ следует, что

$$\max_{u_k \in U} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k, v_k^*(u_k, x_k^*)) = H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*). \quad /6.4/$$

Из выпуклости множества $R_1^{\bar{x}}(x, u)$ и неравенства /6.2/ следует, что

$$\min_{v_k \in V} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*(x_k^*), v_k) = H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*). \quad /6.5/$$

здесь $v_k^* = \tilde{v}_k^*(x_k^*, u_k^*(x_k^*), p_{k+1}^*)$. Исключая из этого равенства с помощью уравнений /2.1/ и /4.3/, /4.4/ переменные p_{k+1}^* , заменим равенство /6.5/ на

$$\min_{v_k \in V} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k, v_k) = H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k, v_k^*(x_k^*, u_k)).$$

Из него и /6.4/ получаем окончательно

$$\max_{u_k \in U} \min_{v_k \in V} H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k, v_k) = H(p_{k+1}^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*).$$

Проверка выпуклости множества $\tilde{R}_1^{\bar{x}}(x)$ требует предварительного определения оптимального синтеза $v^*(k, x, u)$ игрока II, что не всегда удобно.

Следствие 2. Пусть множества $R_1^{\bar{x}}(x, v)$ и $R_1^{\bar{y}}(x, u)$ выпуклы при любых x и $v \in V, u \in U$. Тогда для того, чтобы u^*, v^* были оптимальными управлениями игроков I и II, необходимо, чтобы функция Гамильтона в этих точка имела седло, т.е. чтобы на оптимальном процессе было справедливо /5.6/.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.4.

7. Пусть теперь игры Γ_1, Γ_2 имеют седловые точки. В этом случае игровая задача сводится, как известно ^{1,2}, к паре задач оптимального управления.

Пусть существуют такие допустимые управления u^* и v^* , что игра $\Gamma_1(x_0, u, v)$ имеет седло в этой точке, т.е.

$$\max_u \min_v J(x_0, u, v) = \min_v \max_u J(x_0, u, v) = J^* \quad /7.1/$$

В этом случае исходная игра сводится к паре следующих задач оптимального управления

$$J^* = \{ \max_u J / x_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k^*), x_0 = a, u_k \in U \}, \quad /7.2/$$

$$J^* = \{ \min_v J / x_{k+1} = f(x_k, u_k^*, v_k), x_0 = a, v_k \in V \}. \quad /7.3/$$

Применяя к /7.2/, /7.3/ условия оптимальности для дискретных систем ⁸, непосредственно получаем

Теорема 7.1. Для того чтобы управления u^* и v^* были седловой точкой игры $\Gamma_1(x_0, u, v)$, необходимо, чтобы на оптимальном управлении выполнялись неравенства

$$\delta_u H(p_k^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*) \leq 0, \quad \forall \delta u_k \in K(u_k^*), \quad /7.4/$$

$$\delta_v H(p_k^*, x_k^*, u_k^*, v_k^*) \geq 0, \quad \forall \delta v_k \in K(v_k^*), \quad /7.5/$$

где оптимальные значения x_k^*, p_k^* находятся из уравнений /2.1/, /4.3/, /4.4/.

Рассмотрим теперь игру Γ_2 . Пусть существует такой синтез $u^*(k, x), v^*(k, x)$, что

$$\max_{u(k,x)} \min_{v(k,x)} J = \min_{v(k,x)} \max_{u(k,x)} J = J^*. \quad /7.6/$$

Тогда игра Γ_2 сводится к задачам

$$J^* = \{ \max_u J / x_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k^*(x_k)), x_0 = a, u_k \in U \}, \quad /7.7/$$

$$J^* = \{ \min_v J / x_{k+1} = f(x_k, u_k^*(x_k), v_k), x_0 = a, v_k \in V \}. \quad /7.8/$$

Методами, аналогичными используемым при доказательстве теорем пп. 5, 6, можно установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 7.2. Пусть $u_k^* = u_k^*(x_k^*), v_k^* = v_k^*(x_k^*)$ — управления, удовлетворяющие /7.6/. Тогда, если эти управления единственны, справедливы неравенства /7.4/, /7.5/, где x_k^*, p_k^* находятся из /2.1/, /4.3/, /4.4/.

Конечно, оптимальные управления u^* и v^* в играх Γ_1 и Γ_2 для фиксированного x_0 в общем случае не совпадают.

8. В заключение сформулируем полученные результаты применительно к дифференциальным играм. В этом случае игра задается уравнением вида

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad 0 \leq t \leq T \quad /8.1/$$

с начальным условием $x(0) = x_0$ и ограничениями

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in V, \quad /8.2/$$

а качество игры оценивается функционалом вида

$$J = P(x(\bar{T})) + \int_0^{\bar{T}} f_0(x, u, v) dt. \quad /8.3/$$

Так же, как и в многошаговых играх, здесь можно различать две основные игры. Первая игра $\Gamma_1(x_0, u, v)$, где $u = \{u(t) / 0 \leq t \leq T\}$ и $v = \{v(t) / 0 \leq t \leq T\}$ - управления игроков I и II, связана с решением задач

$$\omega_1^-(x_0) = \max_u \min_v J(x_0, u, v),$$

$$\omega_1^+(x_0) = \min_v \max_u J(x_0, u, v).$$

Во второй игре $\Gamma_2(x_0, u(t, x), v(t, x))$ нужно решать задачи

$$\omega_2^-(x_0) = \max_{u(t, x)} \min_{v(t, x)} J(x_0, u(t, x), v(t, x)), \quad /8.4/$$

$$\omega_2^+(x_0) = \min_{v(t, x)} \max_{u(t, x)} J(x_0, u(t, x), v(t, x)), \quad /8.5/$$

которые полностью аналогичны задаче 3 в многошаговых играх. Задаче же 2 в дифференциальных играх можно сопоставить такую задачу: найти управление игрока I, которое бы обеспечило наилучшее значение функционала J , как бы ни вел себя при этом противник /разумеется, противник "должен" вести себя наихудшим образом/, в предположении, что игроку I известны в каждый момент времени текущие значения $x(t)$ и $v(t)$. /Такие игры получили название игр с дискриминацией^{9,10}/. Требование знания текущих управляющих воздействий $v(t)$, конечно, нереально с физической точки зрения. Однако, на основании результатов п. 3, можно утверждать, что такие игры эквивалентны задаче /8.5/. Предположение, что игрок может знать заранее правила, по которым противник выбирает свои управляющие воздействия в зависимости от текущего состояния игры /т.е. знание синтеза/, не является уже слишком обременительным.

Предельным переходом, хотя здесь и могут встретиться трудности математического характера, можно показать, что и для дифференциальных игр справедливы соотношения типа /3.3/ - /3.6/. Таким образом, сказанное в п. 3 относительно соотно-

ношения между играми Γ_1 и Γ_2 полностью относится и к дифференциальным играм.

Также предельным переходом можно установить следующие теоремы.

Теорема 8.1. Пусть u^* - оптимальное управление игрока I, а $\Omega_v(u^*)$ - множество оптимальных управлений v^* игрока II в задаче /8.4/. Тогда на оптимальном управлении справедливо равенство

$$\max_{u \in U} \min_{v \in \Omega_v(u^*)} [H(p, x, u, v) - H(p, x, u^*, v)] = 0,$$

где

$$H(p, x, u, v) = f_0(x, u, v) + p^T f(x, u, v), \quad /8.6/$$

а оптимальные значения $p^*(t)$ находятся из сопряженной системы

$$\dot{p} = \frac{\partial f_0(x, u, v)}{\partial x} + p^T \frac{\partial f(x, u, v)}{\partial x}; \quad p(T) = \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x} \quad /8.7/$$

Теорема 8.3. Пусть $u^*(t) = u^*(t, x^*)$ и $v^*(t) = v^*(t, x^*, u^*)$ - оптимальные управления в задаче /8.4/ при начальном состоянии x_0 . Тогда, если оптимальный процесс единственен, справедливо равенство

$$\max_{u \in U} \min_{v \in V} H(p^*, x^*, u, v) = H(p^*, x^*, u^*, v^*),$$

где функция Гамильтона определена из /8.6/, а $p^*(t)$ - из /8.7/.

Наконец, из того, что игра $\Gamma_2(x_0, u(t, x), v(t, x))$ имеет седловую точку, следует, что при некоторых предположениях относительно функций $u(t, x), v(t, x)$, наличие седловой точки функции Гамильтона. Справедливость этого факта для случая так называемого "регулярного" синтеза установлена в II и для случая "гладкого" синтеза в ¹² /при доказательстве допущена ошибка в ¹² /.

В заключение отметим, что приведенные в работе условия оптимальности позволяют развить вычислительные методы для динамических игр.

Л и т е р а т у р а

1. Льюс Р., Райфа Г., Игры и решения, Изд-во ИЛ, М., 1961.
2. Карлин С., Математические методы в теории игр, програми-

- мировании и экономике. Изд-во "мир", М., 1964.
3. Ерешко Ф.И., Пропой А.И., К теории динамических игр. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1968 /в печати/.
 4. Пшеничный Б.Н., Выпуклое программирование в нормированных пространствах. Кибернетика, № 5, 1965.
 5. Демьянов В.Ф., К решению некоторых минимаксных задач. I, II. Кибернетика, № 6, 1966, № 3, 1967.
 6. Danskin J.W., The theory of maxim with application. J. SIAM Appl. Math., v. 14, No. 4, 1966.
 7. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А., Задачи на экстремум при наличии ограничений. ИВМ и МФ, т. 5, № 4, 1965.
 8. Пропой А.И., О принципе максимума для дискретных систем управления. Автоматика и телемеханика, № 7, 1965.
 9. Понтрягин Л.С., К теории дифференциальных игр. УМН, т.21, № 4, 1966.
 10. Красовский Н.Н., Репин Ю.М., Третьяков В.Е., О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1965.
 11. Berkovitz L.D., Necessary conditions for optimal strategies in a class of differential games and control problems. SIAM J. on Control, v. 5, No. 1, 1967.
 12. Зеликин М.И., Тынянский Н.Т., Детерминированные дифференциальные игры. УМН, т. 20, № 4, 1965.

